

Chaînes de Markov

**Examen**

**Questions de cours — Application directe du cours**

1. Soit  $X$  irréductible paresseuse, réversible sur un espace d'état fini. Que peut-on dire des valeurs propres de sa matrice de transition  $P$  ?
2. Que peut-on dire d'une chaîne sur un espace d'état fini qui possède deux probabilités invariantes distinctes ? Donner un exemple d'une telle chaîne.
3. Que peut-on dire d'une chaîne qui possède une mesure invariante mais pas de probabilité invariante ? Donner un exemple d'une telle chaîne.
4. Que peut-on dire d'une chaîne à temps continu qui possède une probabilité invariante et est transiente ? Donner un exemple d'une telle chaîne.

1. Par le théorème de décomposition spectrale vu en cours, les valeurs propres d'une telle chaîne sont réelles, dans  $[0, 1]$ , et 1 est valeur propre simple. Autrement dit, quitte à les ordonner on a

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

2. Une telle chaîne ne peut pas être irréductible. En effet une chaîne irréductible sur un espace d'état fini est forcément récurrente positive et possède donc une unique probabilité invariante. La chaîne à deux états de noyau  $P = Id$  possède deux probabilités invariantes distinctes, e.g.  $\delta_0$  et  $\delta_1$ .
3. Une chaîne qui ne possède pas de probabilité invariante ne peut pas posséder de classe positive récurrente. En particulier elle est forcément à valeurs dans  $E$  infini. La marche simple symétrique sur  $\mathbb{Z}$  est un exemple d'une telle chaîne : les mesures invariantes sont les mesures uniformes sur  $\mathbb{Z}$ , et il n'existe donc pas de probabilité invariante.
4. Une telle chaîne est forcément explosive. En effet une chaîne non explosive et qui possède une probabilité invariante est récurrente positive. Un exemple d'une telle chaîne a été donné en cours : on peut considérer par exemple une marche simple à temps continu sur  $\mathbb{N}$  avec  $q_{01} = 1, q_{i(i+1)} = p\alpha^i, q_{i(i-1)} = (1-p)\alpha^i, i \in \mathbb{N}^*$ . La chaîne de sauts associée est la marche simple asymétrique sur  $\mathbb{N}$ , qui est transiente pourvu que  $p > 1/2$ .  
Par ailleurs il existe une probabilité invariante pourvu que  $p < (1-p)\alpha$ . En effet la mesure  $\pi$  est invariante pourvu que

$$\frac{\pi(1)}{\pi(0)} = \frac{1}{(1-p)\alpha}, \quad \frac{\pi(i+1)}{\pi(i)} = \frac{p}{(1-p)\alpha}, \quad i \in \mathbb{N}^*$$

car la chaîne est alors réversible par rapport à  $\pi$ . On voit bien alors qu'on peut choisir  $\pi(0)$  pour en faire une probabilité invariante pourvu que  $p < (1-p)\alpha$ .

**Exercice 1** Dans cet exercice on va considérer  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov à temps continu à valeurs dans  $\mathbb{N}$  qui représente la taille d'une population de bactéries. Pour une bactérie née au temps  $b$ , indépendamment des autres, on introduit deux variables exponentielles et indépendantes  $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$  de paramètres respectifs  $\lambda > 0, \mu > 0$ . Si  $\mathbf{e} < \mathbf{e}'$  la bactérie

meurt au temps  $b + \mathbf{e}$  sans descendance. Si en revanche  $\mathbf{e}' < \mathbf{e}$  elle meurt au temps  $b + \mathbf{e}'$  et est remplacée à cet instant par deux nouvelles bactéries (dont le temps de naissance sera donné par  $b + \mathbf{e}'$ ) qui vont évoluer de manière similaire et indépendante du passé.

Pour  $t \geq 0$  on note  $X_t$  le nombre de bactéries  $\mathbb{P}_k$  la loi de la chaîne issue d'une population initiale de  $k \in \mathbb{N}$  bactéries. Il va de soi que ces  $k$  bactéries initiales ont un temps de naissance nul.

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Vérifier que sous  $\mathbb{P}_k$ , le premier temps de saut de  $X$ , disons  $J_1$ , suit une loi exponentielle de paramètre  $k(\lambda + \mu)$ .  
 Quelle est, toujours sous  $\mathbb{P}_k$ , la loi de  $X_{J_1}$  ?  
 Enfin, sachant  $X_{J_1}$ , quelle est la loi de  $(X_{J_1+t})_{t \geq 0}$  ?  
 En déduire que  $X$  est bien une chaîne de Markov dont on exprimera le générateur  $Q$ .
2. La chaîne est-elle irréductible ?
3. En dissociant la descendance des deux bactéries initiales, montrer que la loi de  $X_t$  sous  $\mathbb{P}_2$  coïncide avec celle de  $X_{1,t} + X_{2,t}$  où  $(X_1, X_2)$  sont des copies indépendantes de  $X$  sous  $\mathbb{P}_1$ .
4. Soit  $h(t) = \mathbb{P}_1(X_t = 0)$ . En utilisant la propriété de Markov forte au premier temps de saut, montrer que

$$h(t) = \int_0^t \exp(-(\lambda + \mu)s)(\lambda + \mu(h(t-s))^2) ds.$$

5. En déduire  $h(t)$  pour  $t \geq 0$  (par exemple en dérivant).
6. En déduire  $\mathbb{P}_k(X_t = 0)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
7. Décrire le comportement asymptotique de la chaîne issue de  $k \in \mathbb{N}^*$  en fonction de  $\lambda, \mu$ .

