Université Denis Diderot Paris 7

Martingale exponentielle

Rappelons le cadre de l'exercice, et son objectif.
Dans la suite, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Par ailleurs, $(H_t)_{t\geq 0}$ désigne un processus progressivement mesurable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < +\infty.$$

Pour tout $t \geq 0$, nous posons

$$M_t(H) = \exp\left(\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right).$$

L'objectif [1] de l'exercice est de déterminer que la condition $(\star)$ ci-dessous est suffisante pour que le processus $(M_t(H))_{t\geq 0}$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Remarque 0.1. *Le résultat reste vrai sous la condition plus fine obtenue par Novikov :*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

Rappelons l'hypothèse du premier exercice

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \ \forall t \geq 0.\ \mathbb{E}\left[\exp\left((1+\varepsilon)\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] < +\infty. \tag{$\star$}$$

1 Première étape : le cas des processus simples, bornés

Dans cette partie on suppose que H est un processus simple, borné, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p$, et, pour $i = 0, \ldots, p-1$, une variable aléatoire H_i qui est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, tels que

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_i(\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s).$$

Pour commencer on fera l'hypothèse suivante

$$\exists K \geq 0 :\ \forall i \leq p-1,\ \mathbb{P}(|H_i| > K) = 0. \tag{1}$$

1. On ne suivra pas précisément les questions de l'exercice, on se contente d'adopter un cheminement naturel pour obtenir le résultat final que $M_t(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Si le lecteur le souhaite, il lui sera ensuite facile d'utiliser ces éléments de preuve pour répondre précisément à chaque question.

Par définition, l'intégrale stochastique d'un tel processus est explicite :

$$\int_0^t H_s dB_s = \sum_{i=0}^{p-1} H_i (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t H_s dB_s\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{p-1} \exp\left(H_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{p-1} \exp\left(H_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})\right) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{p-2} \exp\left(H_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(H_{p-1}(B_{t_p\wedge t} - B_{t_{p-1}\wedge t})\right) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}\right]\right],
\end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on a utilisé la $\mathcal{F}_{t_{p-1}}$-mesurabilité des variables H_i, $(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})$, $i \le p-2$. De plus, comme $H_{t_{p-1}}$ est $\mathcal{F}_{t_{p-1}}$-mesurable, et $(B_{t_p\wedge t} - B_{t_{p-1}\wedge t})$ est indépendante de $\mathcal{F}_{t_{p-1}}$ on peut utiliser l'exercice IV.1 de la feuille 1 pour calculer

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(H_{p-1}(B_{t_p\wedge t} - B_{t_{p-1}\wedge t})\right) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}\right] = \phi(H_{t_{p-1}}), \tag{2}$$

avec

$$\phi(x) := \mathbb{E}\left[\exp\left(x(B_{t_p\wedge t} - B_{t_{p-1}\wedge t})\right)\right] = \exp\left(\frac{x^2}{2}\left(t_p \wedge t - t_{p-1} \wedge t\right)\right).$$

Sous l'hypothèse (1), il va de soi que

$$\phi(H_{p-1}) \le \exp\left(\frac{K^2}{2}(t_p \wedge t - t_{p-1} \wedge t)\right),$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t H_s dB_s\right)\right] \le \exp\left(\frac{K^2}{2}(t_p \wedge t - t_{p-1} \wedge t)\right) \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{p-2} \exp\left(H_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})\right)\right].$$

Par un raisonnement identique en tout point, on poursuit ensuite le calcul en conditionnant successivement à $\mathcal{F}_{t_{p-2}}, \mathcal{F}_{t_{p-3}}, \ldots, \mathcal{F}_{t_0}$ pour obtenir l'inégalité souhaitée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t H_s dB_s\right)\right] &\le \prod_{i=0}^{p-1} \exp\left(\frac{K^2}{2}(t_{i+1} \wedge t - t_i \wedge t)\right) \\
&= \exp\left(\frac{K^2}{2} t\right).
\end{aligned}$$

Notons que si $a > 0$, en appliquant l'inégalité ci-dessus au processus aH, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t aH_s dB_s\right)\right] \quad \leq \quad \exp\left(\frac{a^2K^2}{2}t\right). \tag{3}$$

Fixons désormais $0 \leq s < t$, et Z une variable intégrable, $\mathcal{F}_s$-mesurable. On souhaite calculer

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(\int_s^t H_r dB_r - \frac{1}{2}\int_s^t H_r^2 dr\right)\right].$$

