Université Paris 7 - M2 Modélisation Aléatoire - Calcul Stochastique

TRAVAUX DIRIGÉS NUMÉRO 2

PROCESSUS, MOUVEMENT BROWNIEN

1. Lois fini-dimensionnelles, Continuité

Exercice 1. Est-il possible de construire un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ de carré intégrable et à trajectoires p.s. continues, tel que X_s et X_t soient indépendantes pour s et t différents ?

Exercice 2.
(1) On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues à droite (et à valeurs réelles). Montrer que l'application $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable (le produit $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est muni de la tribu produit). On pourra penser à approcher X par un processus en escalier.
(2) On suppose dans cette question qu'on a fix une filtration $(\mathcal{F}_t, t > 0$. On rappelle qu'un processus $(X_t, t \geq 0)$ est dit progressif si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Montrer que si X est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ et à trajectoires continues à droite, alors X est progressif.

Exercice 3. On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues (et à valeurs réelles).
(1) Montrer que les applications suivantes définissent des v.a. :
$$\omega \in \Omega \mapsto \sup_{0\leq t\leq 1} (X_t(\omega)),\ \omega \in \Omega \mapsto \int_0^1 X_s(\omega)ds.$$
(2) Etant donné un processus Y de même loi que X, également à trajectoires continues, montrer que $\sup_{0\leq t\leq 1} X_t$ et $\sup_{0\leq t\leq 1} Y_t$ d'une part et $\int_0^1 X_s ds$ et $\int_0^1 Y_s ds$ d'autre part ont même loi.
(3) Etant donné un processus Z, indépendant de X, également à trajectoires continues, montrer que $\sup_{0\leq t\leq 1} X_t$ et $\sup_{0\leq t\leq 1} Z_t$ d'une part et $\int_0^1 X_s ds$ et $\int_0^1 Z_s ds$ d'autre part sont indépendantes.

Exercice 4. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus gaussien de moyenne m et de fonction de covariance Γ. Montrer que X est à trajectoires continues dans $\mathbb{L}^2$ est équivalent au fait que les fonctions $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto m(t)$ et $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto \Gamma(s,t)$ sont continues.

Exercice 5. On suppose que X est un processus gaussien de moyenne m et de fonction de covariance Γ, à trajectoires continues. Montrer que le processus $(\int_0^t X_s ds)_{t\geq 0}$ est également un processus gaussien dont on pécisera les fonctions de moyenne et de covariance. Qu'obtient-on dans le cas où X est le mouvement brownien ?

Exercice 6. On suppose que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien. Pour des fonctions ϕ, ψ de $\mathbb{R}_+$ dans lui même, montrer que $(Y_t := \phi(t) + X_{\psi(t)})_{t\geq 0}$ reste un processus gaussien.
Calculer les fonctions de moyenne et de covariance de Y lorsque X est un mouvement brownien, et $\phi(t) = \sqrt{t} + t/2 - t^2 \qquad \psi(t) = 3(t - \sin(t))$

Exercice 7. On suppose que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien, à trajectoires continues. On suppose que Y est un processus indépendant de X, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Le processus $(Z_t := X_{Y_t})_{t\geq 0}$ reste-t-il nécessairement un processus gaussien ?

Exprimer le plus simplement possible les fonctions caractéristiques des lois fini-dimensionnelles du processus $(X_{Y_t})_{t\geq 0}$.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de continuité de Kolmogorov. Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus à valeurs dans un espace métrique complet (E,d), muni de la tribu borélienne $\mathcal{E}=\mathcal{B}(E)$. On fait l'hypothèse

$$(H) \qquad \exists (q,\varepsilon,C)\in(\mathbb{R}_+^*)^3 \ : \ \forall (s,t)\in[0,1]^2 \quad \mathbb{E}\left[d(X_s,X_t)^q\right]\leq C|s-t|^{1+\varepsilon}.$$