1. Commençons par remarquer que si  $k = 0$ , alors sous  $\mathbb{P}_k$ ,  $X_t = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .  
 Fixons maintenant  $k \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i)_{i=1 \dots k}$  des variables exponentielles indépendantes avec  $\mathbf{e}_i \sim \exp(\lambda)$ ,  $\mathbf{e}'_i \sim \exp(\mu)$  les deux variables exponentielles régissant l'évolution de la  $i$ -ème bactérie. Le premier temps de saut de la population totale de bactérie a lieu en  $J_1 \min\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i, 1 \leq i \leq k\}$  et on a donc bien  $J_1 \sim \exp(k(\lambda + \mu))$ . Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k(X_{J_1} = k - 1) &= \mathbb{P}(J_1 \in \{\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, k\}) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(J_1 = \mathbf{e}_i) \\ &= k \frac{\lambda}{k(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \end{aligned}$$

et de même  $\mathbb{P}_k(X_{J_1} = k + 1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ .

Notons que si la  $i$ -ème bactérie n'est pas affectée au temps  $J_1$ , l'absence de mémoire de la loi exponentielle garantit que les lois de  $\mathbf{e} - J_1, \mathbf{e}' - J_1$  restent des exponentielles indépendantes de paramètres respectifs  $\lambda, \mu$ . L'évolution des éventuelles nouvelles bactéries nées au temps  $J_1$  étant identique et indépendante de ce qui précède, on déduit que la loi de  $X_{J_1+t}$  sachant  $X_{J_1}$  est  $\mathbb{P}_{X_{J_1}}$ .

On en déduit que  $(X_t, t \geq 0)$  est bien une chaîne à temps continu. Son générateur  $Q$  est donné par

$$q_k = k(\lambda + \mu), k \in \mathbb{N}, q_{k(k-1)} k \lambda, q_{k(k+1)} = k \mu, k \in \mathbb{N}^*.$$

2. L'état 0 est absorbant, la chaîne n'est donc pas irréductible. Il est facile de voir que ses deux classes sont  $\{0\}$  et  $\mathbb{N}^*$ .
3. Lorsque la population initiale compte deux bactéries, notons  $X_{1,t}$  la taille de la descendance au temps  $t$  de la première bactérie initiale,  $X_{2,t}$  celle de la deuxième bactérie initiale. La taille totale de la population au temps  $t$  est donc  $X_t = X_{1,t} + X_{2,t}$ .  
 Par hypothèse, l'évolution des deux bactéries et de leurs descendance respectives sont indépendantes, de sorte que  $X_1$  et  $X_2$  sont deux copies indépendantes de  $X$  sous  $\mathbb{P}_1$ . En particulier  $\mathbb{P}_2(X_t = 0) = h(t)^2$ .

4. Remarquons tout d'abord que  $\mathbb{P}_2(X_t = 0)$ . En décomposant suivant les valeurs possibles de  $J_1$  et en utilisant la propriété de Markov fort au temps  $J_1$ , on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1(X_t = 0) &= \mathbb{P}_1(J_1 < t, X_{J_1} = 0) + \mathbb{P}_1(J_1 < t, X_{J_1} = 2, X_t = 0) \\ &= \int_0^t (\lambda + \mu) \exp(-(\lambda + \mu)s) \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \mathbb{P}_2(X_{t-s} = 0) \right) ds \\ &= \int_0^t \exp(-(\lambda + \mu)s) (\lambda + \mu h(t-s)^2) ds\end{aligned}$$

comme souhaité.

5. Quitte à poser  $u = t - s$  et à multiplier par  $\exp((\lambda + \mu)t)$  on obtient

$$\exp((\lambda + \mu)t)h(t) = \int_0^t \exp((\lambda + \mu)u)(\lambda + \mu h(u)^2)du,$$

et donc en dérivant, puis en divisant par  $\exp((\lambda + \mu)t)$  il vient

$$h'(t) = \lambda - (\lambda + \mu)h(t) + \mu h(t)^2 = \mu(1 - h(t))\left(\frac{\lambda}{\mu} - h(t)\right).$$

Rappelons que  $h(0) = 0$ .

**Si**  $\lambda = \mu$  on obtient alors  $h'(t) = \mu(1 - h(t))^2$ , donc  $\frac{1}{1-h(t)} = \mu t + 1$ , et finalement dans ce cas

$$h(t) = \frac{\mu t}{\mu t + 1}.$$

**Si**  $\lambda \neq \mu$ , en séparant les variables puis en décomposant en éléments simples on obtient

$$\frac{1}{\lambda - \mu} \frac{h'(t)}{h(t) - \frac{\lambda}{\mu}} + \frac{1}{\mu - \lambda} \frac{h'(t)}{h(t) - 1} = 1,$$

et donc

$$\frac{1}{\lambda - \mu} \left( \ln \left( \frac{\lambda}{\mu} - h(t) \right) - \ln(1 - h(t)) \right) = t + \frac{1}{\lambda - \mu} \ln \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

On en déduit

$$\frac{1 - h(t)}{\frac{\lambda}{\mu} - h(t)} = \frac{\mu}{\lambda} \exp((\mu - \lambda)t),$$

ou encore de manière équivalente

$$\frac{\frac{\lambda}{\mu} - h(t)}{1 - h(t)} = \frac{\lambda}{\mu} \exp((\lambda - \mu)t)$$

Ainsi si  $\lambda < \mu$ , on utilise cette deuxième expression pour déduire

$$h(t) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1 - \exp((\lambda - \mu)t)}{1 - \frac{\lambda}{\mu} \exp((\lambda - \mu)t)}.$$

A contrario si  $\lambda > \mu$  on utilise la première expression pour déduire

$$h(t) = \frac{1 - \exp((\mu - \lambda)t)}{1 - \frac{\mu}{\lambda} \exp((\mu - \lambda)t)}.$$

6. Par le même raisonnement qu'en 3,  $\mathbb{P}_k(X_t = 0) = h(t)^k$ .

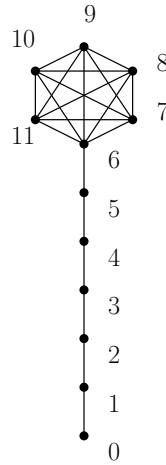
7. Lorsque  $\lambda \geq \mu$  on a  $\mathbb{P}_1(X_t = 0) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  de sorte que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé,  $\mathbb{P}_k(X_t = 0) = \mathbb{P}_k(T_0 \leq t) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Ainsi lorsque  $\lambda \geq \mu$  la chaîne atteint l'état absorbant 0 en temps fini presque sûrement.

