Université Paris 7 - Denis Diderot **UFR de Mathématiques**
Master 2ème année **Examen de Novembre 2012**
"modélisation aléatoire" **Francis Comets et Mathieu Merle**

Calcul Stochastique et Modèles de Diffusions

Durée 3 heures. 3 parties indépendantes; rédigez sur deux copies séparées à votre nom, l'une pour les deux exercices, l'autre pour le problème.

Tous documents autorisés, pas les téléphones! Il est souvent possible de traiter une question sans avoir résolu la précédente. La qualité de la rédaction et la pertinence des arguments seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 (5 points)

Soit B un mouvement Brownien, $a > 0$ une constante et

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left\{ -\frac{aB(t)^2}{2(1-t)} \right\} , \quad t \in [0, 1[.$$

1. Pour quelle valeur a_0 de a le processus M est-il une martingale locale ? Est-ce une martingale ?
2. Trouver $\phi \in M^2_{\text{loc}}$ telle que l'on ait, pour $a = a_0$,

$$M(t) = \exp\{ \int_0^t \phi(s) dB(s) - (1/2) \int_0^t \phi^2(s) ds \}$$

3. Dans le cas général de $a > 0$, montrer que $\lim M(t) = 0$ p.s. quand $t \to 1^-$. Avec $r > 0$, vérifier que $M(t)^r$ converge vers 0 dans L^1 si et seulement si $r \in (0, 1)$.

Exercice 2 (3 points)

Soit M une martingale positive continue avec $M(0) = a > 0$ et $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$ p.s. Montrer que $S = \sup\{M(t); t \geq 0\}$ suit la même loi que a/U avec U une variable uniforme sur $]0, 1[$. (Indication: on pourra introduire le temps d'arrêt $T_x = \inf\{t \geq 0 : M(t) \geq x\}$)

Problème (Barème approximatif: 12 points)

Soient $X = (X_1, X_2)$ un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien bi-dimensionnel sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, issu de $X(0) = a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Dans quel sens peut-on définir les variables
$$\xi = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)=X_2(s)\}} ds, \qquad \eta = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)=X_2(s)\}} dX_1(s) \quad ?$$
Vérifier que $\xi = \eta = 0$ p.s.

2. On pose $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ avec
$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} dX_1(s) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_2(s)\leq X_1(s)\}} dX_2(s) \\ \beta_2(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} dX_2(s) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_2(s)\leq X_1(s)\}} dX_1(s) \end{array} \right. \tag{1}$$
Montrer que β est un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien sous $\mathbb{P}$, issu de l'origine.

3. Soient δ_1, δ_2 deux nombres réels. Vérifier que le processus $Z = (Z(t), t \geq 0)$, avec
$$Z(t) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^2 \delta_j \beta_j(t) - \frac{t}{2} \sum_{j=1}^2 \delta_j^2 \right\},$$
est une $\mathcal{F}$-martingale d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$.

4. On définit alors la probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ par $d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = Z(t) d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$. Trouver un processus $W = (W_1, W_2)$, nul au temps 0, qui soit un mouvement Brownien sous la probabilité $\mathbb{Q}$. Montrer que sous $\mathbb{Q}$, β_1 et β_2 sont des mouvements Browniens réels indépendants de dérives respectives [1] δ_1, δ_2, et trouver la loi sous $\mathbb{Q}$ de $B = (B_1, B_2)$ donnés par
$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} dW_1(s) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_2(s)\leq X_1(s)\}} dW_2(s) \\ B_2(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} dW_2(s) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_2(s)\leq X_1(s)\}} dW_1(s) \end{array} \right.$$

5. Quelle équation différentielle stochastique conduite par B est satisfaite par le processus X ?

   Comment peut-on décrire la dynamique du couple (X_1, X_2) sous la loi $\mathbb{Q}$? Quel différence qualitative de comportement pour t grand prévoyez-vous suivant le signe de $\delta_1 - \delta_2$?

6. On considère le centre de masse
$$\bar{X}(t) = \frac{1}{2}\Big(X_1(t) + X_2(t)\Big) \in \mathbb{R}.$$
Montrer que sous $\mathbb{Q}$, $\bar{X}$ est un mouvement Brownien avec dérive et coefficient de diffusion que l'on déterminera. Les processus $\bar{X}$ et $X_1 - \bar{X}$ sont-ils indépendants sous la loi $\mathbb{Q}$?