(1) On note $D=\{t\in[0,1] : t=\sum_{k=1}^p \epsilon_k 2^{-k}$, avec $\epsilon_k=0$ ou 1 $\forall k\in\{1,...,p\}\}$, et on fixe $\alpha\in]0,\varepsilon/q[$.
Montrer que l'hypothèse (H) entraîne que

$$\mathbb{P}\left(d(X_{(i-1)2^{-n}},X_{i2^{-n}})\geq 2^{-n\alpha}\right)\leq C2^{nq\alpha}2^{-n(1+\varepsilon)}.$$

(2) En déduire que

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2^n}\left\{d(X_{(i-1)2^{-n}},X_{i2^{-n}})\geq 2^{-n\alpha}\right\}\right)<\infty.$$

(3) On pose

$$K_\alpha(\omega):=\sup_{n\geq 1}\left(\sup_{1\leq i\leq 2^n}\frac{d(X_{(i-1)2^{-n}},X_{i2^{-n}})}{2^{-n\alpha}}\right).$$

Montrer que $K_\alpha(\omega)$ est fini presque sûrement, puis qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\forall (s,t)\in D \quad d(X_s,X_t)\leq CK_\alpha(\omega)|t-s|^{-\alpha}.$$

(4) En déduire le théorème de continuité de Kolmogorov : le processus X possède une modification qui est hölderienne d'exposant α pour tout $\alpha\in]0,\varepsilon/q[$.

(5) Montrer que la démonstration précédente se généralise facilement au cas où on considère $(X_t)_{t\in I}$ avec I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Que dire du cas où I est non borné ?

(6) Application : Montrer que le mouvement brownien admet une modification qui est localement hölderienne d'exposant η pour tout $\eta\in]0,1/2[$.

2. Mouvement Brownien, Transformations et propriétés trajectorielles

Exercice 9. On considère un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.
Montrer que le processus $(-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
Étant donné un réel $a>0$, montrer que le processus $(B_{a+t}-B_a)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, indépendant de $(B_t)_{0\leq t\leq a}$.
Étant donné un réel $c>0$, montrer que le processus $(cB_{c^{-2}t})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 10. Etant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on désigne sa filtration naturelle par $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(1) On définit la tribu $\mathcal{F}_{0+}=\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_\varepsilon$. Pour $\varepsilon\in]0,1[$, on pose $\mathcal{G}_\varepsilon=\sigma(B_t-B_\varepsilon,\ \varepsilon\leq t\leq 1)$.
Montrer que la tribu $\mathcal{G}_\varepsilon$ est indépendante de $\mathcal{F}_{0+}$.

(2) Montrer que $\bigcup_{0<\varepsilon<1}\mathcal{G}_\varepsilon$ est un π-système. En déduire l'indépendance des tribus $\mathcal{F}_{0+}$ et $\sigma(\bigcup_{0<\varepsilon<1}\mathcal{G}_\varepsilon)$.

(3) En déduire la loi du tout ou rien de Blumenthal : $\forall A\in\mathcal{F}_{0+},\ \mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.

Exercice 11. On considère un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.

(1) Établir que $\mathbb{P}(\forall\epsilon > 0,\ \sup_{t\in[0,\epsilon]} B_t > 0) = 1$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. $\{\sup_{t\geq 0} B_t = +\infty, \inf_{t\geq 0} B_t = -\infty\}$ (on pourra se servir de la question précédente et de la propriété de *scaling*). En déduire que $(B_t)_{t\geq 0}$ est récurrent.

Exercice 12. On désigne par $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et par $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ la famille de v.a.r. donnée par :

$$\tilde{B}_0 = 0,\ \forall t > 0,\ \tilde{B}_t = tB_{t^{-1}}.$$

(1) Démontrer que $(\tilde{B}_t)_{t>0}$ est un processus gaussien centré et de fonction de covariance $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto s \wedge t$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{t\to 0} \tilde{B}_t = 0$, et en déduire que $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ ont même loi.

Exercice 13. On appelle mouvement brownien de dimension d un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de la forme $(B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d))_{t\geq 0}$, où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq d$, sont des mouvements browniens,0 unidimensionnels, indépendants. Montrer pour un tel B et pour une matrice orthogonale U de taille d que le processus $(UB_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est encore un mouvement Brownien de dimension d.

