Université Paris 7 - M2 Modélisation Aléatoire - Calcul Stochastique

TRAVAUX DIRIGÉS NUMÉRO 3

TEMPS D'ARRÊTS, MARTINGALES ET TEMPS D'ATTEINTE.

Exercice 1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t), t \geq 0$. Lesquelles parmi les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$:

(1) $\inf\{t \geq 0 : B_t - t \in O\}$, où O est un ouvert de $\mathbb{R}$,

(2) $\sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$,

(3) $\inf\{t \geq 0 : \int_0^t B_s ds \geq 1\}$,

(4) $\inf\{t \geq 1 : B_t = \sup_{0\leq s\leq t} |B_s|\}$,

(5) $\inf\{t \geq 0 : B_t = B_{t+1}\}$,

(6) $\lim T_n$, où (T_n) est une suite croissante de temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$?

Exercice 2. Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et un temps d'arrêt τ (supposé fini), montrer que $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, indépendant de $(B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.

Indication. On pourra approcher τ par $\tau_n = \sum_{k\geq 0} 2^{-n}(k+1)\mathbf{1}_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)[}(\tau)$.

Exercice 3. Dans cet exercice on considère la marche simple symétrique $\{S_n = \sum_{i=1}^n X_i\}_{n\geq 0}$.

(1) Montrer qu'il existe un temps d'arrêt T_1 du mouvement brownien tel qu'en loi, $B_{T_1} = X_1$.

(2) De façon plus générale, montrer que pour tout $a > 0$ il existe T_a tel qu'en loi $B_{T_a} = aX_1$.

(3) Montrer qu'à chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut associer un temps d'arrêt T_n du mouvement brownien tel que

$$B_{T_n} \overset{\text{(loi)}}{=} S_n, \qquad \text{avec} \quad \{T_n - T_{n-1}, n \geq 1\} \quad \text{i.i.d..}$$

Que dire du comportement asymptotique de la suite $(T_n/n)_{n\geq 0}$? Et de celui de $(B_{T_n}/\sqrt{n})_{n\geq 1}$?

Exercice 4. Soit un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, issu de 0, et a un réél fixé.

(1) On suppose dans cette question que $a > 0$. Vérifier que $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale dans sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et que $\tau_a := \inf\{t > 0,\ |B_t| = a\}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt fini presque sûrement. Ce temps d'arrêt est-il borné ?

Calculer $\mathbb{E}[B_{\tau_a}]$. Le résultat est-il en accord avec un "théorème d'arrêt" ?

(2) Soit $T_a := \inf\{t > 0,\ B_t = a\}$. Montrer que T_a est, comme τ_a, un temps d'arrêt fini presque sûrement. Ce temps d'arrêt est-il borné ?

Que vaut $\mathbb{E}[B_{T_a}]$? Le résultat est-il en accord avec un "théorème d'arrêt" ? Commenter.

Exercice 5. (1) Le théorème d'arrêt optionnel de Doob pour des temps d'arrêts bornés affirme que si $(M_t, t \geq 0)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale et $S \leq T$ sont deux $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêts <u>bornés</u>, alors

$$\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S,$$

Au vu des résultats connus sur les martingales discrètes, quelle hypothèse sur la martingale M doit-on faire afin d'obtenir un résultat similaire pour des temps d'arrêts finis presque sûrement, mais non nécessairement bornés ?

(2) La(Les)quelle(s) parmi les martingales $(B_t, t \geq 0), (B_{t\wedge\tau_a}, t \geq 0), (B_t^2 - t, t \geq 0), (\exp(B_t - t/2), t \geq 0)$ vérifient ces hypothèses ?

Exercice 6. Soit un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$.

(1) Montrer que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ et $(B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2)_{t\geq 0}$ sont des martingales relativement à la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$.

(2) Déduire de la question précédente que :

$$\mathbb{E}(\tau_a) = a^2,\ \mathbb{E}(\tau_a^2) = (5/3)a^4.$$

Exercice 7. Étant donnés un filtration (complétée et continue à droite) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un processus $(B_t)_{t\geq 0}$, continu et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adapté, tel que $B_0 = 0$, vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus complexe $M^{(\lambda)}$, défini par :

$$\forall t \geq 0,\ M_t^{(\lambda)} = \exp\big(i\lambda B_t + \lambda^2 \frac{t}{2}\big),$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingale.

Exercice 8. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit pour tout $a \in \mathbb{R}$ la quantité suivante :

$$T_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}.$$

I.: Dans cette partie on cherche la loi de T_a. Sans perte de généralité, on va supposer dans cette partie que $a > 0$. (cf $T_0 = 0$, et par un argument immédiat de symmétrie on aura $T_{-a} \overset{\text{loi}}{=} T_a$).