Lorsque  $\mu > \lambda$  on a  $\mathbb{P}_1(X_t = 0) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , et de manière évidente, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé on a donc  $\mathbb{P}_k(X_t = 0) \rightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$ . La probabilité de fixation en 0 sous  $\mathbb{P}_k$  est donc  $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$ . Sur l'événement  $\{T_0 = +\infty\}$ , on peut enfin montrer que  $X_t \rightarrow \infty$  p.s. La classe  $\mathbb{N}^*$  n'est pas fermée donc transiente et donc p.s. chaque état n'est visité qu'un nombre fini de fois. Sur l'événement  $\{T_0 = +\infty\}$  il existe donc  $L_k(\omega)$  tel que  $\forall t \geq L_k(\omega)$ ,  $X_t > k$ , et comme ceci est vrai pour tout  $k$ , on a la conclusion souhaitée.

**Problème** Le but du problème est d'étudier une marche sur le "lollipop graph" (graphe de la sucette) avec possiblement un biais le long du "bâton".

On introduit pour cela

- $\mathcal{G}_1$  le segment discret à  $n + 1$  sommets (i.e.  $\mathcal{V}_1 = \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathcal{E}_1 = \{\{x, y\} : x \in \mathcal{V}_1, y \in \mathcal{V}_1, |x - y| = 1\}$ ),
- $\mathcal{G}_2$  est le graphe complet à  $n$  sommets (pour bien distinguer  $\mathcal{V}_1$  de  $\mathcal{V}_2$  on prendra  $\mathcal{V}_2 = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ , et donc  $\mathcal{E}_2 = \{\{x, y\} : x \in \mathcal{V}_2, y \in \mathcal{V}_2\}$ ).
- le "lollipop graph"  $\mathcal{G}_3$  qui est obtenu en identifiant les noeuds  $n$  de  $\mathcal{V}_1$  et  $2n$  de  $\mathcal{V}_2$  (on étiquette  $n$  le noeud obtenu de sorte que  $\mathcal{V}_3 = \{0, \dots, 2n - 1\}$ ). Une figure de ce graphe pour  $n = 6$  est donnée ci-dessous.



On fixe  $p \in (0, 1)$  et on note  $(X_t, t \geq 0)$  la chaîne de Markov (paresseuse) sur  $\mathcal{G}_3$  dont le noyau de transition  $P$  est tel que

- $P(k, k) = \frac{1-p}{2}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ ,
- $P(0, 1) = 1/2$
- $P(k, k + 1) = \frac{1-p}{2}, P(k, k - 1) = \frac{p}{2}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,
- $P(n, j) = \frac{1}{2n}$  pour tout  $j \in \{n - 1, n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1\}$
- $P(k, j) = \frac{1}{2(n-1)}$  pour tout  $k \in \{n + 1, \dots, 2n - 1\}$ ,  $j \in \{n, \dots, 2n - 1\} \setminus \{k\}$ .

Autrement dit, la chaîne  $X$  est paresseuse, et quand elle se déplace, elle effectue une marche simple réfléchie en 0 le long du bâton  $\mathcal{V}_1 \setminus \{n\}$  (biaisée vers le bas si  $p > 1/2$ , vers le haut si  $p < 1/2$  et symétrique si  $p = 1/2$ ), tandis que depuis un autre noeud elle se déplace en un des noeuds voisins choisis uniformément.

1. Vérifier que  $X$  est irréductible, apériodique. Montrer que  $X$  est réversible vis-à-vis de la

mesure  $\mu$ , où

$$\begin{aligned}\mu(0) &= q^{n-1}, & \mu(k) &= q^{n-k-1}(1+q), k \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \mu(n) &= n, & \mu(k) &= n-1, k \in \{n+1, \dots, 2n-1\},\end{aligned}$$

avec  $q = \frac{p}{1-p}$ . Il pourra être utile pour la suite d'introduire un modèle de conductances adéquat correspondant à une version non paresseuse de la chaîne.

En déduire l'ensemble des probabilités invariantes de  $X$ .

2. Soit  $\rho_k := \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{X_j \geq n+1\}}$  (la proportion des  $k$  premières étapes passé par la chaîne dans les noeuds de  $\mathcal{V}_2^* := \{n+1, \dots, 2n-1\}$ ). Déterminer la limite  $\rho$  de  $\rho_k$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  (on précisera le sens de cette convergence). Que peut-on dire de  $\rho$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (on fera bien attention à distinguer les cas suivant les valeurs de  $p \in (0, 1)$ ) ? Commenter.

3. **Mélange : le cas  $p < 1/2$ .** Dans cette question on suppose  $p < 1/2$ .

