TRAVAUX DIRIGÉS NUMÉRO 6

THÉORÈME DE GIRSANOV

Exercice 1. On considère l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t, \mathbb{P})$, et un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. On note $\mathcal{G}$ l'espace gaussien engendré par $(B_t)_{t\geq 0}$, et une variable $Y \in \mathcal{G}$.

(1) Rappeler pourquoi il existe $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $Y = \int_{\mathbb{R}_+} f(s)dB_s$.

(2) Pour $A \in \mathcal{F}$ on note

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(Y - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y^2]\right)\right].$$

Montrer que ceci définit une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$.

(3) Pour $t \geq 0$, on pose

$$Y_t := \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t], \quad \rho_t := \mathbb{E}\left[\exp\left(Y - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y^2]\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$, $(\rho_t)_{t\geq 0}$ sont des martingales. Exprimer Y_t, ρ_t à l'aide de f, B.

Vérifier enfin que ρ_t est une version de $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ sur $\mathcal{F}_t$.

(4) Calculer $\langle B, Y\rangle_t$, $\langle B, \rho\rangle_t$.

Vérifier que $(B_t - \langle B, Y\rangle_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien. Montrer que ce même processus est une martingale *sous la mesure* $\mathbb{Q}$.

Calculer, toujours sous la mesure $\mathbb{Q}$, la fonction de moyenne et de covariance de ce processus. Conclure.

(5) Que venons-nous de prouver dans le cas particulier où $Y = \lambda B_T$?

Exercice 2. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on définit, pour r et σ deux paramètres positifs, le processus

$$\forall t \geq 0,\ S_t = \exp\big(rt + \sigma B_t\big).$$

Montrer que, pour tout $T > 0$, il existe une probabilité $\mathbb{Q}_T$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, équivalente à $\mathbb{P}$, telle que $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ soit une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ martingale sous $\mathbb{Q}_T$.

Exercice 3. Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un processus $(u_t)_{t\geq 0}$, appartenant à M^2 tel que

$$\exists R > 0,\ \forall t \geq R,\ \forall \omega \in \Omega,\ u_t(\omega) = 0.$$

On pose en outre $Z_R = \exp\left(\int_0^R u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^R u_s^2 ds\right)$.

(1) On définit la mesure de probabilité $\forall A \in \mathcal{F}_R,\ \mathbb{Q}_R(A) = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A Z_R\big]$. Montrer que $\big(B_t - \int_0^t u_s ds\big)_{0\leq t\leq R}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_R$.

(2) Plus généralement, montrer que $\big(B_t - \int_0^{t\wedge R} u_s ds\big)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sous $Z_R \cdot \mathbb{P}$ (définie comme une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tout entier).

Exercice 4. Etant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et deux processus $(\phi_t)_{t\geq 0} \in M^2$, $(\psi_t)_{t\geq 0} \in M^2_{\text{loc}}$ montrer que le processus $(M_t = Z_t Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale, où

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \phi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds\right), \quad Y_t = \int_0^t \psi_s dB_s - \int_0^t \psi_s \phi_s ds, \quad t \geq 0.$$

En déduire que $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale locale sous la probabilité $\mathbb{Q} = Z_T \cdot \mathbb{P}$ si T désigne un réel positif tel que $\mathbb{E}[Z_T] = 1$.

Exercice 5. Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit pour tout $a > 0$, $S_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t \geq a\}$. On rappelle que (par exemple en utilisant le principe de réflexion) que S_a admet pour densité

$$f_{S_a}(x) = a(2\pi)^{-1/2} x^{-3/2} \exp\big(-(1/2)a^2 x^{-1}\big) \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

On définit maintenant, pour une constante $b \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \geq 0,\ X_t = bt + B_t, \quad \forall a > 0,\ T_a = \inf\{t \geq 0,\ X_t \geq a\}$$

(1) Vérifier que T_a est bien un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(2) Pour $R > 0$ donné, on définit la v.a. $Z_R = \exp(-bB_R - \frac{1}{2}b^2 R)$ de même que la probabilité $\forall A \in \mathcal{F}_R,\ \mathbb{Q}_R(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z_R]$. Quelle est la loi du processus $(X_t)_{0\leq t\leq R}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}_R$?

(3) Montrer que $\forall A \in \mathcal{F}_R,\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_R}\big[\mathbf{1}_A \exp\big(bX_R - \frac{1}{2}b^2 R\big)\big]$.

(4) En déduire, sous $\mathbb{P}$, la loi de T_a.

Exercice 6.

Exercice 7. Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et un processus $(u_t)_{t\geq 0}$ borné par une constante K, on définit le processus $W_t = B_t - \int_0^t u_s ds$, $t \geq 0$. Pour $T > 0$ fixé, il est possible de définir la probabilité

$$\forall A \in \mathcal{F}_T,\ \mathbb{Q}_T(A) = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A Z_T\big],\ \text{avec } Z_T = \exp\left(\int_0^T u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T u_s^2 ds\right).$$

(1) Considérons un processus $(H_t)_{t\geq 0} \in M^2$. Nous savons que $(W_t)_{t\geq 0}$ est, sous la probabilité $\mathbb{P}$ un processus d'Itô, de sorte qu'il est possible de définir l'intégrale de H contre W comme

$$\int_0^T H_s dW_s = \int_0^T H_s dB_s - \int_0^T H_s u_s ds.$$

Mais, sous la probabilité $\mathbb{Q}_T$, $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ de sorte qu'il est possible de définir l'intégrale de H contre W comme une intégrale stochastique contre un mouvement brownien.