(1) Montrer que T_a est un temps d'arrêt.

(2) Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\big[\exp\big(\theta B_{T_a\wedge n} - (\theta^2/2)(T_a \wedge n)\big)\big] = 1.$$

Retrouver en particulier que $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

(3) Etablir que :

$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{E}(\exp(-\lambda T_a)) = \exp\big(-a(2\lambda)^{1/2}\big).$$

On pourra utiliser un résultat de l'exercice 5.

Remarque : La transformée de Laplace inverse de l'expression précédente est connue, et on peut en déduire que la loi de T_a admet pour densité la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a(2\pi)^{-1/2}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)x^{-3/2}\exp\big(-(1/2)a^2x^{-1}\big).$$

(4) Déduire de la question précédente que $\mathbb{E}(T_a) = +\infty$.

(5) Expliquer pourquoi les questions précédentes permettent de retrouver la propriété de récurrence du mouvement brownien.

II.: On s'intéresse désormais, pour $a > 0, b > 0$, au premier temps $\tau_{a,b}$ de sortie de l'intervalle $[-a, b]$.

(1) Vérifier que $\tau_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$, et calculer $\mathbb{P}[B_\tau = -a], \mathbb{P}[B_\tau = b]$.

(2) On note $\alpha = -\sqrt{2\lambda}, \beta = \sqrt{2\lambda}$. Vérifier que

$$M_t = (\exp(\beta b) - \exp(-\beta a)) \exp(\alpha B_t - \lambda t) + (\exp(-\alpha a) - \exp(\alpha b)) \exp(\beta B_t - \lambda t), t \geq 0$$

est une martingale, et en déduire $\mathbb{E}[\exp(-\lambda)\tau_{a,b}]$ pour $\lambda > 0$.

Simplifier l'expression obtenue lorsque $a = b$.

III.: Le but de cette partie est de reprendre la méthode utilisée dans les questions précédentes pour calculer la loi des temps d'atteinte d'un mouvement brownien avec dérive $c \in \mathbb{R}$: $(X_t = B_t + ct, t \geq 0)$.

(1) Vérifier que si $\gamma > 0$ est fixé $(\exp(\theta X_t - \lambda t), t \geq 0)$ est une martingale pourvu que $\lambda = \theta c + \theta^2/2$, ce qui se produit pour deux valeurs distinctes de θ, notées α et β, avec $\alpha < 0 < \beta$.

En déduire la transformée de Laplace de $T_a := \inf\{t \geq 0,\ X_t = a\}$. Que vaut $\mathbb{P}(T_a < \infty)$?

(2) Montrer que

$$M_t = (\exp(\beta b) - \exp(-\beta a)) \exp(\alpha X_t - \lambda t) + (\exp(-\alpha a) - \exp(\alpha b)) \exp(\beta X_t - \lambda t), t \geq 0$$

est une martingale et utiliser le théorème d'arrêt optionnel pour exprimer la transformée de Laplace de $\tau_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$.

Remarque : Pour le calcul de la transformée de Laplace de $\tau_{a,b}$, l'introduction de $(M_t, t \geq 0)$ n'a rien de mystérieux : on l'a cherchée sous la forme $f(X_t)\exp(-\gamma t)$ en choisissant f de sorte que $f(a) = f(b)$ (évidemment dans le but de pouvoir exprimer facilement $\mathbb{E}(M_{\tau_{a,b}})$).

Exercice 9. (D'après Examen 2007-08.) On considre un $\mathcal{F}$-mouvement brownien réel W sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on pose $\tau := \inf\{t > 0 :\ W(t) \in (-A, B)^{\complement}\}$, avec A et $B > 0$.

(1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le processus X_θ défini par

$$X_\theta(t) \,:=\, \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right)\cos\left(\theta\left(W(t) - \left(\frac{B-A}{2}\right)\right)\right), \quad t \geq 0,$$

est une martingale.

(2) τ est-il un temps d'arrêt ? Montrer que

$$X_\theta(\tau) \,=\, \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\tau\right)\cos\left(\left(\frac{A+B}{2}\right)\theta\right).$$

(3) Montrer que si $\theta \in [0, \pi/(A+B))$ (on fera cette hypothèse pour la suite de l'exercice) alors X_θ^τ (avec $X_\theta^\tau(t) := X_\theta(t \wedge \tau)$) est une martingale positive.

(4) Déduire de (3) que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\tau\right)\right] \leq \frac{\cos\left((A-B)\theta/2\right)}{\cos\left((A+B)\theta/2\right)}.$$

(5) Montrer alors que $\mathbb{E}\sup_t |X_\theta^\tau(t)| < \infty$ et conclure que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\tau\right)\right] = \frac{\cos\left((A-B)\theta/2\right)}{\cos\left((A+B)\theta/2\right)}.$$