Université Paris 7 - M2 Modélisation Aléatoire

TRAVAUX DIRIGÉS

RAPPELS DE PROBABILITÉS

1. Théorème de la Classe Monotone & Applications

Étant donné un ensemble Ω, on appelle classe monotone une classe $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

(1) $\Omega \in \mathcal{M}$,

(2) $(A, B) \in \mathcal{M}^2,\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$,

(3) $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq 0, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{M}$.

Il est facile de vérifier que l'intersection d'une famille de classes monotones est encore une classe monotone, de sorte que, pour une collection $\mathcal{C}$ de parties de Ω, il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$. On la notera $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.

On appelle π-système une classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie :

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}.$$

On rappelle le théorème suivant, dit de la classe monotone :

Théorème 1.1. *Si $\mathcal{C}$ est un π-système, alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Preuve du théorème.

Exercice 1. (1) Montrer qu'une collection $\mathcal{F}$ de parties de Ω est une tribu *ssi* c'est à la fois un π-système et une classe monotone.

(2) Soit $\mathcal{C}$ un π-système, et

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) : \forall C \in \mathcal{C}, A \cap C \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

Comparer $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{M}(C)$.

De même, comparer $\mathcal{M}(C)$ avec

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) : \forall C \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), A \cap C \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

(3) Déduire de la question précédente que si $\mathcal{C}$ est un π-système, alors $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est également un π-système. Conclure.

Applications.

Exercice 2. *(Egalité de lois)*
Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux mesures de probabilité sur un espace mesurable donné $(\Omega, \mathcal{A})$.

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M} = \big\{A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\big\}$ est une classe monotone.

(2) En déduire que si $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ coïncident sur un π-système qui engendre $\mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

(3) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{Y \leq x\}.$$

Montrer que X et Y ont même loi.

Exercice 3. *(Critère d'indépendance)*

(1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ n π-systèmes inclus dans $\mathcal{A}$ et contenant tous l'élément Ω. Montrer que les sous-tribus $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall C_i \in \mathcal{C}_i,\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n C_i\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i).$$

Indication. On pourra introduire la classe :

$$\mathcal{D}_1 = \Big\{ B \in \mathcal{A},\ \forall (C_2, \ldots, C_n) \in \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n,\ \mathbb{P}\Big(B \cap \Big(\bigcap_{i=2}^n C_i\Big)\Big) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=2}^n C_i\Big)\Big\},$$

puis des classes $\mathcal{D}_2,\ \mathcal{D}_3 \ldots$ judicieusement choisies.

(2) Soit $(\mathcal{C}_i, i \in I)$ une classe quelconque de π-systèmes inclus dans $\mathcal{A}$ et contenant tous l'élément Ω. Montrer que les sous-tribus $\sigma(\mathcal{C}_i), i \in I$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall \{i_1, ..., i_p\} \subset I,\ \forall C_{i_j} \in \mathcal{C}_{i_j}, j \in \{1, ..., p\}\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^p C_{i_j}\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(C_{i_j}).$$

Exercice 4. *(Comparaison de deux variables aléatoires)*

(1) Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on suppose qu'il existe un π-système $\mathcal{C}$ engendrant $\mathcal{A}$ et contenant Ω, ainsi que deux v.a.r. intégrables X et Y tels que

$$\forall A \in \mathcal{C},\ \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A X\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A Y\big].$$

Montrer que $\mathbb{P}\{X = Y\} = 1$.

(2) Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un π-système $\mathcal{C}$ engendrant $\mathcal{A}$ et contenant Ω, ainsi que deux v.a. intégrables X et Y tels que

$$\forall A \in \mathcal{C},\ \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] \text{ et } \mathbb{P}\{X \leq Y\} < 1.$$

(3) Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une algèbre $\mathcal{C}$ engendrant $\mathcal{A}$, montrer que

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathcal{C},\ \mathbb{P}(A \Delta B) < \varepsilon,$$

où $A \Delta B$ désigne la différence symétrique de A et B, i.e. $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Supposons maintenant qu'il existe deux variables aléatoires intégrables X et Y telles que

$$\forall A \in \mathcal{C},\ \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y].$$

Montrer que $\mathbb{P}\{X \leq Y\} = 1$.

