Lundi 25 octobre 2021

Université de Paris **Chaînes de Markov**

Durée : 1 heure.
Les documents, calculatrices, téléphones ne sont pas autorisés

Exercice 1 Soient

- E_1, E_2 deux espaces d'états (au plus dénombrables) disjoints.
- deux états “racines” $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$
- X_1 une chaîne à temps continu sur E_1, de générateur Q_1, irréductible, réversible, récurrente positive.
- X_2 une chaîne à temps continu sur E_1, de générateur Q_1, irréductible, réversible, récurrente positive.
- Pour $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, la chaîne X sur $E = E_1 \cup E_2$, à temps continu, de générateur Q tel que

$$Q(x_1, x_2) = \alpha_1,\ Q(x_2, x_1) = \alpha_2, \qquad Q(x_1, x_1) = Q_1(x_1, x_1) - \alpha_1,\ Q(x_2, x_2) = Q_2(x_2, x_2) - \alpha_2,$$

et pour tout $(x, y) \neq (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2)$,

$$Q(x, y) = \mathbb{1}_{\{x \in E_1, y \in E_1\}} Q_1(x, y) + \mathbb{1}_{\{x \in E_2, y \in E_2\}} Q_2(x, y).$$

On remarquera en particulier que tant qu'elle se trouve en un état de $E_1 \setminus \{x_1\}$ (resp. $E_2 \setminus \{x_2\}$ la chaîne X suit la dynamique de X_1 (resp. X_2), mais lorsqu'elle est en x_1 (resp. x_2), elle a une probabilité $\alpha_1/(\alpha_1 - Q_1(x_1, x_1)) > 0$ d'effectuer son prochain saut vers x_2 (resp. x_1).

1. Justifier qu'il existe une unique mesure de probabilité λ_1 sur E_1 (resp. λ_2 sur E_2) invariante pour X_1 (resp. X_2).
2. Montrer que X est irréductible, récurrente.
3. Montrer, pour une valeur de $\gamma \in (0, 1)$ qu'on explicitera, que $\lambda = \gamma\lambda_1 + (1 - \gamma)\lambda_2$ est une probabilité invariante pour X. En déduire que

$$\mathbb{E}_{x_1}[T_{x_1}^+] = \frac{1}{\alpha_1 - Q_1(x_1, x_1)} \frac{\alpha_1\lambda_1(x_1) + \alpha_2\lambda_2(x_2)}{\alpha_2\lambda_2(x_2)}.$$

4. Déterminer le comportement asymptotique de la proportion du temps passé par X dans E_1.
5. On suppose que $E_1 = \mathbb{N}$, et que Q_1 tel que

$$Q_1(n, n) = -1, n \in \mathbb{N}, \quad Q_1(0, 1) = 1,\ Q_1(n, n+1) = 1/4, Q_1(n, n-1) = 3/4, n \in \mathbb{N}^*$$

On suppose que $E_2 = \mathbb{Z}_-^*$, et Q_2 est tel que

$$Q_2(n, n) = -1, n \in \mathbb{Z}_-^*, \quad Q_2(-1, -2) = 1,\ Q_2(n, n+1) = 2/3, Q_2(n, n-1) = 1/3, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2.$$

On pose $x_1 = 0, x_2 = -1$, et on fixe $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$

(a) Déterminer λ_1, λ_2.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de α_1, α_2 le temps passé par X dans $\mathbb{N}$ et le temps passé par X dans $\mathbb{Z}_-^*$ s'équilibrent en temps long ?

1. X_1 est irréductible, récurrente positive, elle possède, d'après le théorème d'existence et d'unicité d'une telle mesure, une unique probabilité invariante, on rappelle (en notant $\mathbb{P}^{(1)}$ la loi de X_1) qu'il s'agit de

$$\lambda_1(z) = \frac{1}{\mathbb{E}^{(1)}_{x_1}[T^+_{x_1}]}\mathbb{E}^{(1)}_x\left[\int_0^{T^+_{x_1}} \mathbb{1}_{\{X_s=z\}}ds\right], z \in E.$$

On peut évidemment faire le même raisonnement pour X_2.

2. Pour tout $y \in E_1 \setminus \{x_1\}$ on a $y \leftrightarrow x_1$ (resp. pour tout état de $y \in E_2 \setminus \{x_2\}$ on a $y \leftrightarrow x_2$) car X_1 (resp. X_2) est irréductible, et d'après la définition de Q, $\Pi(x,y) = \Pi_1(x,y) \ \ \forall x \in E_1 \setminus \{x_1\}, y \in E_1$ et $\Pi_1(x_1,y) > 0 \Rightarrow \Pi(x,y) > 0$ pour tout $y \in E_1$. Autrement dit la classe de communication de x_1 pour X contient E_1, celle de x_2 contient E_2.

