TRAVAUX DIRIGÉS NUMÉRO 7

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Exercice 1. *(D'après Examen 09)* Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel et $b(x)$ et $\sigma(x)$ deux fonctions satisfaisant les conditions d'Itô. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

On note

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

Pour $\alpha < x < \beta$ on introduit le temps de sortie

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in]\alpha, \beta[^c\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact. En utilisant la formule d'Itô, montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{t\wedge\tau})\big] = f(x) + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{t\wedge\tau} \mathcal{L}f(X_s)ds\Big]$$

(2) *Supposons qu*'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) \leq -1$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ et $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps.

(3) (a) *Supposons qu*'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) = -1$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. Montrer que $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$.

(b) Si $\sigma : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ et $b = 0$, montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ et $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps.
Trouver une expression de $\mathbb{E}_x[\tau]$ en fonction de σ.
Calculer $\mathbb{P}_x(X_\tau = \alpha)$ et $\mathbb{P}_x(X_\tau = \beta)$ (vérifier que ces probabilités ne dépendent pas de σ).

(c) Si $\sigma = 1$ et $b = 0$ (X_t est alors le mouvement brownien issu de x), montrer que $\mathbb{E}_x[\tau] = (x - \alpha)(\beta - x)$.

(4) Soit $\lambda > 0$.

(a) Supposons qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 1$. Montrer que $\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau)] = u(x)$.
Indication : on pourra considérer $e^{-\lambda t}u(X_t)$.

(b) Si $\sigma = 1$ et $b = 0$, montrer que

$$\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau)] = \cosh\big[\sqrt{2\lambda}(x - \alpha)\big] + \frac{1 - \cosh\big[\sqrt{2\lambda}(\beta - \alpha)\big]}{\sinh\big[\sqrt{2\lambda}(\beta - \alpha)\big]}\sinh\big[\sqrt{2\lambda}(x - \alpha)\big]$$

(c) On considère $\tau_0 = \inf\{t \geq 0, B_t = 0\}$.
Montrer que pour tout $x > 0$ et $\lambda > 0$ on a $\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda\tau_0)] = \exp(-\sqrt{2\lambda}x)$. Montrer que $\tau_0 < \infty$ $\mathbb{P}_x$-ps mais $\mathbb{E}_x[\tau_0] = \infty$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien uni-dimensionnel relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On désigne par ailleurs un point $x\in\mathbb{R}$ ainsi que deux fonctions lipschitziennes b et σ de $\mathbb{R}$ dans lui-même et de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. On considère l'EDS :

$$(E_x(b,\sigma)) \qquad \forall t\geq 0,\ X_t = x+\int_0^t b(X_s)ds+\int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

(1) Montrer que l'EDS admet une unique solution.

(2) Chercher une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $(Y_t=\phi(X_t))_{t\geq 0}$ soit une martingale locale.

(3) Montrer que Y est une vraie martingale si a est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 3. Soient x,y deux réels tels que $x<y$ et X (resp. Y) l'unique solution de $(E_x(b,\sigma))$ (resp. de $(E_y(b,\sigma))$).

(1) Vérifier que le processus d'Itô U tel que

$$U_t=\int_0^t \frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s-Y_s}\mathbf{1}_{\{X_s\neq Y_s\}}dB_s+\int_0^t \frac{b(X_s)-b(Y_s)}{X_s-Y_s}\mathbf{1}_{\{X_s\neq Y_s\}}ds$$

est bien défini.

(2) Montrer que X_t-Y_t s'écrit

$$X_t-Y_t=(x-y)\exp\left[U_t-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s-Y_s}\right)^2\mathbf{1}_{\{X_s\neq Y_s\}}ds\right].$$

(3) En déduire que

$$\mathbb{P}(X_t<Y_t\quad \forall t\geq 0)=1.$$

(4) On suppose de plus qu'il existe des points $y_1<y_2$ tels que

$$\sigma(y_1)=\sigma(y_2)=0, \qquad \sigma(y)>0\ \forall y\in]y_1,y_2[, \qquad b(y)=0\ \forall y\in[y_1,y_2].$$

Pour un $x\in]y_1,y_2[$, on considère X la solution de $(E_x(b,\sigma))$. Enfin, on introduit $\phi(x)=(x-y_1)(y_2-x)$.
Montrer que $\mathbb{E}[\phi(X_t)]$ converge lorsque $t\to\infty$.

