Université Paris 7 - M2 Modélisation Aléatoire - Calcul Stochastique

TRAVAUX DIRIGÉS NUMÉRO 4

INTÉGRALE DE WIENER ET D'ITÔ

1. Retour feuille 3 : Martingales du mouvement brownien. Temps d'atteinte

Exercice 1. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit pour tout $a \in \mathbb{R}$ la quantité suivante :

$$T_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}.$$

I.: Dans cette partie on cherche la loi de T_a. Sans perte de généralité, on va supposer dans cette partie que $a > 0$. (cf $T_0 = 0$, et par un argument immédiat de symmétrie on aura $T_{-a} \overset{\text{loi}}{=} T_a$).

(1) Montrer que T_a est un temps d'arrêt.

(2) Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\big[\exp\big(\theta B_{T_a \wedge n} - (\theta^2/2)(T_a \wedge n)\big)\big] = 1.$$

Retrouver en particulier que $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

(3) Etablir que :

$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{E}(\exp(-\lambda T_a)) = \exp\big(-a(2\lambda)^{1/2}\big).$$

On pourra utiliser un résultat de la feuille précédente.

Remarque : La transformée de Laplace inverse de l'expression précédente est connue, et on peut en déduire que la loi de T_a admet pour densité la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a(2\pi)^{-1/2}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)x^{-3/2}\exp\big(-(1/2)a^2x^{-1}\big).$$

(4) Déduire de la question précédente que $\mathbb{E}(T_a) = +\infty$.

(5) Expliquer pourquoi les questions précédentes permettent de retrouver la propriété de récurrence du mouvement brownien.

II.: On s'intéresse désormais, pour $a > 0, b > 0$, au premier temps $\tau_{a,b}$ de sortie de l'intervalle $[-a, b]$.

(1) Vérifier que $\tau_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$, et calculer $\mathbb{P}[B_\tau = -a], \mathbb{P}[B_\tau = b]$.

(2) On note $\alpha = -\sqrt{2\lambda}, \beta = \sqrt{2\lambda}$. Vérifier que

$$M_t = (\exp(\beta b) - \exp(-\beta a))\exp(\alpha B_t - \lambda t) + (\exp(-\alpha a) - \exp(\alpha b))\exp(\beta B_t - \lambda t), t \geq 0$$

est une martingale, et en déduire $\mathbb{E}[\exp(-\lambda)\tau_{a,b}]$ pour $\lambda > 0$.

Simplifier l'expression obtenue lorsque $a = b$.

III.: Le but de cette partie est de reprendre la méthode utilisée dans les questions précédentes pour calculer la loi des temps d'atteinte d'un mouvement brownien avec dérive $c \in \mathbb{R}$: $(X_t = B_t + ct, t \geq 0)$.

(1) Vérifier que si $\gamma > 0$ est fixé $(\exp(\theta X_t - \lambda t), t \geq 0)$ est une martingale pourvu que $\lambda = \theta c + \theta^2/2$, ce qui se produit pour deux valeurs distinctes de θ, notées α et β, avec $\alpha < 0 < \beta$.
En déduire la transformée de Laplace de $T_a := \inf\{t \geq 0,\ X_t = a\}$. Que vaut $\mathbb{P}(T_a < \infty)$?

(2) Montrer que

$$M_t = (\exp(\beta b) - \exp(-\beta a))\exp(\alpha X_t - \lambda t) + (\exp(-\alpha a) - \exp(\alpha b))\exp(\beta X_t - \lambda t), t \geq 0$$

est une martingale et utiliser le théorème d'arrêt optionnel pour exprimer la transformée de Laplace de $\tau_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$.

Remarque : Pour le calcul de la transformée de Laplace de $\tau_{a,b}$, l'introduction de $(M_t, t \geq 0)$ n'a rien de mystérieux : on l'a cherchée sous la forme $f(X_t)\exp(-\gamma t)$ en choisissant f de sorte que $f(a) = f(b)$ (évidemment dans le but de pouvoir exprimer facilement $\mathbb{E}(M_{\tau_{a,b}})$).

Exercice 2. (D'après Examen 2007-08.) On considre un $\mathcal{F}$-mouvement brownien réel W sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on pose $\tau := \inf\{t > 0 : W(t) \in (-A, B)^{\complement}\}$, avec A et $B > 0$.

(1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le processus X_θ défini par

$$X_\theta(t) := \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right)\cos\left(\theta\left(W(t) - \left(\frac{B-A}{2}\right)\right)\right), \quad t \geq 0,$$

est une martingale.