Vérifier que les deux définitions sont cohérentes.

(2) Montrer que le résultat est encore vrai si l'on remplace l'hypothèse $H \in M^2$ par

$$H \in M^2_{\text{loc}}.$$

admis : Dans le théorème de Girsanov on peut remplacer les occurences des mots "martingale continue" par "martingale locale continue".

Exercice 8. Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un processus progressivement mesurable $(u_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|u_t| \leq K$

p.s., pour une constante $K > 0$, de même qu'une fonction continue (déterministe) $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ à valeurs strictement positives. Pour $T > 0$, on définit sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ la probabilité

$$\forall A \in \mathcal{F}_T,\ \mathbb{Q}_T(A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(\int_0^T \sigma_s^{-1} u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^{-2} u_s^2 ds\right)\right].$$

Donner, sous la probabilité $\mathbb{Q}_T$, la loi de la v.a.

$$W_T = \int_0^T \sigma_s dB_s - \int_0^T u_s ds.$$

Que peut-on dire, toujours sous $\mathbb{Q}_T$, de la loi du processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$?

Exercice 9. Dans l'exercice $|.|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.
Soit $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$h(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p_s(x,y) h(t+s,y) dy,$$

où $p_s(x,y)$ est le noyau de la chaleur :

$$p_s(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi s})^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2s}\right).$$

On définit la mesure $\mathbb{Q}$ telle que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} |_{\mathcal{F}_t} = h(t, B_t)$, où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

(1) Vérifier que h est $\mathcal{C}^\infty$, puis calculer $dh(t, B_t)$. En déduire que $h(t, B_t)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

(2) Trouver la martingale L_t telle que $h(t, B_t)$ est la martingale exponentielle de L.

(3) Trouver, sous la mesure $\mathbb{Q}$, la loi du processus Y où

$$Y_t = X_t - \int_0^t \frac{\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s)}{h(s, X_s)} ds.$$

(4) Dans la suite de l'exercice on fixe $\mu \in \mathbb{R}^d$, et pour $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$h_\mu(t,x) := \exp(\mu.x - \frac{1}{2}|\mu|^2 t),$$

et on note $\mathbb{Q}_\mu$ la mesure associée comme ci-dessus. On note enfin $T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}$.

Montrer que $h(t \wedge T, B_{t\wedge T})$ est une martingale uniformément intégrable, et en déduire que $\frac{d\mathbb{Q}_\mu}{d\mathbb{P}} |_{\mathcal{F}_T} = h(T, X_T)$.

(5) Déduire de ce qui précède le théorème de Reuter :

Les variables X_T et T sont indépendantes sous $\mathbb{Q}_\mu$, i.e.

$$\forall f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mesurables, bornées },\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[f(X_T)g(T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[f(X_T)]\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[g(T)].$$

Exercice 10. *(D'après Examen 09)* Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel et $b(x)$ et $\sigma(x)$ deux fonctions satisfaisant les conditions d'Itô. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

On note

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

Pour $\alpha < x < \beta$ on introduit le temps de sortie

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in]\alpha, \beta[^c\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact. En utilisant la formule d'Itô, montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{t\wedge\tau})\big] = f(x) + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{t\wedge\tau} \mathcal{L}f(X_s)ds\Big]$$

(2) *Supposons qu*'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) \leq -1$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ et $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps.

(3) (a) *Supposons qu*'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) = -1$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. Montrer que $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$.

(b) Si $\sigma : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ et $b = 0$, montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ et $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps.
Trouver une expression de $\mathbb{E}_x[\tau]$ en fonction de σ.
Calculer $\mathbb{P}_x(X_\tau = \alpha)$ et $\mathbb{P}_x(X_\tau = \beta)$ (vérifier que ces probabilités ne dépendent pas de σ).

(c) Si $\sigma = 1$ et $b = 0$ (X_t est alors le mouvement brownien issu de x), montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] = (x - \alpha)(\beta - x)$.

(4) Soit $\lambda > 0$.

(a) Supposons qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 1$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau)] = u(x)$.
Indication : on pourra considérer $e^{-\lambda t}u(X_t)$.

(b) Si $\sigma = 1$ et $b = 0$, montrer que

$$\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau)] = \cosh\big[\sqrt{2\lambda}(x - \alpha)\big] + \frac{1 - \cosh\big[\sqrt{2\lambda}(\beta - \alpha)\big]}{\sinh\big[\sqrt{2\lambda}(\beta - \alpha)\big]}\sinh\big[\sqrt{2\lambda}(x - \alpha)\big]$$

(c) On considère $\tau_0 = \inf\{t \geq 0, B_t = 0\}$.
Montrer que pour tout $x > 0$ et $\lambda > 0$ on a $\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau_0)] = \exp(-\sqrt{2\lambda}x)$. Montrer que $\tau_0 < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps mais $\mathbb{E}_x[\tau_0] = \infty$.