Exercice 5. Sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère $(X_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de variables aléatoires et Z une variable aléatoire bornée. Par ailleurs soit $i_0 \in I$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbb{E}[Z \mid (X_i)_{i \in I}] = \mathbb{E}[Z \mid X_{i_0}]$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, ..., i_p\} \in I$ on a

$$\mathbb{E}[Z \mid X_{i_0}, X_{i_1}, ..., X_{i_p}] = \mathbb{E}[Z \mid X_{i_0}].$$

On pourra considérer la classe

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[Z \mid X_{i_0}]]\}.$$

Théorèmes de classe monotone fonctionnels Le théorème de classe monotone possède des versions en termes de fonctions plutôt que d'ensembles. Quitte à passer des ensembles aux fonctions indicatrices d'ensembles, on obtient tout d'abord une traduction presque immédiate.

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, mesurables et bornées tel que*
- $\mathbf{1} \in \mathcal{H}$
- *$\mathcal{H}$ est un espace vectoriel*
- *Si $(f_n) \in (\mathcal{H})^{\mathbb{N}}$ est une suite* croissante *de fonctions* positives *convergeant vers $f \in \mathcal{H}$* bornée, *alors $f \in \mathcal{H}$.*

Si par ailleurs $\mathcal{C}$ est un π-système tel que $\forall C \in \mathcal{C}$, $\mathbf{1}_C \in \mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ contient en fait toute fonction $\sigma(\mathcal{C})$-mesurable, bornée.

Il existe une version un peu plus sophistiquée, parfois très utile.

Théorème 1.3. *Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, et $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ stable par multiplication. Alors $\mathcal{H}$ contient en fait toute fonction bornée, $\sigma(\mathcal{K})$-mesurable.*

On rappelle que
$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma\left(f^{-1}(B), f \in \mathcal{K}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right).$$
L'exercice IV.6 de cette feuille fournit un exemple d'application du théorème 1.3.

2. Convergences

Exercice 1. Rappeler les définitions des convergences en distribution, en probabilité, dans $\mathbb{L}^p$, presque sûre. Tracer le diagramme résumant les implications entre les différentes formes de convergence. Enfin, pour assurer l'invalidité de chacune des implications réciproques, exhiber des contre-exemples simples.

Exercice 2. *(Slutsky)* On suppose que les suites de variables réelles (X_n), resp. (Y_n) convergent en loi vers les variables X, resp. Y.
Lorsque pour un réel c, $\mathbb{P}(Y = c) = 1$, que peut-on dire des suites $((X_n, Y_n))_n$, $(X_n+Y_n)_n$, $(X_nY_n)_n$? Que peut-on dire de ces suites dans le cas général ?

Exercice 3. Étant données une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ convergeant en probabilité vers une v.a.r. X, et une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans lui-même, montrer que $(f(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $f(X)$. On commencera par montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel K, tel que $\mathbb{P}\{|X_n| \geq K\} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4. Étant donnée une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ convergeant en probabilité vers une v.a.r. X, montrer qu'il est possible d'extraire une sous-suite $(n_p)_{p\geq 1}$ telle que $(X_{n_p})_{p\geq 1}$ converge presque-sûrement vers X.

On suppose la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ dominée par une v.a. intégrable. Montrer que $X_n \to X$ également dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 5. *(Uniforme Intégrabilité)* Une famille $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de v.a.r. est dite uniformément intégrable (U.I. en abrégé, on dit également équiintégrable) si :

(a) $\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}(|U_i|) < +\infty$,

(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|U_i|) < \varepsilon$.

(1) Montrer que $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est U.I. si et seulement si :
$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{|U_i|>a\}}|U_i|\right] = 0.$$

(2) (Quelques exemples) Montrer que toute v.a.r. intégrable constitue à elle seule une famille U.I. Montrer que toute famille $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ dominée par une v.a.r positive intégrable Y (i.e. $\forall i \in \mathcal{I},\ |U_i| \leq Y$) est U.I. Montrer que toute famille $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ bornée dans $L^{1+\alpha}(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ pour un certain $\alpha > 0$ est U.I.

(3) Étant donnée une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de v.a.r convergeant en probabilité vers une v.a.r U, on suppose que la famille $(|U_n|^p)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable pour un certain $p \geq 1$. Montrer que $U \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, puis que la convergence a lieu dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Retrouver en particulier le théorème de convergence dominée.

