Université Paris Diderot

Lundi 14 novembre 2016

Chaînes de Markov

Examen

Documents autorisés, calculatrices et téléphones interdits.

Vous traiterez, **au choix**, Exercice 1 + Problème **ou** Exercice 2 + Problème.
Barême approximatif : 8 points pour l'exercice choisi + 12 points pour le Problème.

Exercice 1 On va considèrer une file d'attente dans laquelle les clients peuvent arriver groupés, mais comme d'habitude le serveur ne peut traiter qu'un seul client à la fois.
On suppose que les temps d'arrivée des groupes de clients sont les sauts d'un processus de Poisson de paramètre 1.
Les tailles des groupes de clients successifs sont donnés par une suite $(G_1, G_2, ...)$ de variables i.i.d suivant la loi géométrique de paramètre 1/3.
On suppose les temps de service des clients successifs indépendants des $\{G_i, i \geq 1\}$ et i.i.d suivant la loi exponentielle de paramètre $\gamma > 0$.
Enfin on note X_t le nombre de clients présents dans la file à l'instant t. On souhaite étudier la chaîne $(X_t, t \geq 0)$.

1. Quel est l'espace d'état de X ? Montrer que son générateur Q vérifie en particulier
$$q_0 = 1, q_{0k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*.$$
Pour $k \geq 1$, déterminer $q_{k\ell}, \ell \in \mathbb{N}$.
Déterminer le noyau de sauts Π associé (on notera $(Y_n, n \geq 0)$ la chaîne des sauts). La chaîne X est-elle irréductible ?
2. Pour $\ell \geq 1$, calculer $\mathbb{E}_\ell[Y_1 - Y_0]$.
3. Montrer que si on note $T_0 = \inf\{k \geq 0 : Y_k = 0\}$ on a $\mathbb{E}_k[T_0] = k\mathbb{E}_1[T_0]$ et
$$\mathbb{E}_1[T_0] = 1 + \frac{4}{1+\gamma}\mathbb{E}_1[T_0].$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne soit récurrente positive.
4. (*) Dans le cas récurrent positif, déterminer alors la probabilité invariante λ de la chaîne. On pourra chercher une telle probabilité sous la forme
$$\lambda(0) = C, \lambda(k) = C'p^{k-1}, k \geq 1,$$
pour des constantes C, C', p bien choisies.

1. La chaîne X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le temps d'attente en 0 est donné par une variable exponentielle de paramètre 1, et en ce temps la chaîne saute en $G \sim \text{Geom}(1/3)$, autrement dit on a bien
$$q_0 = 1, q_{0k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*.$$
Le temps d'attente en $\ell > 0$ est donné par le mininum entre temps de service ($\sim \exp(\gamma)$) et le temps d'arrivée du prochain groupe de clients. La chaîne saute en -1 avec probabilité $\gamma/(\gamma+1)$ et sinon elle saute en $\ell + G$ où $G \sim \text{Geom}(1/3)$. Autrement dit, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$
$$q_\ell = 1 + \gamma, \quad q_{\ell(\ell-1)} = \gamma, q_{\ell(\ell+k)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

Le noyau de sauts Π associé à Q est donné par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_{0k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_{\ell(\ell-1)} = \frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad \pi_{\ell(\ell+k)} = \frac{1}{\gamma+1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$ la trajectoire de la chaîne de sauts Y :
$0 \to k \to (k-1) \to (k-2) ... \to 1 \to 0$ a probabilité $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k > 0$, de sorte que $0 \leftrightarrow k$. On conclut que Y et X sont irréductibles.

2. D'après ce qui précède, si $\ell \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\ell[Y_1] &= \frac{\gamma}{\gamma+1}(\ell-1) + \frac{1}{\gamma+1}\sum_{k\geq 1}(\ell+k)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
&= \ell + \frac{3-\gamma}{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov au temps k, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n \mid Y_n \neq 0] = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}.$$

Autrement dit, quand elle ne se trouve pas à l'origine, la marche aléatoire (Y_n) dérive vers la droite si $\gamma < 3$, et vers la gauche si $\gamma > 3$. On s'attend donc à ce que la marche soit récurrente positive si $\gamma > 3$, récurrente nulle si $\gamma = 3$ et transiente si $\gamma < 3$.

