Université Paris Diderot

2017

Chaînes de Markov

Sélection de sujets passés

Exercice 1 [Rattrapage 2017]
On considère $\lambda > 0$ et la chaîne $(X_t, t \geq 0)$, à temps continu, sur l'espace d'état $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, et de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -1-\lambda & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Tracer le diagramme de la chaîne. Décomposer l'espace d'état en classes de communication.
2. On note $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Quelle est, sous $\mathbb{P}_1$, la loi de T_B ? Exprimer $\mathbb{P}_1(X_{T_B} = 3)$ en fonction de λ. Expliquer la limite de cette quantité lorsque $\lambda \to 0$, et lorsque $\lambda \to \infty$.
3. On note

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

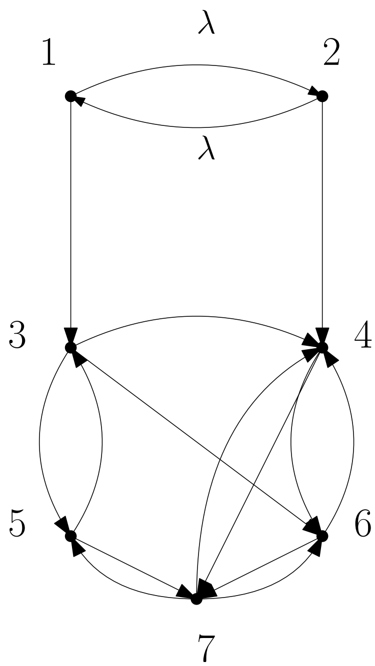
   Vérifier que les vecteurs colonnes de A sont des vecteurs propres de $\tilde{Q}$ et calculer les valeurs propres associées. Vérifier ensuite que

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & 6 & -6 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & -3 & 6 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 12 & -8 \end{pmatrix},$$

   et exprimer $A^{-1}\tilde{Q}A$. Déduire finalement $\lim_{t\to\infty} \exp(t\tilde{Q})$, puis $\lim_{t\to\infty} \exp(tQ)$.

4. Soit ν une distribution sur E. Discuter le comportement asymptotique de X_t sous $\mathbb{P}_\nu$. Montrer que si ν charge $\{1,2\}$, alors $||\nu P(t) - \pi||_{TV} \sim_{t\to\infty} (\nu(1)+\nu(2))\exp(-t)$.
5. Déduire un équivalent, lorsque $\varepsilon \to 0$, de $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$.
6. Que peut-on dire du comportement asymptotique, sous $\mathbb{P}_\nu$, de $\mathbb{1}_{\{X_t=3\}}$? Et de $\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\leq 5\}} ds$?

1. Le diagramme de la chaîne est représenté ci-dessous.



Sauf les deux transitions entre 1 et 2

qui s'effectuent à taux λ,

toutes les autres s'effectuent taux 1.

Il est clair que $1 \leftrightarrow 2$ mais qu'aucun autre état ne conduit à 1 ou 2, $\{1,2\}$ est donc une classe, elle n'est pas fermée puisque $1 \to 3$ et elle est donc transiente.
Par ailleurs $3 \to 4 \to 6 \to 7 \to 5 \to 3$ et donc $B = \{3,4,5,6,7\}$ forme une classe, elle est finie fermée donc récurrente.

2. Que ce soit depuis l'état 1 ou l'état 2, on quitte la classe $\{1,2\}$ pour B à taux 1, et donc sous $\mathbb{P}_1$, $T_B \sim \exp(1)$.
Notons par ailleurs que $\mathbb{P}_1(T_B < T_2) = \frac{1}{1+\lambda}$ et que sur $\{X_{T_B} = 3\} \setminus \{T_B < T_2\}$, la chaîne passe nécessairement par $\{2\}$. Autrement dit, $X_{J_1} \in \{2,3\}$ sous $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_1(X_{J_1} = 2) = \frac{1}{1+\lambda}$, donc, par Markov au premier temps de saut de la chaîne on a

$$\mathbb{P}_1(X_{T_B} = 3) = \frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbb{P}_2(X_{T_B} = 3).$$