(2) τ est-il un temps d'arrêt ? Montrer que

$$X_\theta(\tau) = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \tau\right)\cos\left(\left(\frac{A+B}{2}\right)\theta\right).$$

(3) Montrer que si $\theta \in [0, \pi/(A+B))$ (on fera cette hypothèse pour la suite de l'exercice) alors X_θ^τ (avec $X_\theta^\tau(t) := X_\theta(t \wedge \tau)$) est une martingale positive.

(4) Déduire de (3) que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\tau\right)\right] \leq \frac{\cos((A-B)\theta/2)}{\cos((A+B)\theta/2)}.$$

(5) Montrer alors que $\mathbb{E}\sup_t |X_\theta^\tau(t)| < \infty$ et conclure que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\tau\right)\right] = \frac{\cos((A-B)\theta/2)}{\cos((A+B)\theta/2)}.$$

2. Intégrale de Wiener

Exercice 3. Définition : Un espace gaussien (centré) est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ formé de variables aléatoires gaussiennes centrées. On munit un tel espace de la norme $L^2(\mathbb{P})$, $||X||^2 = \mathbb{E}[X^2]$.

(1) Montrer que si $(X_1, ..., X_d)$ est un vecteur gaussien centré, alors $\overline{\mathrm{Vect}(X_1, .., X_d)}$ est un espace gaussien.

(2) Soit $\{X_t, t \in T\}$ un processus gaussien (centré). Montrer que $\overline{\mathrm{Vect}(X_t, t \in T)}$ est un espace gaussien.

(3) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une mesure σ-finie sur E. Montrer qu'il existe un espace gaussien $\mathcal{G}$ et une isométrie G de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ dans $(\mathcal{G}, ||.||)$.

(4) Soient $(E, \mathcal{E})$ mesurable, μ une mesure σ-finie sur E, $\mathcal{G}$ un espace gaussien et $G : L^2(E, \mathcal{E}, \mu) \mapsto \mathcal{G}$ une isométrie. Avec un léger abus de notation on définit $G(A) := G(\mathbf{1}_A)$.
   (a) Soient $A_1, ..., A_n$ des éléments de $\mathcal{E}$ disjoints tels que $\mu(A_i) < \infty$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Montrer que $(G(A_1), ..., G(A_n))$ est un vecteur gaussien dont la matrice de covariance est diagonale.
   (b) Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) < \infty$, $\{A_i, i \geq 1\}$ une partition de A. Montrer que $G(A) = \sum_{i \geq 1} G(A_i)$, où la série converge dans $L^2(\mathbb{P})$.

(5) Soient $(E, \mathcal{E})$ mesurable, μ une mesure σ-finie sur E, $\mathcal{G}$ un espace gaussien, $G : L^2(E, \mathcal{E}, \mu) \mapsto \mathcal{G}$ une isométrie, et $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) < \infty$. On suppose qu'il existe une suite de partitions $(\{A_i^n, 1 \leq i \leq k_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ de A vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{i \leq k_n} \mu(A_i^n) = 0.$$

Montrer que, dans $L^2(\mathbb{P})$,

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{k_n} G(A_i^n)^2 \right] = \mu(A).$$

(6) **Application** : Soit G une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ dans un espace gaussien $\mathcal{G}$.
   (a) Montrer que $(B_t := G(\mathbf{1}_{[0,t]}))_{t \geq 0}$ définit le pré-mouvement brownien, et trouver, pour $t \geq 0$ fixé

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} (B(ti/n) - B(t(i-1)/n))^2 \right].$$

   Généraliser le résultat précédente à une suite quelconque de subdivisions de l'intervalle $[s, t]$ (où $0 \leq s < t$) dont le pas tend vers 0.
   (b) Quelle est l'image par G d'une fonction f en escalier sur $[0, T]$? Soit $T \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Quelle est l'image par G d'une fonction f quelconque de $L^2([0, T], \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$? Que peut-on en déduire sur la loi de $\int_0^T f(s) dB_s$? Et sur celle de $\left(\int_0^T f_1(s) dB_s, ..., \int_0^T f_p(s) dB_s \right)$?

Exercice 4. Étant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$, une v.a. Z indépendante de $(B_t)_{t \geq 0}$ et une fonction mesurable et de carré intégrable $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, montrer que

$$Z \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f_s dB_s$$

sont deux v.a. indépendantes.

Exercice 5. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$, on définit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ par :

$$\forall t \geq 0, \ X_t = \int_0^{t^{1/2}} (2s)^{1/2} dB_s.$$

Montrer que ce processus est un mouvement brownien.

