Lundi 4 octobre 2021

Université de Paris **Chaînes de Markov**

Durée : 1 heure.
Les documents, calculatrices, téléphones ne sont pas autorisés

Exercice 1 On fixe μ une loi sur les entiers naturels et on suppose que $(Z_j, j \geq 1)$ est une suite de v.a.i.i.d suivant μ. On considère alors la chaîne X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et définie sous $\mathbb{P}_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ par

$$X_0 = k, \qquad X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} - 1.$$

1. Exprimer $P(i, i+j)$ pour $i \in \mathbb{Z}.j \in \mathbb{Z}$ à l'aide de μ.
2. On suppose dans cette question que $\mu(0) + \mu(1) = 1$. Décomposer l'espace d'états en classes de communication.
3. On suppose dans toute la suite de l'exercice que $\mu(0) > 0, \mu(0) + \mu(1) < 1$. Décomposer l'espace d'états en classes de communication.
4. On suppose dans cette question que pour un $p \in (0,1)$, $\mu(k) = (1-p)^k p$, $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Exprimer le noyau de transition.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}_k[X_n] = k + n\frac{1-2p}{p}$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_k(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty)^k$.
   (d) Déduire que
   $$\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = \frac{p}{1 - (1-p)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)}.$$
   (e) Que dire de $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)$ lorsque $p > 1/2$? Et lorsque $p \leq 1/2$? On discutera du comportement asymptotique de la chaîne en fonction de p (on essaiera en particulier de préciser le caractère transient ou récurrent de la chaîne).

1. On a $P(i, i+j) = \mathbb{P}_i(X_1 = i+j) = \mathbb{P}(Z_1 = j+1)$. Ainsi, $P(i, i+j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}, j \leq -2$, tandis que $P(i, i+j) = \mu(j+1)$ lorsque $j \in \mathbb{Z}, j \geq -1$.
2. Lorsque $\mu(0) + \mu(1) = 1$, on a $\mu(j+1) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $P(i, i+j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Mais alors quelque soit $i \in \mathbb{Z}$, $i \nrightarrow i+j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, et donc $i \nleftrightarrow i+j$. Comme le raisonnement est valable pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il s'ensuit que la classe de communication de tout état i est réduite au singleton $\{i\}$.
   Remarque : Lorsque $\mu(0) > 0$ la chaîne peut se déplacer vers la gauche, aucune de ces classes n'est fermée, et donc tous les états sont transients (et bien sûr dans ce cas il est facile de voir que $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$.
   Lorsque $\mu(1) = 1$, tous les états sont absorbants, et donc chacune de ces classes est finie, fermée, récurrente.
3. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $P(i, i-1) = \mu(0) > 0$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^k(i, i-k) > 0$, et $i \to i-k$. Par ailleurs si $\mu(0) + \mu(1) < 1$ il existe $\ell \geq 2$ tel que $\mu(\ell) > 0$ de sorte que $P(i, i+\ell-1) > 0$. Mais alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^k(i, i+k(\ell-1)) > 0$, et donc $i \to i+k(\ell-1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ Enfin si $j \in \mathbb{N}^*$ il existe k_0 tel que $k_0(\ell-1) \geq j$, D'après ce qui précède et la transitivité de $\to$, on a $i \to i+k_0(\ell-1) \to i+j$. On a donc pour tout $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$, $i \to i+j$, et donc $i+j \to i$, de sorte que la chaîne est irréductible.

4. (a) On a, pour tout $j \in \mathbb{Z}, j \geq -1$ $P(i, i+j) = (1-p)^{j+1}p$.

(b) Remarquons que $Z_1 + 1 \sim \text{Geom}(p)$ de sorte que $\mathbb{E}[Z_1] = \frac{1}{p} - 1$, et donc $\mathbb{E}[Z_1 - 1] = \frac{1-2p}{p}$. On a donc

$$\mathbb{E}_k[X_n] = k + \sum_{i-1}^{n} \mathbb{E}[Z_i - 1] = k + n\frac{1-2p}{p},$$

comme souhaité.