3. Toute trajectoire de Y allant de k à 1 doit passer par $k-1$. Par la propriété de Markov forte en T_{k-1}, et par le fait que $(X_0 - k + 1, ..., X_{T_{k-1}} - k + 1)$ a sous $\mathbb{P}_k$ la même loi que $(X_0 - 1, ..., X_{T_1} - 1)$ sous $\mathbb{P}_1$, on a

$$\mathbb{E}_k[T_0] = \mathbb{E}_k[T_{k-1}] + \mathbb{E}_{k-1}[T_0] = \mathbb{E}_1[T_0] + \mathbb{E}_{k-1}[T_0]$$

et une récurrence immédiate permet alors de conclure que $\mathbb{E}_k[T_0] = k\mathbb{E}_1[T_0]$.
Par Markov au temps 1, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1[T_0] &= 1 + \frac{1}{\gamma+1}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\mathbb{E}_{1+k}[T_0] \\
&= 1 + \frac{4}{\gamma+1}\mathbb{E}_1[T_0]
\end{aligned}$$

comme souhaité.
Lorsque $\gamma > 3$ on trouve alors

$$\mathbb{E}_1[T_0] = \frac{\gamma+1}{\gamma-3},$$

et donc

$$\mathbb{E}_0[T_0^+] = 1 + 3\mathbb{E}_1[T_0] = \frac{4\gamma}{\gamma-3} < \infty.$$

A contrario lorsque $\gamma \leq 3$ la seule solution (positive) de l'équation est $\mathbb{E}_1[T_0] = +\infty$.
On conclut que la chaîne Y (donc la chaîne X) est récurrente positive ssi $3 < \gamma$.

4. On va traiter une question un peu plus générale que celle de l'énoncé et effectuer la recherche des *mesures* stationnaires de la chaîne.
On va commencer par chercher une telle mesure sous la forme suggérée avec $\mu(0) = 1$, i.e. $\mu(0) = 1, \mu(1) = C_1, \mu(k) = C_1 p^{k-1}$, $k \geq 2$.

Comme la chaîne est irréductible, sa mesure stationnaire est unique à constante multiplicative près, et donc si on vérifie que $Q\mu = 0$ on aura l'existence d'une probabilité stationnaire ssi la masse totale de μ est finie (et il sera aisé de la déduire de μ.
On souhaite donc satisfaire $Q\mu = 0$. Tout d'abord $\mu Q(0) = -1 + C_1\gamma$ de sorte qu'on doit poser $C_1 = \frac{1}{\gamma}$.
On déduit

$$\mu Q(1) = \frac{1}{3} - \frac{1+\gamma}{\gamma} + \gamma\mu(2),$$

de sorte que

$$\mu(2) = C_1 \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{3}\right),$$

et on doit donc poser $p = \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{3}$. On remarque au passage que $3 < \gamma \Leftrightarrow p \in (0,1)$, et donc que la masse totale de μ est finie ssi $3 < \gamma$. Notons que cette masse vaut alors

$$\sum_{k\geq 1} \mu(k) = 1 + \frac{1}{(\gamma)1-p} = \frac{\gamma}{\gamma-3},$$

et que donc il faudra poser $\lambda = \frac{\gamma-3}{\gamma}\mu$.
Reste à vérifier $\mu Q(\ell) = 0$ pour $\ell \geq 2$. On a

$$\mu Q(\ell) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \mu(k) - (1+\gamma)\mu(\ell) + \frac{\gamma}{1+\gamma}\mu(\ell+1)$$

Cependant

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\ell-1} \mu(k)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} &= \frac{C_1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-2} \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\frac{3}{2}p\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3\gamma}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-2} \frac{\left(\frac{3}{2}p\right)^{\ell-1}-1}{\frac{3}{2}p-1}\end{aligned}$$

Or $\frac{3}{2}p - 1 = \frac{3}{2\gamma}$ donc

$$\sum_{k=1}^{\ell-1} \mu(k)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} = \frac{1}{3}\left(p^{\ell-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\right),$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}\lambda Q(\ell) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1} + \frac{1}{3}\left(p^{\ell-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\right) - \frac{1+\gamma}{\gamma}p^{\ell-1} + p^{\ell} \\ &= p^{\ell-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1+\gamma}{\gamma} + p\right) = 0,\end{aligned}$$

et on conclut, comme souhaité, que μ est bien une mesure invariante.
L'ensemble des mesures stationnaires de notre chaîne est donc $\{a\mu, a > 0\}$, et l'existence d'une probabilité stationnaire de la chaîne est donc équivalent à la finitude de la masse totale de μ, i.e. à $\gamma > 3$.
On retrouve au passage le fait que la chaîne est récurrente positive ssi $\gamma > 3$, et de plus, on a montré que dans ce cas la distribution stationnaire de la chaîne est $\lambda = \frac{\gamma-3}{\gamma}\mu$, i.e.

$$\lambda(0) = \frac{\gamma-3}{\gamma}, \quad \lambda(k) = \frac{\gamma-3}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \geq 1.$$