- (a) Soit  $T = \inf\{t > T_n : X_t \neq n\}$ . Montrer que, quelque soit le point de départ de la chaîne, la loi  $\nu_T$  de  $X_T$  est uniforme sur  $\{n-1, n+1, \dots, 2n-1\}$ .
- (b) Montrer que  $\|\nu_T - \pi\|_{\text{TV}} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Soit  $T' = \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\}$  et  $\nu_{T',x}$  la loi de  $X_{T'}$  sous  $\mathbb{P}_x$ . Montrer que uniformément en  $x > n$ ,  $\|\nu_{T',x} - \pi\|_{\text{TV}} \rightarrow 0$ .
- (d) Fixons  $c > 0$ . Montrer que

$$\mathbb{P}_0(T \leq (1/2 - p)^{-1}n + cn) \rightarrow 1,$$

- (e) Conclure que  $t_{\text{mix}} \leq (1/2 - p)^{-1}n + cn$  pour  $n$  suffisamment grand.
- (f) Montrer que  $t_{\text{mix}} \geq (1/2 - p)^{-1}n - cn$ , pour  $n$  suffisamment grand.

4. **Mélange : le cas  $p = 1/2$ .** Dans cette question on suppose  $p = 1/2$ .

- (a) Montrer que  $\mathbb{E}_0[T_{n+1}] + \mathbb{E}_{n+1}[T_0] = 2n^3 + o(n^3)$  et en déduire que  $t_{\text{mix}} \leq Cn^3$ . On va voir cependant que l'ordre de cette borne n'est pas optimal.
- (b) Montrer que  $\mathbb{E}_0[T_n] = 2n^2$  (remarque : on pourra se contenter de travailler sur  $\mathcal{G}_1$ ). En déduire que  $\mathbb{E}_0[T_{\mathcal{V}_2^*}] = n^2 + o(n^2)$ .
- (c) On considère le couplage de chaînes de noyau  $P$  comme suit. Si  $X_t = x, Y_t = y$ , indépendamment des étapes précédentes
- si  $x = y$ , on choisit  $X_{t+1} \sim P(x, \cdot)$  et on pose  $Y_{t+1} = X_{t+1}$ .
  - si  $x \neq y$ , et  $x, y$  sont tous deux dans  $\mathcal{V}_2^*$ , alors on tire  $U_{t+1} \sim \text{Unif}[0, 1]$ . Si, pour un  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\right) \frac{i}{n} \leq U_{t+1} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\right) \frac{i+1}{n}$  on pose  $X_{t+1} = Y_{t+1} = i + n$ . Si  $U_{t+1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}$  on pose  $X_{t+1} = x, Y_{t+1} = y$ .
  - si  $x \neq y$  et au moins l'un des deux n'est pas dans  $\mathcal{V}_2^*$ , alors on tire  $\xi_{t+1} \sim \text{Ber}(1/2)$ . Si  $\xi_{t+1} = 1$  on tire  $X_{t+1}$  indépendamment, et uniformément parmi les voisins de  $x$ , et  $Y_{t+1} = y$ , tandis que si  $\xi_{t+1} = 0$ , on prend  $X_{t+1} = x$  et on tire  $Y_{t+1}$  indépendamment, uniformément parmi les voisins de  $y$ .

Montrer que si  $x \leq y$ , et si  $T_{\mathcal{V}_2^*}^X := \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{V}_2^*\}$  on a  $Y_{T_{\mathcal{V}_2^*}^X} \in \mathcal{V}_2^*$ . En déduire

que  $\mathbb{E}_{x,y}[\tau_{\text{couple}}] \leq 2n^2 + o(n^2)$  et une borne supérieure pour  $t_{\text{mix}}$ .

- (d) On note  $B_n = \{0, 1, \dots, \lceil n/2 \rceil\}$ . Montrer que si  $c > 0$  est choisi suffisamment petit et  $n$  suffisamment grand  $P^{cn^2}(0, B_n) \geq 3/4$ . En déduire que pour  $n$  suffisamment grand  $t_{\text{mix}} \geq cn^2$ .

5. **Mélange : le cas  $p > 1/2$ .** Dans cette question on suppose  $p > 1/2$ .

- (a) Soit  $x \in \mathcal{V}_2^*$ , montrer que sous  $\mathbb{P}_x$ ,  $T_{n-1} = \sum_{i=1}^{\Gamma} G_i + \tilde{G}_i$ , où les  $(G_i)_{i \geq 1}$ ,  $(\tilde{G}_i)_{i \geq 1}$  et  $\Gamma$  sont des géométriques indépendantes, avec les  $(G_i)$  de paramètre  $\frac{1}{2(n-1)}$ , les  $(\tilde{G}_i)$  de paramètre  $1/2$ , et  $\Gamma$  de paramètre  $1/n$ . Montrer alors que  $\frac{T_{n-1}}{n(n+1)}$  converge en loi lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers une variable exponentielle de paramètre 1. En déduire que pour un  $c$  adéquat  $t_{\text{mix}} \geq cn^2$ .

- (b) (\*) Justifier que pour  $\eta > 0$  fixé et un  $C$  bien choisi on a également  $\mathbb{P}_x(T_0 > Cn^2) \leq \eta$ .  
Par un argument de couplage, en déduire que  $t_{\text{mix}} \leq Cn^2$ .

1. La chaîne est clairement irréductible car  $n$  communique avec tous les autres états : pour tout  $k > n$ ,  $n \rightarrow k \rightarrow n$  et pour tout  $k < n$ ,  $k \rightarrow k+1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow k$  car  $p \in (0, 1)$ . La chaîne est également apériodique puisque paresseuse. Puisque l'espace d'état est fini elle possède donc une unique probabilité invariante.