(c) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Pour $k = 0$, $\mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = 1$ et la formule est évidente, elle l'est également pour $k = 1$. Supposons l'assertion vraie jusqu'au rang k. Remarquons que puisque la chaîne ne peut effectuer des pas vers la gauche que de taille 1, lorsque $k + 1 \geq 2$, si elle part de $k + 1$, elle doit forcément visiter k avant de parvenir en 0 (c'est-à-dire, p.s. $T_k < T_0$ sous $\mathbb{P}_{k+1}$).
Par ailleurs, l'invariance par translation du noyau assure que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la loi de T_{i-1} sous $\mathbb{P}_i$ est exactement celle de T_0 sous $\mathbb{P}_1$, et donc en particulier $\mathbb{P}_{k+1}(T_k < \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty)$. Par Markov en T_k, on déduit que

$$\mathbb{P}_{k+1}(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_{k+1}(T_k < \infty)\mathbb{P}_k(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty)\mathbb{P}_k(T_0 < \infty),$$

et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

(d) Par Markov au temps 1,

$$\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1 = k)\mathbb{P}_k(T_0 < \infty).$$

En utilisant la question précédente il vient donc

$$\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)^k = \frac{p}{1-(1-p)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)},$$

en utilisant pour la dernière égalité que $0 \leq (1-p)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) \leq 1 - p < 1$.
On déduit que $(1-p)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)^2 - \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) + p = 0$ et donc, finalement, que $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) \in \{1, \frac{p}{1-p}\}$.
Lorsque $p > 1/2$, $\frac{p}{1-p} > 1$ de sorte que nécessairement $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = 1$. Il s'ensuit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_k(T_0 < \infty) = 1$. Notons cependant que dans ce cas $\mathbb{E}[Z_1 - 1] = \frac{1-2p}{p} < 0$ et donc par la loi forte des grands nombres $X_n \to -\infty$ p.s., de sorte que $\mathcal{V}_0 < \infty$ p.s. sous $\mathbb{P}_0$ et la chaîne est transiente.
Lorsque $p < 1/2$ à l'inverse, $\mathbb{E}[Z_1 - 1] > 0$, à nouveau par la LFGN, $X_n \to +\infty$ p.s., et la chaîne est à nouveau transiente. Mais alors dans ce cas $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) < 1$ et donc d'après ce qui précède $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = \frac{p}{1-p}$.
Enfin lorsque $p = 1/2$, $\mathbb{E}[Z_1 - 1] = 0$, $\text{Var}[Z_1] = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$, le TCL s'applique et $X_{n_1}/\sqrt{n_1}$ tend en loi vers une gaussienne centrée réduite. Mieux : par indépendance des accroissements, lorsque $n_0 = 0$, et $n_1, n_2 - n_1, \ldots, n_K - n_{K-1}$ tendent vers l'infini, $\big((X_{n_k} - X_{n_{k-1}})/\sqrt{n_k - n_{k-1}}, k = 1, ..., K\big)$ tend vers un K-uplet de gausiennes centrées réduites indépendantes. Quitte à prendre

$n_1 << n_2 << \cdots << n_K$ et en laissant $K \to \infty$, ceci implique que p.s. $\limsup X_n = +\infty$, $\liminf X_n = -\infty$. En particulier il existe p.s. une suite de temps croissants où X prend alternativement des valeurs strictement positives et strictement négatives.

Enfin, comme X ne se déplace vers la gauche que par des pas d'amplitude 1, entre un instant où X prend des valeurs strictement positives et un instant où X prend une valeur strictement négative, X passe forcément par l'origine.

Finalement lorsque $p = 1/2$, $\mathcal{V}_0 = +\infty$ p.s., et donc X est récurrente.

Remarque : Pour toute valeur de $p \in (0,1)$, on verra dans la suite du cours que X n'admet pas de probabilité invariante.

Exercice 2 On considère la chaîne X à temps continu sur $E = \{1,2,3,4,5\}$ de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne X issue de x.

1. Ecrire le noyau de transition Π associé. Décomposer l'espace d'états en classes de communication pour la chaîne Y de noyau Π, on précisera les classes récurrentes et transientes de Y.
2. Que vaut $\mathbb{P}_1(T_4 < \infty)$? $\mathbb{P}_2(T_3 < \infty)$? et $\mathbb{P}_3(T_5 < \infty)$?
3. Que vaut $\mathbb{E}_1[T_3]$? $\mathbb{E}_4[T_3]$? et $\mathbb{E}_3[T_4]$?
4. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & -1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$
et en déduire que
$$Q = ADA^{-1},$$
où D est une matrice diagonale que l'on précisera.
5. Exprimer $P(t)$ à l'aide de A, A^{-1}. En déduire
$$P(\infty) := \lim_{t\to\infty} P(t),$$
Pour ν la mesure uniforme sur $\{1,2,3,4,5\}$ en déduire $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_\nu(X_t = i), i \in \{1,2,3,4,5\}$.