3. Variables et vecteurs Gaussiens

Exercice 1. (1) Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}[\exp(tX)], t \in \mathbb{C}$.

(2) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[X^n]$.

(3) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp(-x^2/2).$$

Exercice 2. Rappeler la définition de vecteur gaussien.
On considère ici $X = (X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)$ un vecteur gaussien.

(1) Exprimer la fonction caractéristique de X.

(2) On suppose dans cette question que $\det(\Sigma) = 0$. Déterminer le sous-espace $K \subset \mathbb{R}^n$ de dimension minimale tel que $\mathbb{P}(X \in K) = 1$.

(3) On suppose dans cette question que $\det(\Sigma) \neq 0$. Retrouver la densité jointe de X.

Exercice 3. Etant donnée une suite de v.a. gaussiennes $(X_n)_{n\geq 1}$, on désigne, pour tout $n \geq 1$, $m_n = \mathbb{E}(X_n)$ et $\sigma_n^2 = \mathbb{V}(X_n)$.

(1) On suppose que les suites $(m_n)_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ sont convergentes. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. gaussienne dont on précisera la moyenne et la variance.

(2) On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. X. Montrer que X est elle-même gaussienne et que les suites des moyennes et des variances sont convergentes.

Exercice 4. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. gaussiennes convergeant en probabilité vers une v.a.r. X.

(1) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la famille $(|X_n|^p)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) En conclure que la convergence de (X_n) vers X a également lieu dans tout $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, $p \geq 1$.

Exercice 5. Etant donnée une suite de vecteurs gaussiens $(X_n)_{n\geq 1}$ de dimension d convergeant en loi vers un vecteur X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, montrer que X est lui-même gaussien. Quelles sont la moyenne et la matrice de covariance de X ?

Exercice 6. On considère une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ de v.a.r. vérifiant la propriété suivante : pour tout $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$ est un vecteur gaussien (une telle famille est appelée processus gaussien). On désigne alors par $\mathcal{H}$ le sous-espace de Hilbert de $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ donné par :

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Vect}\{X_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}}^{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}.$$

(1) On considère $Z \in \mathcal{H}$. Montrer que Z suit une loi gaussienne.

(2) En déduire que tout vecteur aléatoire composé d'éléments de $\mathcal{H}$ forme un vecteur gaussien.

4. Espérance Conditionnelle

Exercice 1. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle.

Exercice 2. Rappelons la définition de variance conditionnelle :

$$\mathrm{var}[X \mid \mathcal{F}] := \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}] - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]^2.$$

Montrer que

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X \mid \mathcal{F}]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]].$$

Exercice 3.

(1) On suppose que X et Y sont des variables réelles, de carré intégrable, vérifiant

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = Y, \qquad \mathbb{E}[Y \mid X] = X.$$

Que peut-on conclure ?

(2) Peut-on étendre le résultat lorsque X et Y sont seulement supposées intégrables ?

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables réelles i.i.d, intégrables, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(1) Trouver $\mathbb{E}[X_1 \mid X_2], \mathbb{E}[S_n \mid X_1], \mathbb{E}[S_n \mid S_{n-1}]$.

(2) Montrer que si (X, Z), (Y, Z) ont la même loi jointe, alors pour tout fonction f positive et mesurable (et pour laquelle les espérances ci-dessous sont bien définies), on a

$$\mathbb{E}[f(X) \mid Z] = \mathbb{E}[f(Y) \mid Z].$$

En déduire $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n]$.

Exercice 5. *(Cas d'indépendance)*
Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, X un v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, Y un v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}$ une application borélienne bornée. On suppose que X est $\mathcal{B}$-mesurable et que Y est indépendante de $\mathcal{B}$.

Montrer l'égalité :

$$\mathbb{P}\text{−p.s.},\ \mathbb{E}\big[f(X, Y)|\mathcal{B}\big] = \phi(X),$$

où l'application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \phi(x) = \mathbb{E}[f(x, Y)].$$

Exercice 6. *(Caractérisations de l'indépendance.)*
Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une v.a.r. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i): La v.a.r. X est indépendante de $\mathcal{B}$.