Posons alors  $q = \frac{p}{1-p}$  et considérons  $Y$  le modèle de conductances sur  $\mathcal{G}_3$  : si  $e \in \mathcal{E}_2$ ,  $c(e) = 1$ , et si  $e = \{k-1, k\}$ ,  $c(e) = q^{n-k}$ . Lorsque  $Y$  se trouve en  $k \geq n$ , elle voit des arêtes de conductance toutes égales à 1, et elle se déplace donc en un voisin choisi uniformément. Lorsque  $Y$  se trouve en  $1 < k < n$ , elle voit une arête de conductance  $q^{n-k}$  vers le noeud  $k-1$ , et une arête de conductance  $q^{n-k-1}$  vers le noeud  $k+1$ . Elle se déplace donc vers le bas avec probabilité  $\frac{q^{n-k}}{q^{n-k} + q^{n-k-1}} = \frac{q}{q+1} = p$ , et vers le haut avec probabilité  $\frac{1}{1+q} = 1-p$ . On en déduit que  $X$  est simplement la version paresseuse de  $Y$ . Et ces deux chaînes sont donc réversibles vis-à-vis de  $\mu$ . Comme  $X$  (tout comme  $Y$ ) est irréductible et sur l'espace d'état fini  $\mathcal{G}_3$ , elle possède (comme  $Y$ ) l'unique probabilité invariante  $\pi = \frac{\mu}{\mu(\mathcal{G}_3)} : \pi(x) = \frac{\mu(x)}{\mu(\mathcal{G}_3)} = \frac{c(x)}{c_{\mathcal{G}_3}}, x \in \mathcal{V}_3$ . avec

$$\mu(\mathcal{G}_3) = c_{\mathcal{G}_3} = (n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q) \sum_{k=2}^{n-1} q^{n-k-1} = (n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q) \frac{1 - q^{n-2}}{1 - q}.$$

2. Remarquons d'ores et déjà que pour  $n$  grand, la partie de  $\mathcal{G}_3$  chargée significativement par  $\pi$  change drastiquement suivant que  $p \leq 1/2$  ( $q \leq 1$ ) ou  $p > 1/2$  ( $q > 1$ ). Lorsque  $p \leq 1/2$   $\pi(\{n+1, \dots, 2n-1\}) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Lorsque  $p > 1/2$ ,  $\pi(\{0, \dots, \lceil \sqrt{n} \rceil\}) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . C'est assez naturel : lorsque la marche le long du bâton est symétrique ou biaisée vers  $\mathcal{V}_2$ , et la chaîne a tendance à passer le plus clair de son temps dans  $\mathcal{G}_2$  (ce qui se reflète par le fait que  $\pi$  charge les noeuds de  $\mathcal{V}_2^*$  avec un poids proche de 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ ). Lorsqu'a contrario, elle est biaisée vers 0, l'extrémité du bâton, la chaîne ne passe qu'une proportion asymptotiquement négligeable du temps dans  $\mathcal{G}_2$  (dans ce cas ce sont les noeuds de l'extrémité du bâton, e.g.  $\{0, \dots, \lceil \sqrt{n} \rceil\}$  — ou même  $\{0, \dots, \lceil u_n \rceil\}$  pourvu que  $u_n \gg 1$  — que la probabilité invariante charge avec un poids asymptotiquement arbitrairement proche de 1).

Le théorème ergodique assure la convergence presque sûre de  $\rho_k$ , lorsque  $k \rightarrow \infty$  vers  $\rho = \sum_{k > n} \pi(k)$ . D'après la question précédente,

$$\rho = \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q)}.$$

Comme on vient de le remarquer en préambule de cette question si  $p \leq 1/2$ ,  $q \leq 1$ , on a  $\rho \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . A contrario lorsque  $p > 1/2$ ,  $q > 1$  et  $\rho \rightarrow 0$ .

3. **Mélange : le cas  $p < 1/2$ .**

Notons en préambule qu'on est dans le cas  $q < 1$  et donc

$c_{\mathcal{G}_3} = (n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q) \frac{1-q^{n-2}}{1-q} = n^2 + o(n)$ , et la probabilité invariante  $\pi$  est proche de la probabilité uniforme sur  $\mathcal{V}_2$ .

- (a) Par la propriété de Markov forte en  $T_n$ , la loi de  $X_T$  sous  $\mathbb{P}_x$  et sous  $\mathbb{P}_n$  coïncident. Or la loi de  $X_T$  sous  $\mathbb{P}_n$  est la loi du premier état visité après  $n$ , i.e. la loi uniforme sur les  $n$  voisins de  $n$  :  $\{n-1, n+1, \dots, 2n-1\}$ .

(b) On a, par exemple

$$\begin{aligned}
\|\nu_T - \pi\|_{\text{TV}} &= \sum_{\{x: \nu_T(x) \geq \pi(x)\}} \nu_T(x) - \pi(x) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1+q}{(n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q)\frac{1-q^{n-2}}{1-q}} \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{n} - \frac{n-1}{(n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q)\frac{1-q^{n-2}}{1-q}} \\
&\leq \frac{1}{n} + (n-1) \frac{(n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q)\frac{1-q^{n-2}}{1-q} - n(n-1)}{n((n-1)^2 + n + q^{n-1} + (1+q)\frac{1-q^{n-2}}{1-q})} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{2 + \frac{2}{1-q}}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

et il est donc clair que  $\|\nu_T - \pi\|_{\text{TV}} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

(c) De même si  $x \geq n$ , la loi de  $X_{T'}$  sous  $\mathbb{P}_x$  est uniforme sur les voisins de  $x$ , i.e. c'est la loi uniforme sur  $\{n, \dots, 2n-1\} \setminus \{x\}$ . Un calcul similaire au précédent assure donc qu'alors  $\|\nu_{x, T'} - \pi\|_{\text{TV}} \rightarrow 0$ .