Exercice 2 Soit E au plus dénombrable, $Q = \{q_{xy}, (x, y) \in E\}$ un générateur. Pour $x \in E$, et $f : E \to \mathbb{R}$ satifaisant la condition d'intégrabilité $\sum_y |q_{x,y} f(y)| < \infty$ on note

$$Qf(x) = \sum_{y \in E} q_{xy} f(y), x \in E.$$

Pour $t \geq 0$, $x, y \in E$, on note $p_t(x, y) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$. Pour $f : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathbb{E}_x[|f(X_t)|] < \infty$ on note

$$P(t)f(x) = \sum_{y \in E} p_t(x, y) f(y) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$$

On rappelle que $(P(t) = \{p_t(x, y), (x, y) \in E^2\}, t \geq 0)$ est tel que $P(0) = Id, P'(t) = P(t)Q, t \geq 0$. Dans l'ensemble de l'exercice on supposera que les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ utilisées satisfont systématiquement les conditions d'intégrabilité adéquates pour que $P(t)f, Qf, QP(t)f$ soient bien définies.

1. (*) Soit $(X_t, t \geq 0)$ une chaîne à temps continu de générateur Q, ussue de la probabilité λ, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ et $f : E \to \mathbb{R}$. Justifier que

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P(t - s) f(X_s).$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et f telle que $Qf = \alpha f$. Montrer que pour $x \in E, t \geq 0$, $P'(t)f(x) = \alpha P(t) f(x)$. En déduire qu'on a alors

$$P(t)f = \exp(\alpha t) f,$$

   et montrer alors que $(M_t^f := f(X_t) \exp(-\alpha t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

3. Dans cette question on considère $(S_t, t \geq 0)$ la marche simple symétrique à temps continu sur $\mathbb{Z}$, qui à taux 1, effectue un déplacement de 1 (resp. -1) avec probabilité $1/2$.
   (a) Exprimer le générateur Q de S.
   (b) Soit $\mu > 0$, $\lambda = \ln(\mu)$. Montrer que $f_\lambda(x) = \exp(\lambda x), x \in \mathbb{Z}$ vérifie

$$Qf_\lambda = \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\mu} - 1\right) f_\lambda.$$

   (c) En déduire que

$$\left(M_t := \exp\left(\lambda S_t - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\mu} - 1\right) t\right), t \geq 0\right)$$

   est une martingale dans la filtration naturelle de S.
   (d) Soit $T_1 = \inf\{t \geq 0 : S_t = 1\}$. Justifier que si $\mu > 1$, sous $\mathbb{P}_0$, $(M_{t \wedge T_1}, t \geq 0)$ est une martingale bornée. En déduire finalement que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\mathbb{E}_0[\exp(-\alpha T_1)] = \frac{1}{1 + \alpha + \sqrt{2\alpha + \alpha^2}}.$$

1. Pour $x \in E$, la propriété de Markov au temps s affirme que sachant $X_s = x$, $(\widetilde{X}_u := X_{s+u}, u \geq 0)$ est Markov de générateur Q issu de x, et indépendant de $\mathcal{F}_s$. On a

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] &= \sum_{x\in E} \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t)\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{x\in E} \mathbb{E}_x[f(\widetilde{X}_{t-s})]\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \\
&= \sum_{x\in E} \left(\sum_{y\in E} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{t-s}=y)f(y)\right)\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \\
&= \sum_{x\in E} \left(\sum_{y\in E} p_{t-s}(x,y)f(y)\right)\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \\
&= \sum_{x\in E} P(t-s)f(x)\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} = P(t-s)f(X_s),
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Remarques :

• en toute rigueur, la loi du processus $(X_t, t\geq 0)$ dépend de sa distribution initiale, disons ν, et on devrait donc plutôt écrire $\mathbb{E}_\nu[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P(t-s)f(X_s)$. Cela n'affecte cependant en rien le calcul précédent, qui exprime simplement comment on calcule l'espérance conditionnelle de $f(X_t)$ sachant $\mathcal{F}_s$, qui grâce à Markov est l'espérance conditionnelle de $f(X_t)$ sachant X_s. Notons cependant que la loi de X_s, et donc celle de $P(t-s)f(X_s)$ dépendent bien entendu de la mesure initiale ν.

• On utilise que pour tout x et pour tout $t\geq 0$, $f(X_t)\in \mathbb{L}^1$ à deux reprises dans le calcul : d'abord pour assurer que notre espérance conditionnelle est bien définie, puis pour s'assurer que $P(t-s)f(x)$ est bien défini pour tout x, et donc en X_s.

