Université Paris 7 - M2 Modélisation Aléatoire - Calcul Stochastique

TRAVAUX DIRIGÉS NUMÉRO 5

FORMULE D'ITÔ, PROCESSUS D'ITÔ

1. Formule d'Itô et applications

Exercice 1. (cf exo 2 feuille 4, et examen 07) On considre un $\mathcal{F}$-mouvement brownien réel W sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, A > 0, B > 0$ le processus X_θ est défini par

$$X^\theta(t) := \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right) \cos\left(\theta\left(W(t) - \left(\frac{B-A}{2}\right)\right)\right), \quad t \geq 0,$$

Calculer dX_t^θ.

Exercice 2. (d'après examen 08) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}$-mouvement brownien réel sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, z un réel strictement positif et F la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto -\ln(\cosh(t))$. Pour un processus $(u_t)_{t\geq 0}$ dans M^2, i.e. $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}\int_0^t u_s^2 ds < +\infty$, et une condition initiale $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$X_t = x + B_t + \int_0^{t\wedge\tau} u_s ds, \quad t \geq 0,$$

où $\tau := \inf\{t > 0 : X_t \in (0, z)^\complement\}$.

(1) Montrer que la fonction F est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\forall t \geq 0, \quad F''(t) - (F'(t))^2 + 1 = 0.$$

(2) Pour $(u_t)_{t\geq 0}$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ comme ci-dessus, on définit :

$$\forall t \geq 0, \quad V_t = F(X_{t\wedge\tau}) + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{2}(u_s^2 + 1) ds.$$

En appliquant la formule d'Itô, montrer que $(V_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale (i.e. V_t intégrable pour tout $t \geq 0$ et $V_s \leq \mathbb{E}[V_t|\mathcal{F}_s]$, $0 \leq s \leq t$).

(3) On admet ici que τ fini presque-sûrement. Déduire de la question précédente que

$$F(x) \leq \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \frac{1}{2}(u_s^2 + 1) ds + F(X_\tau)\Big].$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\big[\exp(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} y)\big]_{|\alpha=0}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) Vérifier que $H_0(x, y) = 1$, $H_1(x, y) = x$, $H_2(x, y) = x^2 - y$, $H_3(x, y) = x^3 - 3xy$ et $H^4(x, y) = x^4 - 6x^2 y + 3y^2$. Plus généralement, montrer que H_n est un polynôme en (x, y). (On ne cherchera pas à calculer les coefficients.)

(2) Que dire de $(H_i(B_t, t))_{t\geq 0}$, $i \in \{0, \cdots, 4\}$? (Ici, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien.)

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{2}\frac{\partial H_n}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H_n(B_t, t))_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Exercice 4. (d'après examen 09) Soient $(B_t, \widetilde{B}_t)$ un MB bi-dimensionnel. On pose

$$X_t = \int_0^t B_s d\widetilde{B}_s - \int_0^t \widetilde{B}_s dB_s$$

(1) Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

(2) Soit $\lambda > 0$. Justifier que

$$\mathbb{E}\big[e^{i\lambda X_t}\big] = \mathbb{E}\big[\cos(\lambda X_t)\big]$$

(3) Soient g et h deux fonctions déterministes de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Ecrire les processus suivants sous forme de processus d'Itô :

$$Y_t = \cos(\lambda X_t), \quad Z_t = h(t) - \frac{g(t)}{2}(B_t^2 + \widetilde{B}_t^2)$$

Calculer le crochet $\langle Y, Z\rangle$.

(4) Montrer que $Y_t e^{Z_t}$ est une martingale si les fonctions g et h vérifient le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dg}{dt}(t) = g(t)^2 - \lambda^2, \qquad \frac{dh}{dt}(t) = g(t) \tag{1}$$

(5) Soit $r > 0$. Vérifier que les fonctions

$$g(t) = \lambda \tanh\big(\lambda(r-t)\big), \qquad h(t) = -\log\big[\cosh\big(\lambda(r-t)\big)\big]$$

sont solutions du système (1).

(6) En déduire $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}]$.

Exercice 5. Dans cet exercice et le suivant $(.,.)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Soient $(X_t^i, t \geq 0), 1 \leq i \leq n$ qui sont des processus d'Itô et des martingales locales continues, tels que pour tous i, j

$$\langle X^i, X^j\rangle_t = \delta_{ij} t.$$

(1) Soit $\theta \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $f_\theta(x,t) = \exp\big\{i(\theta, x) + \frac{1}{2}|\theta|^2 t\big\}$,

$$\Big(M_t^\theta := f_\theta(X_t, t), t \geq 0\Big)$$

est une martingale continue.

(2) En déduire que pour $s < t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et suit une loi gaussienne centrée et de matrice de covariance $(t-s)\mathbf{I}_n$. Conclure.

Exercice 6. Soit B un mouvement brownien n-dimensionnel, issu de x_0, et $U_t := |B_t|^2 = (B_t, B_t)$.

(1) Exprimer dU_t.

(2) Montrer que X, défini par $\Big(X_t := \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, t \geq 0\Big)$ est un mouvement brownien uni-dimensionnel.