(d) Quitte à considérer  $(S_t)_{t \geq 0}$  une marche paresseuse sur  $\mathbb{N}$  de noyau  $\tilde{P}$  avec  $\tilde{P}(0,1) = 1/2$ ,  $\tilde{P}(k, k+1) = (1-p)/2$ ,  $\tilde{P}(k, k-1) = p/2$ ,  $k \geq 1$  (de sorte qu'on peut faire coïncider  $X$  et  $S$  jusqu'au temps d'atteinte de  $n$ ), la LFGN assure que pour tout  $c > 0$ ,

$$\mathbb{P}_0(S_{((p-1/2)^{-1} + c/2)n} \leq n) = \mathbb{P}_0(T_n \geq (p-1/2)^{-1} + c/2)n \rightarrow 0.$$

Comme  $T = T_n + G$  où  $G \sim \text{Geom}(1/2)$  indépendante de  $T_n$ , on déduit que  $\mathbb{P}_0(T \geq ((p-1/2)^{-1} + c)n) \leq \mathbb{P}_0(T_n \geq (p-1/2)^{-1} + c/2)n + \mathbb{P}(G > cn/2) \rightarrow 0$ .

(e) L'idée est si  $x \leq n$ , la loi de la chaîne est arbitrairement proche de l'équilibre au temps  $T$ , et si  $x > n$ , c'est le cas au temps  $T'$ .

Si  $x \leq n$  quitte à coupler avec une marche issue de 0, on ne peut que diminuer le temps d'atteinte de  $n$ , et on a donc

$\mathbb{P}_x(T \geq ((p-1/2)^{-1} + c)n) \leq \mathbb{P}_0(T \geq ((p-1/2)^{-1} + c)n) \rightarrow 0$ . Si  $x > n$ , il suffit d'attendre  $T'$  qui est géométrique de paramètre  $1/2$ , en particulier

$\mathbb{P}_x(T'((p-1/2)^{-1} + c)n) = (1/2)^{((p-1/2)^{-1} + c)n} \rightarrow 0$ . Comme  $P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}$  décroît on déduit

$$d(((p-1/2)^{-1} + c)n) \rightarrow 0$$

et en particulier  $t_{\text{mix}} \leq ((p-1/2)^{-1} + c)n$  pour  $n$  suffisamment grand.

(f) Par un argument de LFGN comme en (d), on a

$$\mathbb{P}_0(S_{((p-1/2)^{-1} - c)n} \geq n) = \mathbb{P}_0(T_n \leq (p-1/2)^{-1} - c)n \rightarrow 0,$$

et donc  $P^{((p-1/2)^{-1} - c)n}(0, \mathcal{V}_2)$  est proche de 0 lorsque  $n$  est suffisamment grand, et comme  $\pi(\mathcal{V}_2) \rightarrow 1$  on a que  $\|P^{((p-1/2)^{-1} - c)n}(0, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \rightarrow 1$ , et on conclut que  $t_{\text{mix}} \geq ((p-1/2)^{-1} - c)n$  lorsque  $n$  est suffisamment grand.

Remarque : En travaillant un peu plus ces arguments, pour  $p < 1/2$ , on obtiendrait que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = (p-1/2)^{-1}n + o(n)$ , et il y a donc un phénomène de cutoff pour ces valeurs de  $p$ .

#### 4. Mélange : le cas $p = 1/2$ .

Notons d'ores et déjà que la chaîne non paresseuse correspond au modèle de conductances sur  $\mathcal{G}_3$  où toutes les arêtes se voient attribuer la conductance 1. Dans ce cas  $c_{\mathcal{G}_3} = 2\#(\mathcal{E}_3) = n(n-1) + 2n = n(n+1)$ .

- (a) Pour aller de 0 à  $n + 1$  on doit passer par  $n$ . La résistance équivalente entre 0 et  $n$  est évidemment  $n$ . La résistance entre  $n$  et  $n + 1$  vaut  $2/n$  (les autres noeuds  $k > n + 2$  sont tous de même potentiel, on peut les identifier en un noeud intermédiaire, et il y a  $n - 2$  arêtes entre  $n$  et ce noeud intermédiaire, tout comme entre ce noeud intermédiaire et  $n + 1$ , enfin il y a un arête entre  $n$  et  $n + 1$ ) de sorte que  $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n + 1) = n + 2/n$ . Il est encore plus immédiat de voir que  $\mathcal{R}(n \leftrightarrow n + 1) \leq 1$  (puisque'il y a une arête de conductance 1 entre les deux noeuds), et donc  $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n + 1) \in [n, n + 1]$  ce qui suffira pour l'estimée souhaitée. En tenant compte que le modèle paresseux prend en moyenne deux fois plus de temps que le modèle non paresseux, on obtient

$$\mathbb{E}_0[T_{n+1}] + \mathbb{E}_{n+1}[T_0] = 2c_{\mathcal{G}_3}\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n + 1) \in [2n^2(n + 1), 2n(n + 1)^2],$$

ce qui donne le résultat souhaité. Clairement  $t_{\text{hit}} \leq 2n^3 + o(n^3)$  et donc  $t_{\text{mix}} \leq 2n^3 + o(n^3)$ , mais comme annoncé dans l'énoncé, cette estimée ne va pas s'avérer très bonne.

- (b) Sur  $\mathcal{G}_1$ , on a toujours  $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n) = n$ , et  $c_{\mathcal{G}_1} = 2n$ , de sorte que, pour la marche paresseuse sur  $\mathcal{G}_1$ , on a

$$\mathbb{E}_0[T_n] + \mathbb{E}_n[T_0] = 4n^2.$$

Par symétrie des rôles de 0 et  $n$  dans  $\mathcal{G}_1$ ,  $\mathbb{E}_0T_n = 2n^2$ . Cependant on peut coupler de manière évidente la marche paresseuse sur  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_3$  issues de 0 jusqu'au temps d'atteinte de  $n$ , et on obtient donc le résultat souhaité.