2. On a par définition de $P(t)$,

$$P(0)f = f, \qquad P'(t)f = P(t)Qf = \alpha P(t)f, t\geq 0,$$

de sorte que pour $x\in E$, $t\to g(t) = P(t)f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$g(0) = f(x), \qquad g'(t) = \alpha g(t),$$

et donc $g(t) = \exp(\alpha t)f(x)$. Comme le raisonnement est valable pour tout x on conclut que $P(t)f = \exp(\alpha t)f$.

La condition de mesurabilité de M_t^f est évidente, son intégrabilité provient de nos hypothèses d'intégrabilité sur f (qui font que $f(X_t)\in\mathbb{L}^1$)

Enfin d'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X_t)\exp(-\alpha t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= P(t-s)f(X_s)\exp(-\alpha t) \\
&= \exp(\alpha(t-s))f(X_s)\exp(-\alpha t) = M_s^f
\end{aligned}$$

comme souhaité.

3. (a) Le générateur Q est tel que pour tout $x\in\mathbb{Z}$,

$$q_x = 1, \quad q_{x(x-1)} = q_{x(x+1)} = 1/2$$

On a donc pour $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$,

$$Qf(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1)+f(x-1)-2f(x)\right).$$

(b) Il est évident que Qf_λ est bien défini. Par ailleurs, le théorème central limite permet d'affirmer que pour des constantes c, C adéquates, on a $\mathbb{P}_0(|S_t| \geq a) \leq C \exp(-ca^2/(2t))$. Il découle facilement que $\sum_y p_t(x,y)\exp(\lambda y) < \infty$, et que f_λ satisfait les conditions d'intégrabilité qui permettent de définir $P(t)f, P(t)Qf$. D'après (a)

$$Qf_\lambda(x) = \exp(\lambda x)\frac{1}{2}\left(e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2\right) f_\lambda(x).$$

Posons donc $\alpha = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2\right)$, d'après la question 2,

$$(f_\lambda(S_t)\exp(-\alpha t), t \geq 0)$$

est une martingale dans la filtration naturelle de S.

(c) La martingale arrêtée $M_{t\wedge T_1}$ reste bien une martingale. Si $\mu > 1, \lambda > 0$ et donc $M_{t\wedge T_1} = \exp(\lambda S_{t\wedge T_1} - \alpha t) \leq \exp(\lambda)$ reste effectivement bornée. On peut donc appliquer le théorème d'arrêt et on obtient

$$\mathbb{E}[\exp(-\alpha T_1)] = \frac{1}{\mu}$$

Reste à voir que si $\alpha > 0$ est fixé,

$$\alpha = \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\mu} - 1 \Leftrightarrow \mu^2 - 2(1+\alpha)\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu \in \{\mu_- = 1+\alpha-\sqrt{\alpha+\alpha^2}, \mu_+ = 1+\alpha+\sqrt{2\alpha+\alpha^2}\}.$$

Il est facile de voir que $\mu_- < 1, \mu_+ > 1$ et comme $\mu > 1$ on conclut que $\mu = \mu_+$, et que

$$\mathbb{E}[\exp(-\alpha T_1)] = \frac{1}{1+\alpha+\sqrt{2\alpha+\alpha^2}}.$$

Problème

I. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, dans cette partie on considère X, la marche paresseuse sur le graphe complet $\mathcal{G}_n$ à n sommets, et on note P son noyau de transition.

On note $v_i, i = 1, ..., n$ les noeuds de $\mathcal{G}_n$, de sorte que ses $n(n-1)/2$ arêtes sont $\{\{v_i, v_j\}, 1 \leq i < j \leq n\}$.

1. Exprimer P.
2. La chaîne est-elle irréductible ? apériodique ? Donner toutes ses probabilités stationnaires.
3. On considère $x, y \in \mathcal{G}_n$, des variables $(U_t, t \in \mathbb{N})$ i.i.d uniformes sur $[0,1]$ et on construit le processus (X, Y) de la manière suivante :
   (a) $X_0 = x, Y_0 = y$.
   (b) Si au temps $t \geq 0$, $X_t = Y_t = v$, alors on tire X_{t+1}, indépendamment de ce qui précède suivant $P(v, \cdot)$ et on pose $Y_{t+1} = X_{t+1}$.
   (c) Si au temps t, $X_t \neq Y_t$ on pose

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = \begin{cases} (v_i, v_i) & \text{si } \{\frac{i-1}{n}(1/2 + 1/2(n-1)) \leq U_{t+1} < \frac{i}{n}(1/2 + 1/2(n-1)) \\ (X_t, Y_t) & \text{si } U_{t+1} \geq 1/2 + 1/2(n-1) \end{cases}.$$

   Montrer que (X, Y) réalise un couplage de deux marches 1/2-paresseuses sur $\mathcal{G}_n$ issues respectivement de x, y. Montrer que lorsque $x \neq y$, τ_{couple} est une variable géométrique de paramètre $\frac{n}{2(n-1)}$. En déduire que $t_{\text{mix}} \leq \frac{8(n-1)}{n}$. Quel est l'ordre de grandeur de t_{mix} lorsque $n \to \infty$?