   Comme $\Pi(x_1,x_2) > 0$ et $\Pi(x_2,x_1) > 0$ on a $x_1 \leftrightarrow x_2$, et donc finalement, la chaîne X est irréductible.

   Considérons alors une trajectoire de la chaîne démarrée en x_1. Le lieu de son premier saut est dans $\{x_2\} \cup E_1 \setminus \{x_1\}$.

   Si elle effectue son premier saut en un $y \in E_1 \setminus \{x_1\}$, alors p.s le temps de retour en x_1 est fini car il correspond au même temps pour X_1, qu'on a supposée récurrente. Si elle effectue son premier saut en x_2, par la propriété de Markov aux temps de retours successifs en x_2, le nombre de retours en x_2 avant de sauter en x_1 est géométrique de paramètre $\mathbb{P}_{x_2}(T_{x_1} < T^+_{x_2}) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - Q_2(x_2,x_2)}$. Les éventuelles excursions dans $E_2 \setminus \{x_2\}$ avant de toucher x_1 sont toutes de longueur finie p.s car X_2 est récurrente, et on conclut que le temps de retour en x_1 est fini p.s. dans ce cas également.

   Remarque : une adaptation simple de cette preuve permet de constater que X est même récurrente positive. On pouvait aussi (plus simplement) raisonner avec la chaîne de sauts pour voir que $\mathbb{P}_{x_2}[T_{x_1} < \infty] = 1$.

3. Pour que λ, Q satisfassent les équations de balance détaillée il suffit de vérifier

$$\lambda(x_1)Q(x_1,x_2) = \lambda(x_2)Q(x_2,x_1) \qquad (*)$$

   En effet les autres équations de balance détaillée (pour un couple d'états $\{x,y\} \neq \{x_1,x_2\}$ sont automatiquement vérifiées, ou bien en utilisant la réversibilité de X_1, X_2, ou bien parce que $\{x,y\}$ sont tels que $Q(x,y) = Q(y,x) = 0$ — par exemple lorsque $x \in E_1 \setminus \{x_1\}, y \in E_2$).

   Pour satisfaire (*) il faut et il suffit que

$$\gamma\lambda_1(x_1)\alpha_1 = (1-\gamma)\lambda_2(x_2)\alpha_2,$$

   et il faut donc choisir

$$\gamma = \frac{\alpha_2\lambda_2(x_2)}{\alpha_1\lambda_1(x_1) + \alpha_2\lambda_2(x_2)},$$

   qui est bien un élément de $(0,1)$. On a alors que λ, Q satisfont les équations de balance détaillée, et donc $\lambda Q = 0$. Comme $\lambda(E) = 1$, on a trouvé une probabilité invariante.

Enfin puisque X est récurrente, cette probabilité invariante est unique (et X est récurrente positive). Une autre façon d'écrire cette unique probabilité invariante est

$$\lambda(z) = \frac{1}{\mathbb{E}_{x_1}[T_{x_1}^+]}\mathbb{E}_{x_1}\left[\int_0^{T_{x_1}^+} \mathbb{1}_{\{X_s=z\}}ds\right],$$

et donc en particulier $\gamma\lambda_1(x_1) = \lambda(x_1) = \frac{1}{q_{x_1}\mathbb{E}_{x_1}[T_{x_1}^+]}$. On obtient donc

$$\mathbb{E}_{x_1}[T_{x_1}^+] = \frac{1}{q_{x_1}}\frac{\alpha_1\lambda_1(x_1)+\alpha_2\lambda_2(x_2)}{\alpha_2\lambda_2(x_2)},$$

et on conclut à la formule souhaitée.

4. D'après le théorème ergodique, l'asymptotique de la proportion du temps passé dans E_1 est donné par $\lambda(E_1) = \gamma$

5. (a) Comme on l'a vu en cours, quitte à utiliser la réversibité on trouve que

$$\lambda_1(0) = \frac{C}{4}, \lambda_1(n) = \frac{C}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*,$$

et donc en choisissant C pour que $\lambda_1(E_1) = 1$ on obtient

$$\lambda_1(0) = \frac{1}{3}, \lambda_1(n) = \frac{4}{3^{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$\lambda_2(-1) = \frac{1}{4}, \lambda_2(n) = 3\cdot 2^{n-1}, n \leq -2$$

(b) Notons que dans cet exemple

$$\gamma = \frac{\alpha_2/4}{\alpha_1/3+\alpha_2/4}$$

Pour que $\gamma = 1/2$ il faut et il suffit que $\alpha_1/3 = \alpha_2/4$, i.e. ce sont les couples $\{(\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha, \frac{4}{3}\alpha), \alpha > 0\}$ qui conviennent.