(3) Montrer que

$$U_t = |x_0|^2 + \int_0^t 2\sqrt{U_t} dX_t + nt.$$

Exercice 7. Étant donnés un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et deux processus $(b_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ progressivement mesurables (pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$), on suppose que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}\{|b_t| \leq K\} = 1,\ \mathbb{P}\{|\sigma_t| \leq K\} = 1,\ \mathbb{P}\{|\sigma_t| > \lambda\} = 1,$$

pour deux constantes strictement positives λ et K. Pour un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit par ailleurs

$$\forall t \geq 0,\ X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

Étant donné un réel $a > |x_0|$, on considère la quantité $\tau_a = \inf\{t \geq 0,\ |X_t| > a\}$ ($\inf \emptyset = +\infty$).

(1) Montrer que τ_a est un temps d'arrêt.

(2) On suppose que $\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}\{b_t X_t \geq 0\} = 1$. En appliquant la formule d'Itô au processus $(X_t^2)_{t\geq 0}$, montrer que $\mathbb{E}(\tau_a) < +\infty$.

Exercice 8. Étant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, on considère un processus $(u_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-progressivement mesurable tel que $\exists K \geq 0,\ \forall t \geq 0,\ \mathbb{P}\{|u_t| \leq K\} = 1$.

(1) On définit pour tout $t \geq 0$,

$$M_t = \exp\Bigl(-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds\Bigr).$$

Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingale de carré intégrable.

(2) On définit maintenant pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \int_0^t u_s ds + B_t.$$

Montrer que le processus $(X_t M_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingale locale. Remarquer qu'elle est en fait de carré intégrable.

Exercice 9. Dans tout l'exercice, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien d-dimensionnel, $d \geq 3$, et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On fixe par ailleurs un point x_0 de $\mathbb{R}^d$, $x_0 \neq 0$.

(1) Montrer que la fonction $u : x \mapsto |x|^{2-d}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et que pour $x \neq 0$, $\Delta u(x) = 0$.

(2) On fixe $\delta \in]0,1[$ tel que $|x_0| \in]\delta, \delta^{-1}[$. On peut trouver une fonction η de classe $\mathcal{C}^\infty$ valant 1 sur $\{x, |x| > \delta\}$ et 0 en dehors de $\{x, |x| > \delta/2\}$, de sorte que le produit $u\eta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$ tout entier. Appliquer la formule d'Itô à $((u\eta)(x_0 + B_t))_{t\geq 0}$.

(3) On considère

$$\tau^{(\delta)} = \inf\{t \geq 0,\ |x_0 + B_t| \leq \delta\},\ \sigma^{(\delta)} = \inf\{t \geq 0,\ |x_0 + B_t| \geq \delta^{-1}\}.$$

Montrer que $\tau^{(\delta)}$ et $\sigma^{(\delta)}$ sont deux temps d'arrêt. En déduire que $\rho^{(\delta)} = \tau^{(\delta)} \wedge \sigma^{(\delta)}$ est un temps d'arrêt. Montrer que $\sigma^{(\delta)}$ et $\rho^{(\delta)}$ sont p.s. finis.

(4) Montrer finalement que $\mathbb{E}\bigl[u(x_0 + B_{\rho^{(\delta)}})\bigr] = u(x_0)$.

(5) En déduire la relation

$$u(x_0) = \delta^{2-d}\mathbb{P}\{\tau^{(\delta)} < \sigma^{(\delta)}\} + \delta^{d-2}\mathbb{P}\{\tau^{(\delta)} > \sigma^{(\delta)}\},$$

(6) En notant $\tau^{(0)} = \inf\{t \geq 0,\ |x_0 + B_t| = 0\}$, déduire que $u(x_0)\delta^{d-2} \geq \mathbb{P}\{\tau^{(0)} < \sigma^{(\delta)}\}$.

(7) Déduire finalement $\mathbb{P}\{\tau^{(0)} < +\infty\} = 0$.

2. Formule de Cameron-Martin

Exercice 10. On considère l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t, \mathbb{P})$, et un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. On note $\mathcal{G}$ l'espace gaussien engendré par $(B_t)_{t\geq 0}$, et une variable $Y \in \mathcal{G}$.

(1) Rappeler pourquoi il existe $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $Y = \int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s$.

(2) Pour $A \in \mathcal{F}$ on note

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(Y - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y^2]\right)\right].$$

Montrer que ceci définit une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$.

(3) Pour $t \geq 0$, on pose

$$Y_t := \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t], \quad \rho_t := \mathbb{E}\left[\exp\left(Y - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y^2]\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$, $(\rho_t)_{t\geq 0}$ sont des martingales. Exprimer Y_t, ρ_t à l'aide de f, B.

Vérifier enfin que ρ_t est une version de $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ sur $\mathcal{F}_t$.

(4) Calculer $\langle B, Y\rangle_t, \langle B, \rho\rangle_t$.

Vérifier que $(B_t - \langle B, Y\rangle_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien. Montrer que ce même processus est une martingale *sous la mesure* $\mathbb{Q}$.

Calculer, toujours sous la mesure $\mathbb{Q}$, la fonction de moyenne et de covariance de ce processus. Conclure.

(5) Que venons-nous de prouver dans le cas particulier où $Y = \lambda B_T$?