Exercice 14. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit un processus $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ par la relation :

$$\forall t \in [0,1],\ Z_t = B_t - tB_1.$$

(1) Montrer que $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien indépendant de B_1 (appelé pont brownien). On précisera la moyenne et la covariance du processus.

(2) On définit le processus retourné en temps (par rapport au temps 1) :

$$\forall t \in [0,1],\ Y_t = Z_{1-t}.$$

Montrer que les deux processus suivent les mêmes lois fini-dimensionnelles (et sont continus).

(3) Pour $t \in [0,1[$, on pose $W_t = (1-t)B_{t/(1-t)}$. Pour $t = 1$, on pose $W_1 = 0$. Montrer que le processus est continu et admet la même loi que Z.

Exercice 15. Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et un temps d'arrêt τ (supposé fini), montrer que $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, indépendant de $(B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.

Indication. On pourra approcher τ par $\tau_n = \sum_{k\geq 0} 2^{-n}(k+1)\mathbf{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)[}(\tau)$.

Exercice 16. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel.

(1) Étant donnés deux réels $0 \leq s < t$, montrer que, presque-sûrement, la trajectoire du mouvement brownien n'est pas monotone sur $[s,t]$. En déduire que, presque-sûrement, la trajectoire n'admet aucun intervalle sur lequel elle est monotone.

(2) Etablir que, presque-sûrement, la trajectoire du mouvement brownien n'est différentiable en aucun point de $[0,+\infty[$.

On pourra par exemple déterminer les intervalles de monotonie de processus de la forme $(B_t + at)_{t\geq 0}$.

Exercice 17. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel.

(1) En utilisant la loi du 0-1 de Blumenthal, montrer que, presque-sûrement, le mouvement brownien change de signe une infinité de fois sur tout intervalle $[0,t]$, $t > 0$. On pourra considérer, pour tout $t \geq 0$, $A_t = \{\inf_{s\in[0,t]} B_s \geq 0\}$ puis $\cup_{n\geq 1} A_{n^{-1}}$.

(2) Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ suivant :

$$Z(\omega) = \{t \geq 0,\ B_t(\omega) = 0\}.$$

Montrer que, presque-sûrement, $Z(\omega)$ est un ensemble fermé, admettant 0 pour point d'accumulation et de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 18. On désigne par $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel. Étant donnée une subdivision π de l'intervalle $[0,1]$ donnée par $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$, $m \geq 1$, on désigne par $|\pi|$ le pas de la subdivision défini par $|\pi| = \max_{1\leq i\leq m} |t_i - t_{i-1}|$.

Pour une telle subdivision, on désigne par $\mathcal{V}^\pi = \sum_{i=1}^m |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|$ la variation de B le long de la subdivision π et par $\mathcal{Q}^\pi = \sum_{i=1}^m (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ la variation quadratique de B le long de π.

(1) Montrer que $\mathbb{E}[(\mathcal{Q}^\pi - 1)^2] \leq 2|\pi|$.

(2) Étant donnée une suite de subdivisions $(\pi_n)_{n\geq 1}$ dont les pas tendent vers zéro, montrer que $\mathcal{Q}^{\pi_n}$ converge dans L^2 vers 1. Montrer que la convergence a lieu au sens presque-sûr sous l'hypothèse supplémentaire $\sum_{n\geq 1} |\pi_n| < +\infty$.

(3) On suppose qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\sup_\pi \mathcal{V}^\pi(\omega)$ soit fini (le *supremum* porte sur les subdivisions de l'intervalle $[0,1]$). Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{Q}^{\pi_n}(\omega) = 0$ pour toute suite de subdivisions $(\pi_n)_{n\geq 1}$ dont le pas tend vers 0.

En déduire qu'avec probabilité 1, les trajectoires du mouvement brownien sont à variation infinie sur $[0,1]$ (plus généralement, ce résultat s'étend à tout segment, de longueur non nulle, inclus dans $[0,+\infty[$).

Retrouver le résultat de l'exercice 16 (1).