Par un raisonnement similaire sous $\mathbb{P}_2$,

$$\mathbb{P}_2(X_{T_B} = 3) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbb{P}_1(X_{T_B} = 3),$$

et la résolution du système fournit

$$\mathbb{P}_1(X_{T_B} = 3) = \frac{1+\lambda}{1+2\lambda},$$

dont la limite lorsque $\lambda \to 0$ est 1, et la limite lorsque $\lambda \to \infty$ est $1/2$.
Ce n'est pas une grande surprise : lorsque $\lambda \to 0$ la probabilité que la première transition depuis 1 soit vers 3 est $1/(1+\lambda)$ qui tend déjà vers 1. A contrario lorsque $\lambda \to \infty$, la chaîne effectue un nombre géométrique de transitions entre 1 et 2 avant de sortir de la classe. Or le paramètre $1/(1+\lambda)$ de cette géométrique tend vers 0 lorsque $\lambda \to \infty$. La probabilité d'atteindre 3 plus tôt que 4 est la probabilité que cette géométrique prenne une valeur paire. Or cette probabilité tend vers $1/2$ lorsque le paramètre de la géométrique tend vers 0.

3. Notons que la matrice $\tilde{Q}$ est la matrice de la chaîne restreinte à B. On vérifie aisémemt que si a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 désignent les colonnes de A on a

$$\tilde{Q}a_1 = 0, \quad \tilde{Q}a_2 = -2a_2, \quad \tilde{Q}a_3 = -4a_3, \quad \tilde{Q}a_4 = -3a_4, \quad \tilde{Q}a_5 = -3a_5,$$

de sorte que $a_1, ...a_5$ sont propres pour $\tilde{Q}$ associés respectivement aux valeurs propres $0, -2, -4, -3, -3$.
Il est par ailleurs immédiat de vérifier que la matrice donnée est bien l'inverse de A, et on a donc

$$A^{-1}\tilde{Q}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$A^{-1}\exp(t\tilde{Q})A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-2t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-4t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-3t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(-3t) \end{pmatrix},$$

et donc que

$$\tilde{P}(t) = \exp(t\tilde{Q}) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = A\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On vient de (re)démontrer par ce calcul (on aurait également pu chercher l'unique distribution stationnaire de la chaîne $\tilde{X}$ qui est clairement irréductible, récurrente

positive et appliquer le théorème de convergence) que $\tilde{X}_t$ tend en loi, lorsque $t \to \infty$ vers $\tilde{X}_\infty$ de loi $\tilde{\pi} = (1/12\ 1/4\ 1/4\ 1/4\ 1/6)$ sur $\{3,4,5,6,7\}$.
Puisque $\{1,2\}$ est transiente, on en déduit que

$$P(t) = \exp(tQ) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Observons que d'après le calcul de la question précédente on a en fait une estimée plus précise concernant la distance à l'équilibre de la chaîne $\tilde{X}$:

$$\tilde{P}(t) - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-2t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-4t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-3t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(-3t) \end{pmatrix} A^{-1}$$

et donc si $\tilde{\nu}$ est une distribution sur $\tilde{E}$,

$$||\tilde{\nu}\tilde{P}(t) - \tilde{\pi}||_{TV} \leq C\exp(-2t).$$

Fixons alors λ une distribution sur $\{1,2\}$. Puisque sous $\mathbb{P}_1$ et sous $\mathbb{P}_2$, T_B suit une loi exponentielle de paramètre 1, on a grâce à la propriété de Markov au temps T_B et la borne précédente que

$$||\lambda P(t) - \pi||_{TV} \sim_{t\to\infty} \exp(-t).$$

On conclut finalement que si ν est une distribution sur E qui charge $\{1,2\}$,

$$||\nu P(t) - \pi||_{TV} \sim (\nu(1) + \nu(2))\exp(-t),$$

tandis que si ν ne charge pas $\{1,2\}$ on a $||\nu P(t) - \pi||_{TV} = o(\exp(-t))$.

5. D'après la question précédente on déduit facilement que

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \sim_{\varepsilon\to 0} \log(1/\varepsilon).$$

6. Comme on vient de le voir $\mathbb{P}_\nu(X_t = 3) \to \pi(3) = 1/12$. On a donc que $\mathbb{1}_{\{X_t=3\}}$ converge en loi vers une variable de Bernoulli de paramètre $1/12$.
La chaîne $\tilde{X}$ étant irréductible, récurrente positive, le théorème ergodique s'applique et donc quelque soit $\tilde{\nu}$ sur $\tilde{E}$, la proportion de temps passé en les états $\{3,4,5\}$ pour la chaîne $\tilde{X}$ converge vers $\tilde{\pi}(3) + \tilde{\pi}(4) + \tilde{\pi}(5) = \frac{7}{12}$.