Exercice 2

1. Soit X la chaîne sur $E = \mathbb{N}$ (de naissance et mort) de générateur Q tel que

$$q_0 = q_{0,1} = 1, \quad q_n = 2(n+1)^2, q_{n,n+1} = q_{n,n-1} = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Exprimer le noyau de sauts associé. Vérifier que X est irréductible. Est-elle récurrente ? transiente ?

(b) Montrer que $\lambda = \frac{1}{(n+1)^2}, n \in \mathbb{N}$ est une mesure invariante de X.

(c) Montrer que $\mathbb{E}_0[T_0^+] = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) La chaîne X est-elle explosive ?

2. Que dire de la chaîne X sur $\mathbb{N}$ de générateur Q tel que

$$q_0 = q_{0,1} = 1, \quad q_n = 2(n+1)^2, q_{n,n+1} = \frac{4}{3}(n+1)^2, q_{n,n-1} = \frac{2}{3}(n+1)^2, n \in \mathbb{N}^*?$$

1. (a) Notons que le noyau de sauts associé est

$$\Pi(0,1) = 1, \qquad \Pi(n,n-1) = \Pi(n,n+1) = 1/2, \; n \in \mathbb{N}^*,$$

i.e. celui de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{N}$, réfléchie en 0. Il va de soi que $0 \to 1 \to \dots n-1 \to n \to n-1 \to \dots \to 1 \to 0$ de sorte que $0 \leftrightarrow n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la chaîne est bien irréductible. Il est bien connu que la marche aléatoire simple symétrique est récurrente, et donc X également.

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda(n)Q(n,n-1) = \frac{1}{(n+1)^2}(n+1)^2 = 1 = \lambda(n-1)Q(n-1,n),$$

de sorte que λ, Q vérifient les équations de balance détaillée, et donc $\lambda Q = 0$.

(c) Notons que $\lambda(\mathbb{N}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$, de sorte que $\frac{6}{\pi^2}\lambda$ est une probabilité invariante de X. Comme X est irréductible, récurrente, on déduit qu'elle est récurrente positive, et que $\frac{6}{\pi^2}\lambda$ est son unique probabilité invariante. On a donc

$$\lambda(n) := \frac{1}{\mathbb{E}_0[T_0^+]}\mathbb{E}_0\left[\int_0^{T_0^+} \mathbb{1}_{\{X_s = n\}} ds\right],$$

en particulier

$$\lambda(0) = \frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{q_0 \mathbb{E}_0[T_0^+]} = \frac{1}{\mathbb{E}_0[T_0^+]},$$

ce qui conduit à l'égalité souhaitée.

(d) La chaîne est récurrente, ce qui garantit qu'elle n'est pas explosive.

2. La noyau de sauts associés est

$$\Pi(0,1) = 1, \qquad \Pi(n,n-1) = 1/3, \; \Pi(n,n+1) = 2/3, \; n \in \mathbb{N}^*,$$

i.e. celui de la marche aléatoire simple asymétrique sur $\mathbb{N}$, réfléchie en 0. X est donc toujours irréductible, mais cette fois transiente. Les mesures invariantes pour X sont de la forme $\mu(0) = \frac{C}{6}$, $\quad \mu(n) = C\frac{2^n}{(n+1)^2}, n \in \mathbb{N}^*$, ($\mu$ de la forme ci-dessus et Q satisfont les équations de balance détaillée). Enfin, on a $Y_n/n \to \frac{1}{3}$ p.s. par LFGN, de sorte que e.g. $Y_n \geq \lceil n/4 \rceil$ p.s. à partir d'un certain rang, disons $n_0(\omega)$. Or $(1/q_n)_{n\geq 0}$ décroît, de sorte que pour tout $n \geq n_0(\omega)$ on a $\frac{1}{q_{Y_n}} \leq \frac{1}{q_{\lceil n/4 \rceil}} \leq \frac{1}{2(n/4+1)^2}$. Mais $\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{q_{\lceil n/4 \rceil}} \leq \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2(n/4+1)^2} < \infty$. On a donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{q_{Y_n}} < \infty$ p.s., et il est classique (voir exercice 5) que ceci implique que $\zeta = \sum_{n\geq 0} S_n < \infty$ p.s.

On conclut que la chaîne est explosive, avec p.s. $\zeta < \infty$.