7. Trouver une équation différentielle stochastique conduite par B, qui soit satisfaite par le processus $U = X_1 - X_2$. Le coefficient de dérive est-il continu ?
   (a) Montrer que si $\delta_1 < \delta_2$, $|U(t)| \to \infty$ quand $t \to \infty$.
   (b) Montrer que si $\delta_1 > \delta_2$, $U(t)$ admet densité invariante, que l'on déterminera.

[1]On rappelle qu'un mouvement Brownien avec dérive c (c constante réelle) est une diffusion avec coefficient de diffusion $\sigma = 1$ et dérive $b = c$ constants.

Corrigé succinct

Exercice 1

1. Différentions $X(t) = \dfrac{B(t)^2}{1-t}$ par la formule d'Itô,

$$dX(t) = \frac{2B(t)}{1-t}dB(t) + \frac{1}{1-t}dt + \frac{B(t)^2}{(1-t)^2}dt \ ,$$

   et encore

$$\begin{aligned} dM(t) &= d\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\exp\left\{-\frac{a}{2}X(t)\right\}\right) \\ &= M(t)\left[-\frac{a}{2}dX(t) + \frac{a^2}{8}d\langle X\rangle(t) + \frac{1}{2(1-t)}dt\right] \\ &= M(t)\left[-\frac{aB(t)}{1-t}dB(t) + \frac{1-a}{2(1-t)}dt + \frac{a(a-1)}{2(1-t)^2}B(t)^2dt\right], \end{aligned}$$

   dont le terme à variation bornée s'annulle pour $a = 1$. Ainsi, M est une martingale locale lorsque $a = a_0 = 1$ et dans ce cas seulement, avec

$$M(t) = M(0) - \int_0^t \frac{M(s)B(s)}{1-s}dB(s) \tag{2}$$

   Comme $M(t) \leq (1-t)^{-1/2}$, c'est même une martingale de carré intégrable, car

$$\psi(s) = -\frac{M(s)B(s)}{1-s}$$

   vérifie

$$\mathbb{E}[\int_0^t \psi(s)^2 ds] \leq \int_0^t \frac{s}{(1-s)^3}ds < \infty \ ,$$

   ce qui entraine que $\psi \in M^2([0,t])$ pour tout $t < 1$.

2. D'après (2), le processus $\phi(s) = -\frac{B(s)}{1-s}$ convient.

3. Notons que $B(1) \neq 0$ presque sûrement. Ainsi, p.s., $X(t) = \frac{B(t)^2}{1-t} \to +\infty$ quand $t \nearrow 1$, et $\ln M(t) \sim \dfrac{-aB(1)^2}{2(1-t)} - \dfrac{1}{2}\ln(1-t) \to -\infty$, soit finalement $M(t) \to 0$.

   Par ailleurs, en notant $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable gaussienne,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M(t)^r &= (1-t)^{-r/2}\mathbb{E}\exp\left\{-\frac{art}{2(1-t)}\xi^2\right\} \\ &= (1-t)^{-r/2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{art}{1-t}}} \\ &= (1-t)^{-(r-1)/2}\frac{1}{\sqrt{1+(ar-1)t}}. \end{aligned}$$

   Lorsque $t \nearrow 1$, $\|M(t)^r\|_1 \to 0$ si et seulement si $r < 1$.

Problème

1. Pour tout ω, l'intégrale définissant ξ est l'intégrale d'une fonction Lebesgue-intégrable. En revanche, η est une intégrale stochastique de Itô avec intégrant dans M^2, elle définie presque sûrement. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\xi &= \mathbb{E}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_1(s)=X_2(s)\}} ds \\ &= \int_0^t \mathbb{P}((X_1 - X_2)(s)) ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $(X_1 - X_2)(s) \sim \mathcal{N}(0, s)$. Comme $\xi \geq 0$, on a $\xi = 0$ p.s.. Par ailleurs, en utilisant la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\eta^2 &= \mathbb{E}\int_0^t \mathbf{1}^2_{\{X_1(s)=X_2(s)\}} ds \\ &= \mathbb{E}\,\xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\eta = 0$ p.s.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^2$, définissons $\theta(s) = (\theta_1(s), \theta_2(s))$ par

$$\begin{cases} \theta_1(s) = \alpha_1 \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} + \alpha_2 \mathbf{1}_{\{X_2(s)\leq X_1(s)\}} \\ \theta_2(s) = \alpha_2 \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} + \alpha_1 \mathbf{1}_{\{X_2(s)\leq X_1(s)\}} \end{cases}$$

et notons que

$$\|\theta(s)\|^2 = \|\alpha\|^2$$

est une constante finie. L'intégrale stochastique $\alpha \cdot \beta(t) = \int_0^t \theta(s)dX(s)$ est une martingale de crochet $\int_0^t \theta(s)^2 ds = \|\alpha\|^2 t$, et l'exponentielle de Girsanov

$$\exp\{\int_0^t \theta(s)dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds\} = \exp\{\alpha \cdot \beta(t) - \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 t\}$$

est une martingale d'espérance 1, en fait une $\mathcal{F}$-martingale. Cela entraine que $\beta(\cdot)$ a les mêmes lois marginales fini-dimensionnelles que $B(\cdot)$. Le processus β étant à trajectoire continues, c'est donc un mouvement Brownien, et même un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien.