(5) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que, lorsque $t\to\infty$, X_t converge dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable X_∞ à valeurs dans $\{y_1,y_2\}$. Quelle est la loi de X_∞ ?

Exercice 4. Dans tout l'exercice, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien uni-dimensionnel relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On désigne par ailleurs un point $x\in\mathbb{R}$ ainsi que deux fonctions continues a et b de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que l'équation différentielle stochastique :

$$\forall t\geq 0,\ X_t=x+\int_0^t b_sX_sds+\int_0^t\sigma_sdB_s,$$

admet une unique solution.

(2) On considère la fonction y solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$y_t=1+\int_0^t b_sy_sds.$$

Donner la forme de y.

(3) Montrer que $Z=y^{-1}X$ est un processus d'Itô dont on calculera la forme différentielle.

(4) Vérifier alors que la solution est donnée par :

$$\forall t \geq 0,\ X_t = \exp\left(\int_0^t b_s ds\right)\left[x + \int_0^t \sigma_s \exp\left(-\int_0^s b_u du\right) dB_s\right].$$

(5) En déduire que X est un processus gaussien dont on calculera la moyenne et la covariance.

Exercice 5. (1) Rappelons que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(V_t, t \geq 0)$ avait été défini (cf TD 4) par :

$$\forall t \geq 0,\ V_t = \exp(-t)V_0 + \int_0^t \exp[-(t-s)]dB_s.$$

Déterminer l'EDS dont ce processus est l'unique solution.

En déduire son générateur infinitésimal, l'adjoint de ce générateur, et retrouver que $\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-x^2\right)$ est la densité d'une mesure invariante.

(2) Pour $c \in \mathbb{R}, \sigma > 0, x \in \mathbb{R}$, trouver le générateur, le générateur adjoint de la solution de l'EDS

$$V_0 = x, dV_t = -cV_t dt + \sigma dB_t.$$

En déduire une mesure invariante pour ce processus.

Exercice 6. Étant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, un point $x \in \mathbb{R}$ ainsi que deux fonctions continues a et b de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on considère l'EDS

$$(\star) \qquad \forall t \geq 0,\ X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s X_s dB_s.$$

(1) Montrer que le processus M donné, pour tout $t \geq 0$, par $M_t = \exp(-\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds)$ est solution de l'EDS :

$$\forall t \geq 0,\ M_t = 1 - \int_0^t \sigma_s M_s dB_s.$$

(2) Montrer que $(\star)$ admet une unique solution, notée $(X_t)_{t\geq 0}$.

(3) Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ \exp\left(\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) X_t M_t = x + \int_0^t \left[\exp\left(\int_0^s \sigma_r^2 dr\right) b_s M_s\right] ds$$

(4) En déduire que

$$\forall t \geq 0,\ X_t = \exp\left(\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)\left[x + \int_0^t \left(\exp\left(\int_0^s \sigma_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^s \sigma_r^2 dr\right) b_s\right) ds\right].$$

Exercice 7. Dans tout l'exercice, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard (uni-dimensionnel). On considère l'EDS à deux dimensions :

$$\forall t \geq 0,\ \begin{cases} X_t = 1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t X_s ds - \int_0^t Y_s dB_s, \\ Y_t = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t Y_s ds + \int_0^t X_s dB_s. \end{cases}$$

(1) Montrer que cette équation admet une unique solution.

(2) Montrer à l'aide de la formule d'Itô que, pour tout $t \geq 0$, $X_t^2 + Y_t^2 = 1$.

(3) Il est naturel de chercher une solution sous la forme $(X_t, Y_t) = (\cos(\theta_t), \sin(\theta_t))$, pour θ processus d'Itô.

Chercher la forme nécessaire de θ à l'aide de la formule d'Itô.

(4) En déduire la solution de l'équation.