II. Dans cette partie on va considérer X une marche asymétrique, (1/2)-paresseuse sur le cycle $\mathcal{C}_n$ à n sommets.

Précisément, on fixe $p \in (1/2, 1)$. Si $\{w_1, ..., w_n\}$ désignent les sommets de $\mathcal{C}_n$, ses arêtes sont $\{\{w_1, w_n\}, \{w_i, w_{i+1}\}, 1 \leq i \leq n-1\}$, et le noyau de X est donné par

$$P(w_i, w_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } i = j \\ p/2 \text{ si } j = i+1 \text{ ou si } i = n, j = 1 \\ (1-p)/2 \text{ si } j = i-1 \text{ ou si } i = 1, j = n \end{cases}.$$

1. Grâce à un argument de couplage, établir que
$$t_{\text{mix}} \leq n^2.$$
2. En utilisant le TCL pour comprendre le comportement asymptotique de la loi de X_t, établir une borne inférieure pour t_{mix}. Peut-on déterminer l'ordre de grandeur de t_{mix} ?

III On considère (pour $n \geq 2$) le graphe $\mathcal{H}_n$ formé en identifiant un point de $\mathcal{G}_n$ et un point de $\mathcal{C}_n$.

Précisément, on pose par exemple $x = v_1 = w_1$, les noeuds du graphe $\mathcal{H}_n$ sont alors $\{x = v_1 = w_1, v_j, w_j, 2 \leq j \leq n\}$ et ses arêtes sont $\{(v_i, v_j), 1 \leq i < j \leq n, (w_1, w_n), (w_i, w_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1\}$. On note $\mathcal{G}_n^* = \mathcal{G}_n \setminus \{x\}$, $\mathcal{C}_n^* = \mathcal{C}_n \setminus \{x\}$.

On considère alors X une marche (1/2)-paresseuse sur $\mathcal{H}_n$ de noyau P tel que, si on note P_I, resp. P_{II} les noyaux respectifs des chaînes en I, resp II., on a pour tout $2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $P(v_i, v_j) = P_I(v_i, v_j), P(w_i, w_j) = P_{II}(w_i, w_j)$ et enfin

$$P(x, x) = 1/2, P(x, w_2) = \frac{p}{n+1}, P(x, w_n) = \frac{(1-p)}{n+1}, P(x, v_i) = \frac{1}{2(n+1)}, 2 \leq i \leq n.$$

1. La chaîne est-elle irréductible ? apériodique ? Combien possède-t-elle de probabilités stationnaires (on ne demande pas de les déterminer) ?
2. Montrer que
$$\mathbb{P}_x(T_{\mathcal{C}_n^*} < T_{\mathcal{G}_n^*}) = 2/(n+1).$$
3. Montrer que pour tout $i \geq 2$, la loi de T_x sous $\mathbb{P}_{v_i}$ est une géométrique de paramètre $\frac{1}{2(n-1)}$.
(*) En déduire que, toujours sous $\mathbb{P}_{v_i}$ la loi de $T_{\mathcal{C}_n^*}$ est bornée inférieurement par $\sum_{k=1}^{\Gamma} G_k$, où les $(G_k, k \geq 1)$ sont des variables géométriques i.i.d de paramètre $1/(2(n-1))$ et Γ est indépendante des $(G_k, k \geq 1)$ et suit quant à elle une loi géométrique de paramètre $2/n$.
En déduire que pour $C > 0$ fixé, $\mathbb{P}_{v_i}(T_{\mathcal{C}_n^*} \leq Cn) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Montrer que pour $c > 0$, et pour tout $i \in \{2, ..., n\}$,
$\mathbb{P}_{w_i}(T_{\mathcal{G}_n^*} \leq (2(p-1/2)^{-1} + c)n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
5. On considère le couplage (X, Y) suivant de chaînes de noyau P. On se donne $(\xi_t)_t$ i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et indépendamment, $(U_t)_t$ i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors pour tout $t \in \mathbb{N}$,
   (a) si $X_t = Y_t = y$, indépendamment de ce qui précède on tire $X_{t+1} \sim P(y, \cdot)$ (par exemple à l'aide de U_{t+1}) et on pose $Y_{t+1} = X_{t+1}$.
   (b) Si $X_t \in \mathcal{G}_n^*, Y_t \in \mathcal{G}_n^*$, on utilise le même couplage qu'en I., en particulier si $X_t \neq Y_t$, on pose
   $$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = \begin{cases} (v_i, v_i) & \text{si } \{\frac{i-1}{n}(1/2 + 1/2(n-1)) \leq U_{t+1} < \frac{i}{n}(1/2 + 1/2(n-1)) \\ (X_t, Y_t) & \text{si } U_{t+1} \geq 1/2 + 1/2(n-1) \end{cases}.$$
   (c) Si $X_t = x \neq Y_t = y$ et $x \in \mathcal{C}_n$ ou $y \in \mathcal{C}_n$ et si $U_{t+1} \leq 1/2$, on choisit X_{t+1}, indépendamment de ce qui précède, uniformément parmi les voisins de X_t (par exemple à l'aide de la valeur de U_{t+1}), et on pose $Y_{t+1} = Y_t$. Si au contraire $U_{t+1} > 1/2$, on choisit Y_{t+1}, indépendamment de ce qui précède, uniformément parmi les voisins de Y_t, et on pose $X_{t+1} = X_t$.