Afin de ne pas trop surcharger les formules on introduit pour $i = 0, ..., p$, $r_i := (t_i \wedge t) \vee s$, de sorte que

$$\int_s^t H_r dB_r - \frac{1}{2}\int_s^t H_r^2 dr = \sum_{i=k}^{p-1} H_i(B_{r_{i+1}} - B_{r_i}) - \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{p-1} H_i^2(r_{i+1} - r_i)$$

où, s'il existe, k est le plus grand entier tel que $t_k \leq s$, et par convention, s'il est égal à p, les sommes ci-dessus sont égales à 0 (notons que pour tout $i \leq k$, $r_i = s$).
Pour calculer l'espérance ci-dessus, on fait comme précedemment un raisonnement par conditionnements successifs vis-à-vis des tribus de plus en plus grossières $\mathcal{F}_{t_{p-1}}, ...\mathcal{F}_{t_k}, \mathcal{F}_s$ où, s'il existe, k est le plus petit entier tel que $t_k > s$. Détaillons le premier conditionnement

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[Z\prod_{i=k}^{p-1}\exp\left(H_i(B_{r_{i+1}} - B_{r_i}) - \frac{1}{2}H_i^2(r_{i+1} - r_i)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z\prod_{i=k}^{p-1}\exp\left(H_i(B_{r_{i+1}} - B_{r_i}) - \frac{1}{2}H_i^2(r_{i+1} - r_i)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z\prod_{i=k}^{p-2}\exp\left(H_i(B_{r_{i+1}} - B_{r_i}) - \frac{1}{2}H_i^2(r_{i+1} - r_i)\right)\mathbb{E}[\exp\left(H_i(B_{r_p} - B_{r_{p-1}}) - \frac{1}{2}H_i^2(r_p - r_{p-1})\right) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}]\right].
\end{aligned}$$

D'après (2), l'espérance conditionnelle ci-dessus est égale à 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[Z\prod_{i=k}^{p-1}\exp\left(H_i(B_{r_{i+1}} - B_{r_i}) - \frac{1}{2}H_i^2(r_{i+1} - r_i)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z\prod_{i=k}^{p-2}\exp\left(H_i(B_{r_{i+1}} - B_{r_i}) - \frac{1}{2}H_i^2(r_{i+1} - r_i)\right)\right]
\end{aligned}$$

et, après $p - 1 - k$ conditionnements supplémentaires, on trouve finalement que

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(\int_s^t H_r dB_r - \frac{1}{2}\int_s^t H_r^2 dr\right)\right] = \mathbb{E}[Z].$$

On vient de montrer que si H est un processus simple satisfaisant (1), alors $(M_t(H))_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

2 Deuxième étape : $H \in M^2$, borné

On fixe dans cette partie $H \in M^2$, et on suppose que (1) est satisfaite.
On sait qu'il existe une suite (H^n) de processus simples, vérifiant également (1), qui converge vers H au sens $\mathbb{L}^2$.
Fixons $t > 0$. Quitte à extraire, on peut même supposer que $M_t(H^n) \to M_t(H)$ presque sûrement.

Soit $\eta > 0$ et $t \geq 0$. De l'inégalité (3), on déduit en particulier que $(M_t(H^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{L}^{2+2\eta}$ (par $\exp(((1+\eta))K^2T)$).
Si $Z \in \mathbb{L}^{2+2\eta}$ est, comme plus haut, $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a donc que $(ZM_t(H^n))_n$ est bornée dans $\mathbb{L}^{1+\eta}$ (en utilisant Cauchy-Schwarz), et est donc uniformément intégrable. On a finalement

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[ZM_t(H^n)] \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[ZM_t(H)].$$

On a établi en particulier l'égalité [2] pour $Z = \mathbf{1}_A, A \in \mathcal{F}_s$, et on l'a fait pour tout $t \geq 0$. On conclut que $M_t(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Grâce à la décomposition suggérée dans la question (3), on a enfin que pour un tel processus H, et pour $p > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left((1+p)\int_0^t H_s dB_s - \frac{1+p}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left((1+p)\int_0^t H_s dB_s - \frac{(1+p)^3}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\exp\left(\frac{1}{2}((1+p)^3-(1+p))\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left((1+p)^2\int_0^t H_s dB_s - \frac{(1+p)^4}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]^{\frac{1}{1+p}} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}((p+2)(1+p)^2)\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]^{\frac{p}{1+p}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder d'exposants $1+p, (1+p)/p$. Le premier terme du produit n'est autre que $\mathbb{E}[M_t((1+p)^2 H)]$ et vaut donc 1 d'après ce qui précède.
Pour conclure cette partie, on a finalement obtenu que lorsque $H \in M^2$ satisfait (1), $M_t(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, et pour $p > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left((1+p)\int_0^t H_s dB_s - \frac{1+p}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}((p+2)(1+p)^2)\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]^{\frac{p}{1+p}}.$$

2. Il serait facile d'utiliser un argument de classe monotone pour déduire que l'égalité reste vraie pour tout Z intégrable et $\mathcal{F}_s$-mesurable.