On pourra également commenter le comportement asymptotique de la chaîne sous $\mathbb{P}_j, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

1. On a, par définition,
$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il est clair que 2 est un état absorbant, et donc seul dans sa classe, récurrent. Aucun état ne conduit à 1, qui est donc également seul dans sa classe, mais comme $1 \to 2$ (et aussi, d'ailleurs $1 \to 3, 1 \to 4, 1 \to 5$), 1 est transient. Enfin $3 \to 4 \to 5 \to 3$ de sorte que $\{3,4,5\}$ forme une classe, et on vérifie aisément qu'elle est fermée et donc récurrente.

   Remarque : Comme on le verra plus tard, ce sont les mêmes classes (et de même nature) pour la chaîne à temps continu.
2. On a $\mathbb{P}_1(T_4 < \infty) = \mathbb{P}_1(Y_1 = 3) = 1/2$. Comme 2 est absorbant $\mathbb{P}_2(T_3 < \infty) = 0$. Enfin sous $\mathbb{P}_3$, $5 \in \{Y_1, Y_2\}$ de sorte que $\mathbb{P}_3(T_5 < \infty) = 1$.
3. Sous $\mathbb{P}_1$, $\{T_3 = +\infty\} = \{Y_1 = 2\}$, un événement de probabilité 1/2, et donc $\mathbb{E}_1[T_3] = +\infty$.
   Sous $\mathbb{P}_4$, on a forcément $Y_0 = 4, Y_1 = 5, Y_2 = 3$, de sorte que $T_3 = S_1 + S_2$, avec $S_1 \sim \exp(1)$, et $S_2 \sim \exp(2)$. On déduit que $\mathbb{E}_4[T_3] = \mathbb{E}_4[S_1] + \mathbb{E}_4[S_2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
   Enfin sous $\mathbb{P}_3$, en utilisant Markov au temps $J_1 \sim \exp(2)$, on a
$$\mathbb{E}_3[T_4] = \frac{1}{2} + \mathbb{P}_3(Y_1 = 5)\mathbb{E}_5[T_4].$$
   Pour travailler sous $\mathbb{P}_5$, utilisons à nouveau Markov au premier temps de saut qui suit également une exponentielle de paramètre 2, pour obtenir
$$\mathbb{E}_5[T_4] = \frac{1}{2} + \mathbb{E}_3[T_4].$$
   Finalement
$$\mathbb{E}_3[T_4] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}_3[T_4]),$$
   et on déduit finalement $\mathbb{E}_3[T_4] = 2$.
4. On a bien $Q = ADA^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
5. On a donc
$$P(t) = \exp(tQ) = A\exp(tD)A^{-1} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \exp(-2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-2t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(-3t) \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Quand $t \to \infty$, on a évidemment $\exp(-2t) \to 0, \exp(-3t) \to 0$ de sorte que

$$P(\infty) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\lim_{t \to \infty} (\nu P(t)(1) \ldots \nu P(t)(5)) = \nu P(\infty) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{30} & \frac{7}{30} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}.$$

Lorsque la chaîne part de 2, elle y reste pour toujours, i.e. $\mathbb{P}_2(X_t = 2) = 1$ pour tout $t \geq 0$, (y compris lorsque $t \to \infty$).
D'apr es l'expression des trois dernières lignes de $P(\infty)$, lorsque la chaîne part d'un des états de $\{3, 4, 5\}$, ou d'une distribution initiale qui ne charge que les éléments de cette classe, sa distribution au temps t tend vers une distribution uniforme sur $\{3.4.5\}$.
Enfin. si X part de l'état 1, elle quitte cet état au bout d'un temps exponentiel de paramètre 2, et va alors en 2 (et y reste pour toujours) avec probabilité $1/2$, sinon elle va dans la classe $\{3.4.5\}$, où sa distribution en temps long est uniforme sur les 3 états de cette classe (ce que confirme la première ligne de $P(\infty)$).
Partir de ν revient à choisir l'un des 5 points de départ uniformément au hasard. Ainsi, on a bien, par exemple, que

$$\mathbb{P}_\nu(X_t = 2) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_\nu(Y_0 = 2) + \mathbb{P}_\nu(Y_0 = 1, Y_1 = 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

comme obtenu par le calcul ci-dessus.
Remarque : Les probabilités invariantes extrêmales de notre chaîne (une pour chaque classe récurrente positive) sont δ_2 et la mesure uniforme sur $\{3.4.5\}$. Pour ces deux mesures (et leurs combinaisons linéaires convexes) on vérifie en effet sans mal que $\pi Q = 0$.