- (c) Il est facile (voir correction de l'examen 2016 vue en classe) de vérifier que ceci constitue effectivement un couplage de chaînes de noyau  $P$ . Supposons  $x \leq y$ . Si  $x > n$ , alors  $x, y$  sont tous deux dans  $\mathcal{V}_2^*$ ,  $T_{\mathcal{V}_2^*}^X = 0$  et il n'y a rien à montrer.

Si  $x \leq n$ ,  $x \leq y$  on a  $X_t \leq Y_t$  pour tout  $t \leq T_{\mathcal{V}_2^*}^X - 1$ . En effet pour tout  $t \leq T_{\mathcal{V}_2^*}^X - 1$ ,  $X$  se trouve sur le bâton de la sucette, et les chaînes ne peuvent pas se croiser puisque tant qu'elles sont distinctes, exactement une seule des deux se déplace à chaque étape. On en déduit qu'au temps  $T_{\mathcal{V}_2^*}^X - 1$ , comme  $X_{T_{\mathcal{V}_2^*}^X - 1} = n$ , ou bien les deux chaînes se sont déjà rencontrées et se trouvent donc toutes deux en  $n$ , ou bien  $Y_{T_{\mathcal{V}_2^*}^X - 1} > n$ , i.e.  $Y_{T_{\mathcal{V}_2^*}^X - 1} \in \mathcal{V}_2^*$ . Au temps  $T_{\mathcal{V}_2^*}^X$  seule  $X$  se déplace et donc les deux chaînes se situent bien dans  $\mathcal{V}_2^*$ .

D'après ce qui précède, par Markov fort au temps d'arrêt  $T_{\mathcal{V}_2^*}^X$ , on en déduit que  $\tau_{\text{couple}} \leq T_{\mathcal{V}_2^*}^X + G$  où  $G = \inf\{s : U_{T_{\mathcal{V}_2^*}^X + s} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\}$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}$ , indépendante de  $T_{\mathcal{V}_2^*}^X$ . On a donc

$$\mathbb{E}_{x,y}[\tau_{\text{couple}}] \leq \mathbb{E}_x(T_{\mathcal{V}_2^*}^X) + \mathbb{E}[G] \leq \mathbb{E}_0[T_{\mathcal{V}_2^*}^X] + 2.$$

Reste à estimer  $\mathbb{E}_0[T_{\mathcal{V}_2^*}] = \mathbb{E}_0[T_n] + \mathbb{E}_n[T_{\mathcal{V}_2^*}]$ . Or par Markov au premier temps de saut depuis  $n$ ,

$$\mathbb{E}_n[T_{\mathcal{V}_2^*}] = 2 + \frac{1}{n}(\mathbb{E}_{n-1}[T_n] + \mathbb{E}_n[T_{c\mathcal{V}_2^*}]),$$

et pour la marche sur  $\mathcal{G}_1$ ,

$$\mathbb{E}_{n-1}[T_n] + \mathbb{E}_n[T_{n-1}] = 2c_{\mathcal{G}_1}\mathcal{R}(n - 1 \leftrightarrow n) = 4n,$$

de sorte que  $(1 - 1/n)\mathbb{E}_n[T_{\mathcal{V}_2^*}] \leq 6$  et finalement  $\mathbb{E}_0[T_{\mathcal{V}_2^*}] = 2n^2 + o(n^2)$ , et on déduit que  $t_{\text{mix}} \leq 8n^2 + o(n^2)$

- (d) On a, par Donsker,

$$P^{\varepsilon n^2}(0, B_n) \geq \mathbb{P}_0(T_{\lceil n/2 \rceil} \geq \varepsilon n^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\mathbb{P}} (B_t \in (0, 1/2) \forall t \in (0, c)) = \mathbb{P}(|B_c| \leq 1/2),$$



qui tend vers 1 lorsque  $c \rightarrow 0$ . On a donc bien  $P^{cn^2}(0, B_n) \geq 3/4$  pourvu que  $c$  soit choisi suffisamment petit et  $n$  suffisamment grand. Comme par ailleurs  $\pi(\mathcal{V}_2^*) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on déduit que pour ce même  $c$ ,  $P^{cn^2}(0, B_n) - \pi(B_n) \geq 1/2$  pourvu que  $n$  suffisamment grand, et donc  $t_{\text{mix}} \geq cn^2$  pourvu que  $n$  soit suffisamment grand.

On conclut que pour  $p = 1/2$ ,  $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$

##### 5. Mélange : le cas $p > 1/2$ .

Notons d'ores et déjà que dans ce cas (biais vers l'extrémité du bâton de la sucette)  $q > 1$ , et la probabilité invariante est donc portée principalement par les noeuds situés à l'extrémité du bâton, plus précisément on a par exemple que  $\pi(\{0, \dots, \sqrt{n}\}) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Le mélange est donc intuitivement essentiellement réalisé lorsque la chaîne atteint cette région. Lorsqu'elle démarre en un point intermédiaire du bâton, le mélange va donc s'effectuer en un temps d'ordre  $n$ , mais lorsqu'elle part de  $\mathcal{V}_2^*$ , il lui faut déjà un temps d'ordre  $n^2$  pour visiter  $n - 1$ , et donc le mélange ne pourra s'effectuer avant un temps d'ordre  $n^2$ . Par ailleurs un argument de couplage va permettre de borner le temps de mélange depuis un point de  $\mathcal{V}_2^*$  par le temps d'atteinte de 0.