3 Troisième étape : H vérifiant ($\star$)

Dans cette partie on fixe $H \in M^2$ vérifiant ($\star$). Il va de soi que le processus H^K défini par

$$\forall t \geq 0 \quad H_t^K(\omega) := \begin{cases} -K & \text{si } H_t(\omega) < -K \\ H_t(\omega) & \text{si } |H_t(\omega)| < K \\ K & \text{si } H_t(\omega) > K \end{cases}$$

vérifie quant à lui (1), et bien sûr $H^K \to H$ dans $\mathbb{L}^2$.
De plus on a évidemment pour tout $K > 0$, et pour tout $t \leq T$,

$$\int (H_s^K)^2 ds \leq \int H_s^2 ds.$$

Choisissons $p > 0$ suffisamment petit de sorte que $\frac{(2+p)(1+p)^2}{2} \leq 1 + \epsilon$ (où $\epsilon > 0$ est le paramètre qui intervient dans ($\star$)).
D'après l'inégalité finale de la partie 3, la famille $(M_t(H^K))_{K>0}$ est bornée dans $\mathbb{L}^{1+p}$ par

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}((p+2)(1+p)^2)\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]^{\frac{p}{1+p}} \leq \mathbb{E}\left[\exp\left((1+\epsilon)\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]^{\frac{p}{1+p}}$$

la dernière quantité étant finie grâce à l'hypothèse ($\star$).
On en déduit que la famille $(M_t(H^K))_{K>0}$ est uniformément intégrable, et donc que pour $A \in \mathcal{F}_s$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A M_t(H^K)] \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A M_t(H)].$$

Le raisonnement étant valable pour tout $t \geq 0$ on conclut que $(M_t(H))_{t\geq 0}$ est bien une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

4 Compléments, remarques

Cette méthode n'est pas la seule possible. On fournit ici quelques compléments pour des idées de preuves possibles.

4.1 $(M_t(H))$ Surmartingale

Supposons acquis les résultats de la première partie et considérons $H^n \to H \in M^2$, avec H^n des processus simples, et enfin supposons que H^n, H vérifient tous (1).
Il est alors immédiat de montrer que $(M_t(H))$ est une *surmartingale* :

$$M_s(H) = \lim_{n\to\infty} M_s(H^n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_t(H^n) \mid \mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}[M_t(H) \mid \mathcal{F}_s],$$

où on a utilisé Fatou pour obtenir la dernière inégalité.
La méthode est à retenir, c'est en effet avec une idée similaire qu'on établit qu'une martingale locale est toujours une surmartingale.

4.2 Bornes $\mathbb{L}^p$ explicites immédiates pour $M_t(H)$ lorsque $H \in M^2$ est borné

Fixons $p > 0$. En utilisant Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(p\int_0^t H_s dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(p\int_0^t H_s dB_s - p^2\int_0^t H_s^2 ds + p^2\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t 2pH_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (2pH_s)^2 ds\right)\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\exp\left(2p^2\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]^{1/2} \leq \exp(p^2K^2t)$$

Pour la dernière ligne ci-dessus, on a utilisé que
– le premier terme du produit n'est autre que $\mathbb{E}[M_t(2H)]$, et puisque $M_t(2pH)$ est une surmartingale il est donc majoré par 1.
– Le deuxième terme du produit est, d'après l'hypothèse (1), borné par $\exp(K^2t)$.
On peut affiner ces estimées en utilisant une inégalité de Hölder adéquate comme dans la partie 3 ci-dessus, mais l'inégalité ci-dessus est souvent suffisante pour établir des résultats simples.

4.3 Une condition plus proche de Novikov

L'exerice 12 de la feuille 4 permet de démontrer que la condition plus fine

$$\exists \varepsilon > 0,\ \ \forall t \geq 0\ \ \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] < +\infty, \qquad (\star\star)$$

est également suffisante pour que $(M_t(H))$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.
La preuve est plus technique, mais elle ne contient pas vraiment d'idée nouvelle. On fait en effet la même approximation par la suite de processus H^K, mais on optimise un peu mieux l'utilisation de l'inégalité de Hölder. Les détails sont laissés au lecteur, l'exercice 12 étant suffisamment guidé.