   Montrer qu'on peut trouver $G \sim \text{Geom}(1/2 + 1/n)$ telle que
   $$\tau_{\text{couple}} \leq \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{G}_n^*, Y_t \in \mathcal{G}_n^*\} + G$$
6. Montrer que pour tous $y, z \in \mathcal{H}_n$, et une constante C qui ne dépend que de p, on a
$$\mathbb{E}_{z,y}[\tau_{\text{couple}}] \leq Cn.$$
7. Quel est l'ordre de grandeur de t_{mix} ? Comparer aux résultat de la partie II, et commenter.

I. 1. Pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$,
$$P_{v_i v_j} = \frac{1}{2n-2}, \quad P_{v_i v_i} = \frac{1}{2}.$$

2. Toutes les entrées de P sont strictement positives, la marche est donc irréductible et apériodique. Il existe une unique probabilité stationnaire, et puisque v_i et v_j, $i \neq j$ jouent des rôles symétriques cette probabilité soit être la probabilité uniforme $\pi = (1/n \ 1/n \ \cdots a/n)$ (on peut aussi vérifier facilement que la somme des éléments d'une colonne de P vaut 1, et donc $\pi P = \pi$).

3. On a par exemple

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{t+1} = X_t) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \mid X_t = Y_t = v_i)\mathbb{P}(X_t = Y_t = v) \\
& + \sum_{1 \le i \neq j \le n} \mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \mid X_t = v_i, Y_t = v_j)\mathbb{P}(X_t = v_i, Y_t = v_j) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} P(v_i, v_i)\mathbb{P}(X_t = Y_t = v_i) \\
& + \sum_{1 \le i \neq j \le n} \mathbb{P}\left(U_{t+1} \in \left[\frac{i-1}{n}(1/2 + 1/2(n-1)), \frac{i}{n}(1/2 + 1/2(n-1))\right] \cup [1/2 + 1/2(n-1), 1]\right) \mathbb{P}(X_t = v_i \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_t = Y_t = v_i) + \frac{1}{2}\sum_{1 \le i \neq j \le n} \mathbb{P}(X_t = v_i, Y_t = v_j) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Similairement pour $i \neq j$,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{t+1} = v_i \mid X_t = v_j) \\
= \; & \mathbb{P}(X_{t+1} = v_i \mid X_t = Y_t = v_j)\mathbb{P}(Y_t = v_j \mid X_t = v_j) \\
& + \sum_{k \neq j} \mathbb{P}(X_{t+1} = v_i \mid X_t = v_j, Y_t = v_k)\mathbb{P}(Y_t = v_k \mid X_t = v_j) \\
= \; & P(v_j, v_i)\mathbb{P}(Y_t = v_j \mid X_t = v_j) \\
& + \mathbb{P}\left(U_{t+1} \in \left[\frac{i-1}{n}(1/2 + 1/2(n-1)), \frac{i}{n}(1/2 + 1/2(n-1))\right]\right)\mathbb{P}(Y_t = v_k \mid X_t = v_j) \\
= \; & \frac{1}{n-1}
\end{aligned}
$$

et on conclut que X est bien une marche paresseuse sur le graphe complet.
Une preuve identique permet d'assurer que Y est également une marche paresseuse sur le graphe complet, et donc (X, Y) est bien un couplage de deux telles marches.
Remarque : il s'agit clairement d'un couplage coalescent.
Il est clair que si $x \neq y$, X et Y se rencontrent exactement en

$$\tau_{\text{couple}} = \inf\{t \ge 1 : U_t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\}$$

qui suit (les $(U_t, t \ge 1)$ étant i.i.d uniformes sur $[0, 1]$) une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{n}{2(n-1)}$.
En particulier $\mathbb{E}_{x,y}[\tau_{\text{couple}}] = \frac{2(n-1)}{n}$ et donc par l'inégalité de Markov et le résultat du cours,

$$d(t) \le \frac{2(n-1)}{n}, t_{\text{mix}} \le \frac{8(n-1)}{n}$$

4. La borne $t_{\text{mix}} \le 8$ est uniforme en n, autrement dit, le temps de mélange est d'ordre 1 pour une marche paresseuse sur le graphe complet.