- (a) Soit  $x \in \mathcal{V}_2^*$ , notons  $T_n^1, T_n^2, \dots$  les temps de visite successifs en  $n$ ,  $\tau_n^0 := 0$  et  $\tau_n^i := \inf\{t > T_n^i : X_t \neq n\}$ ,  $i \geq 1$ . Par Markov fort en  $T_n^i$ ,  $\tau_n^i - T_n^i =: G'_i$  suit une loi géométrique de paramètre  $1/2$  indépendante de  $\mathcal{F}_{T_n^i}$ . Par la propriété de Markov forte en les  $T_n^i$ ,  $\Gamma = \inf\{i : X_{\tau_n^i} = n - 1\} \sim \text{Geom}(1/n)$ . Par Markov en  $\tau_n^i$ , sachant  $\{\Gamma > i\}$ ,  $T_n^i - \tau_n^{i-1} =: G_i$  suit une loi géométrique de paramètre  $1/(n - 1)$  indépendante de  $\mathcal{F}_{\tau_n^i}$ .

Finalemment  $T_{n-1} = \sum_{i=1}^{\Gamma} G_i + G'_i$ , comme souhaité.

Quitte à poser  $X_i = G_i + G'_i$ , remarquons de plus que,

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\lceil tn \rceil} X_i] = \lceil tn \rceil (n + 1), \text{Var}[\sum_{i=1}^{\lceil tn \rceil} X_i] = \lceil tn \rceil ((n - 1)(n - 2) + 2) \ll \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\lceil tn \rceil} X_i]^2,$$

de sorte qu'avec probabilité proche de 1,  $|\sum_{i=1}^{\lceil tn \rceil} X_i - \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\lceil tn \rceil} X_i]| \ll n^2$

Fixons  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n-1} > n(n + 1)t) &\geq \mathbb{P}\left(\Gamma \geq \lceil n(t + \varepsilon) \rceil, \sum_{k=1}^{\lceil n(t + \varepsilon) \rceil} X_k \geq n(n + 1)t\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lceil n(t + \varepsilon) \rceil} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lceil n(t + \varepsilon) \rceil} |X_i - \mathbb{E}[X_i]| \leq n(n + 1)\varepsilon\right) \end{aligned}$$

D'après la remarque qui précède et l'inégalité de Chebychev, le deuxième terme ci-dessus est proche de 1 lorsque  $n$  est suffisamment grand, et on conclut que

$$\mathbb{P}(T_{n-1} > n(n + 1)t) \geq \exp(-t - 2\varepsilon)$$

pour  $n$  suffisamment grand.

Par ailleurs

$$\mathbb{P}(T_{n-1} > n(n + 1)t) \leq \mathbb{P}(\Gamma \leq \lceil n(t - \varepsilon) \rceil), \left| \sum_{i=1}^{\lceil n(t - \varepsilon) \rceil} X_i - \mathbb{E}[X_i] \right| \geq \varepsilon n^2 + \mathbb{P}(\Gamma > \lceil n(t - \varepsilon) \rceil)$$

Toujours par la remarque qui précède et Chebychev, le premier terme ci-dessus est négligeable et on a donc pour  $n$  suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(T_{n-1} > n(n + 1)t) \leq \exp(-t + 2\varepsilon)$$

Comme le raisonnement est valable pour tout  $\varepsilon$ , on conclut que  $T_{n-1}/n(n + 1)$  converge en loi vers  $\mathbf{e} \sim \exp(1)$ .

En particulier  $\mathbb{P}(T_{n-1} > n^2/2) \rightarrow \exp(-1/2)$  et donc  $P^{n^2/2}(n + 1, \mathcal{V}_2) \geq 1/2$  pour  $n$  suffisamment grand. Comme par ailleurs  $\pi(\mathcal{V}_2) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on conclut que  $t_{\text{mix}} \geq n^2/2$ .

- (b) On fait un couplage presque identique à celui proposé pour  $p = 1/2$ . Le seul changement, est que lorsque  $X_t \in \mathcal{V}_2^*, Y_t = n$  on utilise  $U_{t+1}$  pour choisir les valeurs de  $X_{t+1}, Y_{t+1}$  de sorte que  $X_{t+1} \geq Y_{t+1}$ . Il suffit pour cela (par exemple) de choisir  $Y_{t+1} = i \in \{n+1, \dots, 2n-1\}$  ssi  $U_{t+1} \in [(1/2 + 1/2(n-1))i/n, (1/2 + 1/2(n-1))i/n + 1/(2n)]$ . L'avantage de ce couplage est d'être "monotone" : si  $X_0 \geq Y_0$ , on a  $X_t \geq Y_t$  pour tout  $t \geq 0$ . Il est donc clair que  $\tau_{\text{couple}} \leq T_0^X$ , et que le temps de couplage est maximum lorsque  $x \in \mathcal{V}_2^*$ . Reste à voir qu'à chaque visite de  $n-1$ , on a une probabilité bornée inférieurement par une constante  $c_p > 0$  et ne dépendant que de  $p$  d'atteindre 0 avant  $cV_2^*$  et avant un temps  $((1/2 - p)^{-1} + \eta)n$ . Ainsi le temps d'atteinte de 0 depuis  $n+1$  est borné par  $\sum_{i=1}^G \tau_i$ , où les  $\tau_i$  sont i.i.d (de même loi que  $T_{n-1} + ((1/2 - p)^{-1} + \eta)n$  sous  $\mathbb{P}_{n+1}$ ) et  $G \sim \text{Geom}(c_p)$  indépendante des  $\tau_i$ . D'après ce qui précède  $\tau_i/n(n+1) \rightarrow \mathbf{e}_i \sim \exp(1)$ , on en déduit donc que pour  $C$  suffisamment grand

$$\mathbb{P}_{n+1}(T_0 > Cn^2) \leq \eta$$

pour  $n$  suffisamment grand. On a donc  $\max_{x,y} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_{\text{couple}} > Cn^2) \leq \eta$ , et donc  $t_{\text{mix}} \leq Cn^2$ .

Finalement  $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$  lorsque  $p > 1/2$