Exercice 8. Étant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, un paramètre $\alpha > 1$, et $a > 0$, on considère l'EDS (dite de Bessel) :

$$(E_a(\alpha)) \qquad R_t = a + \int_0^t \frac{\alpha}{2R_s} ds + B_t.$$

(1) Soit B un mouvement brownien n-dimensionel ($n \geq 3$) issu de $x \neq 0$, $r_t := |B_t|$, $v_t := |B_t|^2$. On note $b_t = \int_0^t \frac{1}{r_s} B_s.dB_s$. Quelle est la loi du processus b ?

Montrer que

$$dv_t = 2\sqrt{v_t^+}db_t + ndt,$$

puis que

$$dr_t = db_t + \frac{n-1}{2r_t}dt.$$

(2) On suppose qu'il existe un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, à trajectoires continues et adapté à la filtration, tel que $(X_t)_{0\leq t\leq \zeta}$ vérifie l'équation $(E_a(\alpha))$ sur $[0, \zeta[$, où

$$\zeta = \inf\{t \geq 0,\ X_t \leq 0\} \ (\inf \emptyset = +\infty).$$

Montrer que le processus $(X_{t\wedge\zeta}^{1-\alpha})_{t\geq 0}$ est une martingale locale. En définissant pour $\varepsilon \in (0, a)$, $\tau^\varepsilon = \inf\{t \geq 0,\ X_t \leq \varepsilon\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$, montrer que

$$\mathbb{P}\{\tau^\varepsilon < +\infty\} \leq \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{\alpha-1}.$$

En déduire que $\zeta = +\infty$, p.s.

Que cela signifie pour $(B_t, t \geq 0)$?

(3) On suppose qu'il existe deux processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$, à trajectoires continues, adaptés à la filtration et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, satisfaisant $(E_a(\alpha))$. On définit, pour $\varepsilon \in (0, a)$, $\tau^\varepsilon = \inf\{t \geq 0,\ X_t \leq \varepsilon\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$ et $\sigma^\varepsilon = \inf\{t \geq 0,\ Y_t \leq \varepsilon\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$. En posant $\rho^\varepsilon = \tau^\varepsilon \wedge \sigma^\varepsilon$, montrer que $(X_{t\wedge\rho^\varepsilon})_{t\geq 0}$ et $(Y_{t\wedge\rho^\varepsilon})_{t\geq 0}$ sont solutions de l'EDS

$$\forall t \geq 0,\ U_t = a + \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\rho^\varepsilon]}(s) \frac{\alpha}{2(U_s \vee \varepsilon)} ds + \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\rho^\varepsilon]}(s) dB_s.$$

En déduire que X et Y coïncident.

(4) Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'EDS

$$\forall t \geq 0,\ U_t = a + \int_0^t \frac{\alpha}{2(U_s \vee \varepsilon)} ds + B_t.$$

Montrer qu'elle admet une unique solution, désignée par $(U_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$. On pose alors

$$\zeta^\varepsilon = \inf\{t \geq 0,\ U_t^\varepsilon \leq \varepsilon\},\ \inf \emptyset = +\infty.$$

Montrer que l'application $\varepsilon \in (0, a) \mapsto \zeta^\varepsilon$ est décroissante et tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers zéro. En déduire que $(U_t^{\varepsilon_1})_{t\geq 0}$ et $(U_t^{\varepsilon_2})_{t\geq 0}$ coïncident sur $[0, \zeta^{\varepsilon_1} \wedge \zeta^{\varepsilon_2}]$. En déduire que l'on peut poser $R_t = \lim_{\varepsilon\to 0} U_t^\varepsilon$ et que $(R_t)_{t\geq 0}$ est solution de $(E_x(\alpha))$.

On dit que (R_t) est un *processus de Bessel de dimension* $\alpha + 1$, *issu de* a.

(5) Soit R_1 un processus de Bessel de dimension $\alpha_1 + 1$, issu de a_1, et R_2 un processus de Bessel de dimension $\alpha_2 + 1$, issu de a_2, et indépendant de R_1.

Que dire du processus $R := \sqrt{(R_1)^2 + (R_2)^2}$?

Indication : On commencera par étudier l'équation satisfaite par $V_1 = R_1^2$, puis celle satisfaite par $V = R_1^2 + R_2^2$.