Sous $\mathbb{P}_\nu$, le temps d'atteinte de B est borné par une exponentielle. On peut alors écrire, par exemple,

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\leq 5\}}ds - \frac{7}{12}\right| \leq \mathbb{1}_{\{\tilde{T}\geq\sqrt{t}\}} + \frac{2\sqrt{t}}{t} + \left|\frac{1}{t}\int_{\sqrt{t}}^t \mathbb{1}_{\{\tilde{T}\leq\sqrt{t}, X_s\leq 5\}}ds - \frac{7}{12}\right|$$

le premier terme ci-dessus tend p.s. vers 0 lorsque $t\to\infty$ car $\tilde{T}$ est borné par une exponentielle de paramètre 1. Le troisième terme ci-dessus tend vers 0 p.s. grâce à la propriété de Markov en $\sqrt{t}$ et au théorème ergodique pour $\tilde{X}$. On conclut que $\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\leq 5\}}ds$ tend $\mathbb{P}_\nu$-p.s. vers $7/12$ lorsque $t\to\infty$.

Exercice 2 [Examen 2014 (question de cours)]
Soit $(X_n), n\geq 0$ une chaîne de Markov de noyau P sur un espace E. Soit $A, B\subset E$ avec $A\cap B=\emptyset$. On note $h_i^{A,B}$ la probabilité d'atteindre A avant d'atteindre B en partant de l'état i. Montrer que $h^{A,B}=(h_i^{A,B}), i\in E$ est la solution positive minimale du système

$$\begin{cases} h_i^{A,B} = 1 & \text{si } i\in A \\ h_i^{A,B} = 0 & \text{si } i\in B \\ h_i^{A,B} = \sum_{j\in A} P(i,j) + \sum_{j\notin A\cup B} P(i,j) h_j^{A,B} & \text{si } i\notin A\cup B. \end{cases}$$

Exercice 3 [Examen 2016]
On va considèrer une file d'attente dans laquelle les clients peuvent arriver groupés, mais comme d'habitude le serveur ne peut traiter qu'un seul client à la fois.
On suppose que les temps d'arrivée des groupes de clients sont les sauts d'un processus de Poisson de paramètre 1.
Les tailles des groupes de clients successifs sont donnés par une suite $(G_1, G_2, ...)$ de variables i.i.d suivant la loi géométrique de paramètre $1/3$.
On suppose les temps de service des clients successifs indépendants des $\{G_i, i\geq 1\}$ et i.i.d suivant la loi exponentielle de paramètre $\gamma>0$.
Enfin on note X_t le nombre de clients présents dans la file à l'instant t. On souhaite étudier la chaîne $(X_t, t\geq 0)$.

1. Quel est l'espace d'état de X ? Montrer que son générateur Q vérifie en particulier

   $$q_0 = 1, q_{0k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k\in\mathbb{N}^*.$$

   Pour $k\geq 1$, déterminer $q_{k\ell}, \ell\in\mathbb{N}$.
   Déterminer le noyau de sauts Π associé (on notera $(Y_n, n\geq 0)$ la chaîne des sauts).
   La chaîne X est-elle irréductible ?
2. Pour $\ell\geq 1$, calculer $\mathbb{E}_\ell[Y_1 - Y_0]$.

3. Montrer que si on note $T_0 = \inf\{k \geq 0 : Y_k = 0\}$ on a $\mathbb{E}_k[T_0] = k\mathbb{E}_1[T_0]$ et

$$\mathbb{E}_1[T_0] = 1 + \frac{4}{1+\gamma}\mathbb{E}_1[T_0].$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne soit récurrente positive.

4. (*) Dans le cas récurrent positif, déterminer alors la distribution invariante λ de la chaîne. On pourra chercher une telle distribution sous la forme

$$\lambda(0) = C, \lambda(k) = C'p^{k-1}, k \geq 1,$$

pour des constantes C, C', p bien choisies.