II. 1. C'est exactement le même couplage (à chaque étape on choisit à P/F celle des deux marches qui se déplace de ± 1) que pour le cas de la marche symétrique vu en cours. Le temps de couplage est obtenu lorsque $X_t - Y_t$ touche l'origine. Malgré l'asymétrie de X, $(X_t - Y_t, t \ge 0)$ reste une marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et toujours comme dans l'exemple vu en cours, l'espérance du temps d'atteinte de l'origine est (uniformément en les points de départ) borné par $n^2/4$.

2. Quitte à prendre $\mathcal{C}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le TCL permet d'affirmer que pour un $z \sim \mathcal{N}(0,1)$, lorsque $n \to \infty$, en loi

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\left(X_t - t(p-1/2) \bmod(n)\right) \to Z \bmod(\sqrt{2}n/\sqrt{t}),$$

de sorte qu'on peut argumenter, exactement comme dans le cas symétrique, que pour un $c > 0$ suffisamment petit, la distribution de $X_{cn^2} \bmod(n)$ est trop concentrée autour de $cn^2(p-1/2) \bmod(n)$ pour qu'elle se trouve à une distance inférieure à $1/4$ de la probabilité uniforme sur $\mathcal{C}_n$. On en déduit, toujours comme dans le cas symétrique, que $t_{\text{mix}} \geq cn^2$, et on conclut finalement que $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$.

III. 1. Pour tout $i \geq 2$ La trajectoire $w_i \to x \to v_2 \to v_3 \to ... \to v_n \to x \to w_i$ a probabilité strictement positive donc la chaîne est irréductible. Elle est paresseuse donc apériodique. Enfin il s'agit d'une chaîne irréductible sur un espace d'état fini donc elle est récurrente positive et possède donc une unique probabilité stationnaire.

2. Partant de x la chaîne y reste un temps géométrique de paramètre $1/2$ puis quitte x pour un point de $\mathcal{H}_n \setminus \{x\} = \mathcal{C}_n^* \cup \mathcal{G}_n^*$, et

$$\mathbb{P}_x(T_{\mathcal{C}_n^*<\mathcal{G}_n^*} = \mathbb{P}_x(X_1 \in \mathcal{C}_n^* \mid X_1 \neq x) = \frac{P(x,w_2)+P(x,w_n)}{1/2} = \frac{2}{n+1}.$$

Puisque pour tout $i \geq 2$, $P(v_i, x) = \frac{1}{2(n-1)}$, on a

$$\mathbb{P}_{v_i}(X_1 = x) = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Par ailleurs sachant que $T_x > n$, $X_1, ...X_n$ sont à valeurs dans $\mathcal{G}_n^*$ et donc par Markov au temps n,

$$\mathbb{P}_{v_i}(X_{n+1} = x \mid T_x > n) = \frac{1}{2(n-1)},$$

ce qui conduit au résultat souhaité.
Quitte à noter $T_x, T^+_{\mathcal{G}_n*} = \inf\{t \geq T_x : X_t \in \mathcal{G}_n*\}, T_x^2 = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}, T^2_{\mathcal{G}_n^*} = \inf\{t \geq T_x^2 : X_t \in \mathcal{G}_n*\}, ...$, on a d'après le calcul précédent et la propriété de Markov en T_x,

$$\mathbb{P}(T_{\mathcal{C}_n^*} < T^+_{\mathcal{G}_n^*}) = \frac{2}{n}, \mathbb{P}(T_{\mathcal{C}_n^*} < T^{k+1}_{\mathcal{G}_n^*} \mid T_{\mathcal{C}_n^*} \geq T_x^k) = \frac{2}{n},$$

et on déduit que le nombre aléatoire k de retours en x, partant de $v_i, i \geq 2$ avant de toucher $\mathcal{C}_n^*$ est géométrique de paramètre $2/n$. Cependant, par Markov fort en $T^k_{\mathcal{G}_n^*}$ et ce qui précède, la loi de $T_x^{k+1} - T^k_{\mathcal{G}_n^*}$ est elle-même géométrique de paramètre $\frac{1}{2(n-1)}$. Quitte à oublier les étapes où la chaîne reste en x, on obtient donc le résultat souhaité. On en déduit par exemple que pour un $C > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{v_i}(T_{\mathcal{C}_n^*} \leq Cn) &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\Gamma} G_k \leq Cn\right) \\
&\leq \mathbb{P}(\Gamma \leq \sqrt{n}) + \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq\sqrt{n}} G_k \leq Cn) \\
&\leq 1-(1-\frac{2}{n})^{\sqrt{n}} + \left(\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)^{Cn}\right)^{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

