Université Paris 7 - Denis Diderot **UFR de Mathématiques**
Master 2ème année **Examen de Novembre 2011**
"modélisation aléatoire" **Francis Comets et Mathieu Merle**

Calcul Stochastique et Modèles de Diffusions

Durée 3 heures. 2 parties indépendantes, à rédiger sur des copies séparées à votre nom.

Tous documents autorisés, pas les téléphones! Il est souvent possible de traiter une question sans avoir résolu la précédente. La qualité de la rédaction et la pertinence des arguments seront prises en compte dans la notation.

Partie I (8 points)

Soit B un mouvement Brownien partant de $B(0) = x \in \mathbb{R}$. On se donne une courbe déterministe $f(t)$, avec $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, et on considère le premier temps de franchissement par B de cette barrière mobile:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : B(t) \geq f(t)\},$$

avec $\inf \emptyset = +\infty$. On cherche dans cette partie à déterminer la transformée de Laplace

$$u_\lambda(x) = \mathbb{E}_x[\exp\{-\lambda\tau\}] \ , \qquad \lambda > 0,$$

de τ.([1]) Dans un premier temps, on suppose qu'il existe une solution continue $v_\lambda : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $\{(t,x) : x < f(t)\}$ à dérivées uniformément bornées de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v_\lambda + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} v_\lambda - \lambda v_\lambda = 0 & \text{si } x < f(t), \\ v_\lambda(t,x) = 1 & \text{si } x \geq f(t). \end{cases} \tag{1}$$

1. Soit $M(t) = e^{-\lambda t} v_\lambda(t, B(t))$. Montrer que $M(t \wedge \tau)$ est une martingale locale, puis que c'est une martingale. En déduire que $u_\lambda(x) = v_\lambda(0,x)$.

2. Lorsque f est une parabole $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ avec $\alpha > 0$, démontrer que $\mathbb{P}_0(\tau < \infty) = 1$ si et seulement si $\gamma < 0$, ou $\gamma = 0$ et $\beta \leq 0$.

Dans toute la suite, on considère le cas de la droite $f(t) = \alpha + \beta t$, avec $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Quelle équation aux dérivées partielles est vérifiée par $w_\lambda(t,x) = v_\lambda(t, x + \beta t)$?

4. Trouver une solution w_λ de cette dernière équation aux dérivées partielles, qui soit indépendante du temps.

5. En déduire que l'hypothèse (1) est satisfaite, et calculer $u_\lambda(x)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_0(\tau < \infty)$.

[1] La notation $\mathbb{E}_x$ indique comme d'habitude que $B(0) = x$.

Partie II (Barème approximatif: 12 points)

Soient B un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha > 0$. On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX(t) = dB(t) - a(t)X(t)dt \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

et on pose $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

1. (a) Justifiez que cette équation différentielle stochastique a une unique solution définie en tout temps $t \geq 0$. Dans le cas où $a(t) = \alpha$ pour tout t, reconnaissez-vous un processus connu ?

   (b) Calculer la différentielle stochastique de $e^{A(t)}X(t)$. En déduire que

   $$X(t) = \int_0^t e^{A(s)-A(t)}dB(s) + e^{-A(t)}x_0 \ ,$$

   et enfin que $X(t) = e^{A(s)-A(t)}X(s) + \int_s^t e^{A(r)-A(t)}dB(r)$ pour $0 \leq s \leq t$.

   (c) Montrer que X est un processus gaussien, dont on calculera les fonctions de moyenne et de covariance. Vérifier que la loi de $X(t)$ converge vers la gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/(2\alpha))$ quand $t \to \infty$.

2. On considère dorénavant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, bornée ainsi que ses dérivées, et on note $M_t(s) = \mathbb{E}\big[f(X(t))|\mathcal{F}_s\big]$ pour $0 \leq s \leq t$.

   (a) Justifier que, pour tout $t > 0$ fixé $(M_t(s); s \in [0,t])$ est une $\mathcal{F}$- martingale, telle que $M_t(0) = \mathbb{E}f(X(t)), M_t(t) = f(X(t))$.

   (b) Pour g borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $P_{s,t}(g)$ (si $0 \leq s \leq t$) par

   $$P_{s,t}(g)(x) = E\Big(g\big(e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\big)\Big) \ , \tag{2}$$

   où E désigne l'espérance dans la variable aléatoire gaussienne $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, et où $K(s,t) = \int_s^t e^{2(A(u)-A(t))}du$. Montrer que $M_t(s) = P_{s,t}(f)(X(s))$.

3. Calculer la différentielle stochastique par rapport à s de $M_t(s)$ en utilisant la formule (2), puis en déduire que

   $$f(X(t)) = \mathbb{E}f(X(t)) + \int_0^t e^{A(s)-A(t)}P_{s,t}(f')(X(s))dB(s)$$

   On rappelle la formule d'intégration par parties gaussienne: $E\big(\xi h(\xi)\big) = E\big(h'(\xi)\big)$.

4. Montrer que p.s., on a pour tout t,

   $$\frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))ds = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}f(X(s))ds + \frac{1}{t}\int_0^t dB(r)\int_r^t e^{A(r)-A(s)}P_{r,s}(f')(X(r))ds \ .$$

   Pour ce faire, on utilisera un théorème de Fubini pour les intégrales stochastiques, que l'on justifiera dans un deuxième temps.

5. En déduire le résultat suivant, appelé théorème ergodique en moyenne quadratique:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t g\big(X(s)\big) ds = E\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\xi\right)\right) \qquad \text{dans } L^2,$$

pour toute fonction g continue bornée sur $\mathbb{R}$.

♣