(ii): Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, on a

$$\mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[f(X)].$$

(iii): Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[\exp(itX) \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[\exp(itX)].$$

Exercice 7. *(Marche aléatoire gaussienne.)*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. telle que $X_0 = 0$, on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit alors une suite $(Y_n^\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a à valeurs complexes par

$$Y_n^\lambda = \exp\left(i\lambda X_n + \frac{n\lambda^2}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i): Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(Y_n^\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

(ii): La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire gaussienne centrée réduite, i.e. il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ telle que :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 8. Soient X et Y i.i.d, $\sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z = X+Y$, $W = X-Y$.

(1) Montrer que Z et W sont indépendants. Quelle est la distribution de W ?

(2) En déduire la distribution et l'espérance conditionnelles de X sachant Z.

(3) Calculer $\mathbb{E}(XY \mid Z)$, $\mathbb{E}(XYZ \mid Z)$.

Exercice 9. *(Vecteur Gaussien et conditionnement : cas général)*
Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, M)$ tel que $X = \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \end{pmatrix}$,
$\xi \in \mathbb{R}^k, \theta \in \mathbb{R}^l$, avec $p = k+l$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_\theta \\ \mu_\xi \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} M_{\xi\xi} & M_{\xi\theta} \\ M_{\theta\xi} & M_{\theta\theta} \end{pmatrix}$. Ci-dessus, $M_{\xi\xi}$ est une matrice $k\times k$, $M_{\theta\theta}$ une matrice $l \times l$, et $M_{\xi\theta} = M_{\theta\xi}^T$ une matrice $k \times l$.
On suppose dans tout l'exercice que $\det(M_{\xi\xi}) \neq 0$. Montrer que

(i): Presque sûrement

$$\mathbb{E}(\theta|\xi) = \mu_\theta + M_{\theta\xi} M_{\xi\xi}^{-1}(\xi - \mu_\xi),$$
$$V(\theta \mid \xi) = M_{\theta\theta} - M_{\theta\xi} M_{\xi\xi}^{-1} M_{\xi\theta}.$$

(ii): La loi conditionnelle de θ sachant ξ est gaussienne
$\mathcal{N}(\mu_\theta + M_{\theta\xi}M_{\xi\xi}^{-1}(\xi-\mu_\xi), M_{\theta\theta} - M_{\theta\xi}M_{\xi\xi}^{-1}M_{\xi\theta})$.

(iii): Les vecteurs aléatoires ξ, $\theta - M_{\theta\xi}M_{\xi\xi}^{-1}\xi$ sont indépendants.

5. Martingales

Exercice 1. Rappeler (sans les démontrer) les énoncés ou définitions suivants :

(1) la définition de (sur/sous)-martingale.

(2) la définition de processus prévisible.

(3) la définition du processus $C \bullet M$, où C est prévisible et borné, et M est une martingale.

(4) le lemme de décomposition de Doob.

(5) la définition du crochet d'une martingale de carré intégrable.

(6) la définition de temps d'arrêt, de martingale arrêtée.

(7) le(s) théorème(s) d'arrêt pour une martingale.

(8) Le théorème de convergence des surmartingales.

(9) l'inégalité $\mathbb{L}^1$ de Doob pour une (sous-)martingale positive.

(10) l'inégalité $\mathbb{L}^p$ $(p>1)$ de Doob pour une (sous-)martingale positive.

Exercice 2. *(Qqs preuves dans un cadre simple : le cas d'une martingale bornée dans L^2)*
Soit Y une martingale de carré intégrable, que l'on supposera issue de 0.

(1) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

(i): Y est bornée dans $\mathbb{L}^2$.

(ii): $\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}[(Y_{k+1} - Y_k)^2] < \infty$.

(iii): $\mathbb{E}[\langle Y\rangle_\infty] < \infty$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que ces trois conditions sont vérifiées.

(2) Commencer par montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{E}[(Y_{n+p} - Y_n)^2] = \mathbb{E}[Y_{n+p}^2] - \mathbb{E}[Y_n^2].$$

En déduire que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, donc convergente, dans $\mathbb{L}^2$.

D'autre part, est-on en mesure d'appliquer le théorème de convergence ?

Que peut-on finalement conclure ?