3. Posant $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $\delta \cdot \beta(t)$ est un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien de variance $\|\delta\|^2 t$, et

$$Z(t) = \exp\{\delta \cdot \beta(t) - \frac{1}{2}\|\delta\|^2 t\}$$

est sa martingale exponentielle, elle a pour espérance 1.

4. D'après le théorème de Girsanov, le processus W,

$$W(t) = \beta(t) - \int_0^t \delta ds = \beta(t) - \delta t$$

est un $\mathcal{F}$-mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$. Puisque

$$\beta(t) = W(t) + \delta t,$$

on voit que sous $\mathbb{Q}$, β est un mouvement Brownien vectoriel de dérive δ, et donc ses coordonnées W_1 et W_2 sont indépendates, ce sont des mouvements Browniens réels indépendants de dérives respectives δ_1, δ_2.

En répétant les arguments de la question 2), on voit que B est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

5. Des définitions (4) on tire

$$\begin{cases} dX_1(s) = \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} d\beta_1(s) + \mathbf{1}_{\{X_2(s)\le X_1(s)\}} d\beta_2(s) \\ dX_2(s) = \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} d\beta_2(s) + \mathbf{1}_{\{X_2(s)\le X_1(s)\}} d\beta_1(s) \end{cases}$$

En remplaçant $\beta(t)$ par $W(t) + \delta t$, on obtient

$$\begin{cases} dX_1(s) = \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} (dW_1(s) + \delta_1 ds) + \mathbf{1}_{\{X_2(s)\le X_1(s)\}} (dW_2(s) + \delta_2 ds) \\ dX_2(s) = \mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} (dW_1(s) + \delta_1 ds) + \mathbf{1}_{\{X_2(s)\le X_1(s)\}} (dW_2(s) + \delta_2 ds) \end{cases}$$

ce qui, compte-tenu de la définition de B, s'écrit

$$\begin{cases} dX_1(s) = dB_1(s) + \left(\mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} \delta_1 + \mathbf{1}_{\{X_2(s)\le X_1(s)\}} \delta_2\right) ds \\ dX_2(s) = dB_2(s) + \left(\mathbf{1}_{\{X_1(s)<X_2(s)\}} \delta_2 + \mathbf{1}_{\{X_2(s)\le X_1(s)\}} \delta_1\right) ds \end{cases}$$

Interprétons ce système différentiel stochastique conduit par le mouvement Brownien B sous la loi $\mathbb{Q}$.

Le couple (X_1, X_2) est sous la loi $\mathbb{Q}$ une diffusion de coefficient de diffusion la matrice identité (carrée à deux dimensions) et avec une dérive discontinue, dont la valeur dépend de l'ordre dans lequel sont rangées les deux coordonnées: la plus petite des deux coordonnées subit un drift δ_1, la plus grande un drift δ_2. Les deux coordonnées sont des diffusions qui interagissent par leur rang respectif.

Si $\delta_1 - \delta_2 > 0$, celle qui est en retard a tendance à avancer plus vite, et malgré l'agitation stochastique, va finir par rattrapper l'autre. Quand elle l'aura doublé, elle ralentira et c'est l'autre qui avancera plus vite. Elles se doubleront indéfiniment. Voyant X_1 et X_2 comme la positions de deux particules, on conclut dans ce cas que les deux particules restent ensemble tout le temps, au sens où leur écart se stabilise.

En revanche, si $\delta_1 - \delta_2 < 0$, celle qui est en avance a tendance à avancer plus vite que l'autre. Les fluctuations stochastiques peuvent faire qu'elles se rejoignent quand même, mais avec probabilité strictement inférieure à 1. Cela finira par ne plus se produire, et alors l'écart entre les deux augmentera indéfiniment.

Remarque: Vous pouvez aussi penser à X comme la valeur de deux actifs financiers en compétition sur un même marché. Le signe, négatif ou positif, de $\delta_1 - \delta_2$ détermine l'émergence d'une superpuissance qui domine le marché ou au contraire d'un équilibre délicat sous lequel le marché s'équilibre. Je vous laisse développer cette interprétation.