Exercice 6. Étant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$ et V_0 une v.a.r. indépendante de B, on définit le processus $(V_t)_{t \geq 0}$ (dit d'Ornstein-Uhlenbeck) par :

$$\forall t \geq 0, \ V_t = \exp(-t) V_0 + \int_0^t \exp[-(t-s)] dB_s.$$

(1) Montrer que $(V_t)_{t \geq 0}$ converge en loi vers une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

(2) On suppose dans la suite de l'exercice que $V_0 \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$, et que V_0 est indépendante de B. Montrer que V est un processus gaussien de loi stationnaire (i.e. la loi de V_t est indépendante de t.)

(3) Que dire des fonctions de moyenne et de covariance de V ?

(4) Montrer que le processus $(W_t = (2t)^{1/2} V_{\log(t)/2})_{t \geq 1}$ admet les mêmes lois fini-dimensionnelles que le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$.

Exercice 7. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$, on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace gaussien associé à $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{H} = \overline{\text{Vect}\{B_t,\ 0 \leq t \leq 1\}}^{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}.$$

(1) Montrer l'égalité suivante :

$$\mathcal{H} = \left\{ \int_0^1 f_s dB_s,\ f \in L^2([0,1]) \right\}.$$

(2) Étant donnés $X \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2([0,1])$, montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

a. $\mathbb{P}-$p.s., $X = \displaystyle\int_0^1 f_s dB_s$

b. $\forall t \in [0,1],\ \mathbb{E}(XB_t) = \displaystyle\int_0^t f_s ds.$

(3) Pour $t \in [0,1]$, que vaut $E\left[\int_0^1 f(s) dB_s \mid \mathcal{F}_t\right]$?

(4) Étant donnée une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, démontrer (cette première formule d'intégration par parties) :

$$\mathbb{P}-\text{p.s.}, \int_0^1 f_s dB_s = f_1 B_1 - \int_0^1 f_s' B_s ds.$$

Exercice 8. Etant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$ et une fonction $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, on note

$$\left(M_t = \int_0^t f_s dB_s \right)_{t \geq 0}$$

(1) Montrer que M est un processus gaussien dont on calculera la covariance. En déduire que M est à accroissements indépendants.

(2) Rappelons que M est p.s. continue. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que M soit un mouvement brownien.

(3) Étant donnée une fonction $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, on pose pour tout $t \geq 0$:

$$\left(N_t = \int_0^t g_s dB_s \right)_{t \geq 0}.$$

Montrer que les processus M et N sont indépendants si et seulement si :

$$f_t g_t = 0 \text{ p.p.}.$$

3. Intégrale d'Itô

Exercice 9. I. Sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ on considère deux martingales $(M_n, n \geq 0), (N_n, n \geq 0)$ telles que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty, \mathbb{E}[N_n^2] < \infty$.

(1) Pour $k \geq 1$, on note $\Delta N_k := N_k - N_{k-1}, \Delta M_k = M_k - M_{k-1}$. Montrer que

$$M_n N_n - M_0 N_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(M_{k-1} \Delta N_k + N_{k-1} \Delta M_k + \Delta M_k \Delta N_k \right).$$

(2) En déduire que

$$U_n := M_n N_n - M_0 N_0 - \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \Delta N_k, n \geq 0$$

est une $\{F_n\}$-martingale.

II. On considère un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ et $(\pi^n) : 0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0. Enfin on note Q^{π^n} la variation quadratique de B le long de π^n. Montrer que

$$B_T^2 = \sum_{k=1}^{p_n} 2 B_{t_{k-1}^n} (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}) + Q^{\pi^n}.$$

Quelle est la limite de chacun de ces termes lorsque $n \to \infty$? En déduire la valeur de $\int_0^t B_s dB_s$. Par une méthode similaire, établir, pour tout $t \geq 0$, la relation suivante :

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

Que dire, pour $n \geq 0$, de $\int_0^t B_s^n dB_s$? de $\int_0^t f(B_s) dB_s$, pour $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 10. Soient $\phi, \psi \in M^2$, montrer que

$$\left\{ M_t := \int_0^t \phi(s) dB_s \int_0^t \psi(s) dB_s - \int_0^t \phi(s) \psi(s) ds, t \geq 0 \right\}$$

est une martingale.