(3) On aurait pu ici se passer de l'utilisation du théorème de convergence : montrer que l'inégalité $\mathbb{L}^2$ de Doob permet de déduire la convergence presque sûre de $(Y_n)_{n\geq 1}$ de sa convergence $\mathbb{L}^2$.

(4) Dans cette question on cherche finalement une preuve qui ne fait intervenir que des arguments élémentaires (on ne se servira ni du théorème de convergence, ni de l'inégalité $\mathbb{L}^2$).

Pour $\varepsilon > 0$ et n, p fixés, on pose pour $1 \leq k \leq p$

$$E_k = \{|Y_{n+k} - Y_n| > \varepsilon\} \bigcap \bigcap_{i=1}^{k-1} \{|Y_{n+i} - Y_n| \leq \varepsilon\}.$$

de sorte que la famille $(E_k)_{1\leq k\leq p}$ réalise une partition de

$$E = \{\sup_{1\leq k\leq p} |Y_{n+k} - Y_n| > \varepsilon\}.$$

Montrer que

$$\mathbb{E}[|Y_{n+p} - Y_n|\mathbf{1}_{E_k}] \geq \mathbb{E}[|Y_{n+k} - Y_n|\mathbf{1}_{E_k}] \geq \varepsilon\mathbb{P}(E_k)$$

et en déduire

$$\mathbb{P}(E) \leq \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\big[|Y_{n+p} - Y_n|\big].$$

Conclure que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers Y_∞.

6. Marches aléatoires

Exercice 1. *(Culture générale)* On considère ici $d \in \mathbb{N}^*$, et des variables $X_i, i \geq 1$ i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et enfin $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Si vous suivez le cours sur les chaînes de Markov, vous considérerez également le cadre des marches aléatoires sur des graphes.

(1) Rappeler les propriétés de Markov et Markov forte.

(2) Donner un exemple de marche aléatoire récurrente positive.

(3) Donner un exemple de marche aléatoire récurrente nulle.

(4) Donner un exemple de marche aléatoire transiente.

(5) Pour une marche sur $\mathbb{R}$, quelles sont les valeurs possibles de $\limsup_{n\to\infty} S_n, \liminf_{n\to\infty} S_n$?

(6) Sauriez-vous rappeler, pour la marche simple sur $\mathbb{Z}$:
   - le principe de réflexion ?
   - le théorème du scrutin ?
   - la loi de l'arcsinus pour le dernier passage en 0 ? la loi de l'arcsinus pour le temps passé à droite de l'origine ?

Pour plus de détails on pourra par exemple consulter le chapitre 3 de [1], ou encore [2], pp.71 et suivantes.

Exercice 2. *(Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.)*
On fixe $p \in (0,1)$, on considère $\{X_i, i \geq 1\}$ des variables i.i.d avec

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p,$$

et toujours,

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(1) Que vaut $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \in [na, nb])$? On distinguera la réponse suivant les valeurs de a et b.

(2) Dans cette question on suppose que $p = 1/2$, et on fixe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p$. Déterminer la limite en loi, lorsque $n \to \infty$, de

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, \ldots, S_{\lfloor nt_p \rfloor} - S_{\lfloor nt_{p-1} \rfloor} \right).$$

(3) Dans cette question on suppose que $p = 1/3$, et on note $\Phi(\theta) = \frac{2}{3}e^{-\theta} + \frac{1}{3}e^{\theta}$, et enfin $\beta = \log(\Phi(\log(2)/2)) \approx -0.059$. Montrer que $\left(M_n^{(\theta)} := \exp(\theta S_n - \log(\Phi(\theta))n), n \geq 0 \right)$ est une martingale, en déduire que

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0) \leq \exp(n\beta).$$

(4) Pour $a, -b \in \mathbb{N}^*$, on considère $T_{a,b} = \inf\{n \geq 0 : S_n = a \text{ ou } S_n = b\}$.
Déterminer $\mathbb{P}(S_{T_{a,b}} = a)$.
Calculer

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda T_{a,b})], \lambda \geq 0.$$

Références

[1] R. Durrett, *Probability : Theory and Examples*, 3rd ed.

[2] G. Grimmett and D. Stirzaker, *Probability and Random Processes.*

[3] J.-F. Le Gall, *Mouvement Brownien, Calcul Stochastique et Martingales.*