3. Soit $c > 0$, et $i \in \{2, ..., n\}$ fixés. La loi forte des grands nombres assure qu'au bout de $((p-1/2)^{-1} + c/2)n$ pas, la marche *non paresseuse* correspondante, si elle est restée sur le cycle, a effectué strictement plus d'un tour avec probabilité qui tend vers 1, et

aura donc atteint x avant $t = ((p-1/2)^{-1} + c/2)n$. Quant à la marche paresseuse, toujours par la loi des grands nombres, elle aura effectué au temps $2t$ un nombre $((p-1/2)^{-1} + c)n + o(n)$ de sauts et on déduit que

$$\mathbb{P}_{w_i}(T_x > (2(p-1/2)^{-1} + c)n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Soit $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{G}_n^*, Y_t \in \mathcal{G}_n^*\}$. Si jamais les chaînes ne se sont pas encore rencontrées au temps T, par la propriété de Markov fort en T et la définition de notre couplage elles le feront au temps $T' = \inf\{t > T : U_t \leq 1/2 + 1/n\}$. Donc $\tau_{\text{couple}} \leq T'$, ce qui conduit au résultat souhaité puisque $T' - T \sim \text{Geom}(1/2 + 1/n)$.
5. Supposons que $X_0 = z, Y_0 = y$. D'après ce qui précède, et disons avec $c = (p-1/2)^{-1}$, $C = 4c$,

$$\mathbb{P}_y(Y_t \in \mathcal{G}_n \ \forall t \in [2cn, 4cn]) \to 1, \quad \mathbb{P}_z(X_t \in \mathcal{G}_n \ \forall t \in [2cn, 4cn]) \to 1,$$

On déduit par exemple que pour tout z, y, $\mathbb{P}_{z,y}(T \leq 2cn + 1) \to 1$, et donc par exemple que $\mathbb{P}_{z,y}(\tau_{\text{couple}} \leq 3cn) \to 1$.
Il existe donc un n_0 tel que $\mathbb{P}_{z,y}(\tau_{\text{couple}} \leq 3cn) \geq 1/2$ pourvu que $n \geq n_0$. Par Markov au temps $3cn, 6cn, ...$ on déduit que $\tau_{\text{couple}} \leq 3cnG$ où $G \sim \text{Geom}(1/2)$, et en particulier que

$$\max_{z,y \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}_{z,y}[\tau_{\text{couple}}] \leq 6cn.$$

Finalement, par l'inégalité de Markov et l'argument habituel

$$t_{\text{mix}} \leq 24cn.$$

Comme par ailleurs, $\mathbb{P}_{w_2}(T_x \leq cn/4) \to 0$, et que $\pi(\mathcal{G}_n) \geq 1/2$, $||P^{cn/4}(w_2, \cdot) - \pi(\cdot)||_{TV} > 1/4$ de sorte que

$$cn/4 \leq t_{\text{mix}} \leq 24cn,$$

i.e $t_{\text{mix}} = \Theta(n)$. Finalement la chaîne de III. mélange beaucoup plus vite que la chaîne en II (mais moins vite que celle de I), i.e. le fait de rajouter des noeuds et des arêtes au graphe de II a fait diminuer significativement le temps de mélange.

Remarques :

• En travaillant un peu plus ces arguments, on pourrait en fait s'assurer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = (p-1/2)^{-1}n + O(\sqrt{n})$, i.e. qu'il y a un phénomène de cutoff pour notre chaîne.

• La probabilité stationnaire en un point du cycle change drastiquement entre les chaînes II et III (on passe de $1/n$ à quelque chose $\leq 1/n^2$), à tel point que la probabilité stationnaire de notre chaîne III est négligeable sur le cycle.

Cependant l'argument reste en fait valable en gluant un graphe complet et un cycle de tailles différentes. Par exemple si $\mathcal{H}_n$ était obtenu en gluant $\mathcal{G}_{\sqrt{n}}$ et $\mathcal{C}_n$, on retrouve un temps de mélange d'ordre n, mais cette fois la mesure stationnaire charge significativement le cycle.