Exercice 11. Dans tout l'exercice, $(B_t)_{t \geq 0}$ désigne un mouvement brownien relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Par ailleurs, $(H_t)_{t \geq 0}$ désigne un processus progressivement mesurable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$\forall t \geq 0, \ \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds \right] < +\infty.$$

Pour tout $t \geq 0$, nous posons

$$M_t = \exp\left(\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds \right).$$

L'objectif de l'exercice est de démontrer que sous la condition

$$(\star) \qquad \exists \varepsilon > 0 : \quad \forall t \geq 0. \ \mathbb{E}\left[\exp\left((1 + \varepsilon) \int_0^t H_s^2 ds \right) \right] < +\infty.$$

le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Dans le cas $H = \lambda \in \mathbb{R}$, il vient en particulier que le processus

$$\left(\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t) \right)_{t \geq 0},$$

est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Remarque. La condition $(\star)$ n'est pas optimale. Le résultat est en fait encore vrai sous la condition dite de Novikov

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

(1) On suppose qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}\{|H_t| \leq K\} = 1$. Démontrer, pour tout $t \geq 0$, l'inégalité

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t H_s dB_s\right)\right] \leq \exp(\frac{1}{2}K^2 t).$$

On pensera à approcher H par une suite de processus simples.

(2) Pour $s \geq 0$, on considère une v.a. Z $\mathcal{F}_s$ mesurable et intégrable. Montrer, sous l'hypothèse de la question précédente, que pour $t > s$

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(\int_s^t H_r dB_r - \frac{1}{2}\int_s^t H_r^2 dr\right)\right] = \mathbb{E}(Z).$$

En déduire que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(3) Sous l'hypothèse de la question (1), montrer que pour tout $p > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left((1+p)\int_0^t H_s dB_s - \frac{1+p}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] \\
&\leq \left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{(2+p)(1+p)^2}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right]\right]^{p/(1+p)}.
\end{aligned}$$

Indication. On pourra poser $\lambda = (p^2+2p)(1+p)$ et utiliser la décomposition

$$\begin{aligned}
&\exp\left((1+p)\int_0^t H_s dB_s - \frac{1+p}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right) \\
&= \exp\left((1+p)\int_0^t H_s dB_s - \frac{(1+p)^3}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\exp\left(\frac{\lambda}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right),
\end{aligned}$$

afin d'appliquer l'inégalité de Hölder avec exposants $1+p$ et $(1+p)/p$.

(4) Conclure sous la condition $(\star)$. On pourra approcher H par des processus vérifiant l'hypothèse de la première question et appliquer un argument d'uniforme intégrabilité.

Exercice 12. Cet exercice fait suite au précédent. Il s'agit de démontrer le résultat sous la condition

$$(\star\star) \qquad \exists \varepsilon > 0,\ \ \forall t \geq 0\ \ \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^t H_s^2 ds\right)\right] < +\infty,$$

très proche de la condition de Novikov.

(1) Montrer que l'équation

$$(1+p)^2(1+\frac{\varepsilon}{2}) - \frac{1+\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(1+p)^4,$$

admet une solution $p > 0$.

(2) Sous les hypothèses de la condition $(\star\star)$, on pose pour tout $n \geq 1$,

$$\forall t \geq 0,\ \ H_t^n = \Phi_n(H_t),$$

où $\Phi_n(x)$ vaut x pour $|x| \leq n$ et $n\mathrm{sgn}(x)$ pour $|x| > n$. Montrer que le $p > 0$ précédent

$$\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg((1+p)\int_0^t H_s^n dB_s - (1+p)\frac{2+\varepsilon}{2}\int_0^t (H_s^n)^2 ds\bigg)\exp\bigg(\frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^t (H_s^n)^2 ds\bigg)\bigg]$$
$$\leq \bigg[\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg(\frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^t H_s^2 ds\bigg)\bigg]\bigg]^{p/(1+p)}.$$

On pourra appliquer l'inégalité de Hölder avec les exposants $1+p$ et $(1+p)/p$, sous une mesure bien choisie.

(3) Déduire de la question précédente que la suite

$$\exp\bigg(\int_0^t H_s^n dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (H_s^n)^2 ds\bigg),$$

est uniformément intégrable sous $\mathbb{P}$.

(4) Conclure.

Exercice 13. Étant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on suppose que :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E}\int_0^t \big[f'(B_s)\big]^2 ds < +\infty,$$

de sorte que le processus donné par :

$$\forall t \geq 0,\ M_t = \int_0^t f'(B_s) dB_s$$

est une martingale relativement à la filtration naturelle de B. On suppose également que :

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\int_0^t \big|f''(B_s)\big| ds < +\infty.$$

(1) Montrer que :

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\big[f(B_t)\big] = f(0) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\bigg[\int_0^t f''(B_s) ds\bigg].$$

(2) En déduire, pour $n \geq 1$, l'égalité :

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\big[B_t^{2(n+1)}\big] = 2n(n+1)\int_0^t \mathbb{E}\big[B_s^{2n}\big] ds.$$

(3) Retrouver l'égalité $\mathbb{E}(B_s^{2n}) = s^n[(2n)!]/[2^n n!]$.