1. La chaîne X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le temps d'attente en 0 est donné par une variable exponentielle de paramètre 1, et en ce temps la chaîne saute en $G \sim \text{Geom}(1/3)$, autrement dit on a bien

$$q_0 = 1, q_{0k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Le temps d'attente en $\ell > 0$ est donné par le mininum entre temps de service ($\sim \exp(\gamma)$) et le temps d'arrivée du prochain groupe de clients. La chaîne saute en -1 avec probabilité $\gamma/(\gamma+1)$ et sinon elle saute en $\ell + G$ où $G \sim \text{Geom}(1/3)$. Autrement dit, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$

$$q_\ell = 1 + \gamma, \quad q_{\ell(\ell-1)} = \gamma, q_{\ell(\ell+k)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

Le noyau de sauts Π associé à Q est donné par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_{0k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_{\ell(\ell-1)} = \frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad \pi_{\ell(\ell+k)} = \frac{1}{\gamma+1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$ la trajectoire de la chaîne de sauts Y : $0 \to k \to (k-1) \to (k-2) ... \to 1 \to 0$ a probabilité $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k > 0$, de sorte que $0 \leftrightarrow k$. On conclut que Y et X sont irréductibles.

2. D'après ce qui précède, si $\ell \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\ell[Y_1] &= \frac{\gamma}{\gamma+1}(\ell-1) + \frac{1}{\gamma+1}\sum_{k\geq 1}(\ell+k)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
&= \ell + \frac{3-\gamma}{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov au temps k, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n \mid Y_n \neq 0] = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}.$$

Autrement dit, quand elle ne se trouve pas à l'origine, la marche aléatoire (Y_n) dérive vers la droite si $\gamma < 3$, et vers la gauche si $\gamma > 3$. On s'attend donc à ce que la marche soit récurrente positive si $\gamma > 3$, récurrente nulle si $\gamma = 3$ et transiente si $\gamma < 3$.

3. Toute trajectoire de Y allant de k à 1 doit passer par $k-1$. Par la propriété de Markov forte en T_{k-1}, et par le fait que $(X_0 - k + 1, ..., X_{T_{k-1}} - k + 1)$ a sous $\mathbb{P}_k$ la même loi que $(X_0 - 1, ..., X_{T_1} - 1)$ sous $\mathbb{P}_1$, on a

$$\mathbb{E}_k[T_0] = \mathbb{E}_k[T_{k-1}] + \mathbb{E}_{k-1}[T_0] = \mathbb{E}_1[T_0] + \mathbb{E}_{k-1}[T_0]$$

et une récurrence immédiate permet alors de conclure que $\mathbb{E}_k[T_0] = k\mathbb{E}_1[T_0]$.
Par Markov au temps 1, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1[T_0] &= 1 + \frac{1}{\gamma+1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \mathbb{E}_{1+k}[T_0] \\
&= 1 + \frac{4}{\gamma+1} \mathbb{E}_1[T_0]
\end{aligned}$$

comme souhaité.
Lorsque $\gamma > 3$ on trouve alors

$$\mathbb{E}_1[T_0] = \frac{\gamma+1}{\gamma-3},$$

et donc

$$\mathbb{E}_0[T_0^+] = 1 + 3\mathbb{E}_1[T_0] = \frac{4\gamma}{\gamma-3} < \infty.$$

A contrario lorsque $\gamma \leq 3$ la seule solution (positive) de l'équation est $\mathbb{E}_1[T_0] = +\infty$.
On conclut que la chaîne Y (donc la chaîne X) est récurrente positive ssi $3 < \gamma$.

4. On va traiter une question un peu plus générale que celle de l'énoncé et effectuer la recherche des *mesures* stationnaires de la chaîne.
On va commencer par chercher une telle mesure sous la forme suggérée avec $\mu(0) = 1$, i.e. $\mu(0) = 1, \mu(1) = C_1, \mu(k) = C_1 p^{k-1}$, $k \geq 2$.
Comme la chaîne est irréductible, sa mesure stationnaire est unique à constante multiplicative près, et donc si on vérifie que $Q\mu = 0$ on aura l'existence d'une distribution stationnaire ssi la masse totale de μ est finie (et il sera aisé de la déduire de μ).

On souhaite donc satisfaire $\mu Q = 0$. Tout d'abord $\mu Q(0) = -1 + C_1\gamma$ de sorte qu'on doit poser $C_1 = \frac{1}{\gamma}$.
On déduit

$$\mu Q(1) = \frac{1}{3} - \frac{1+\gamma}{\gamma} + \gamma\mu(2),$$

de sorte que

$$\mu(2) = C_1\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{3}\right),$$

et on doit donc poser $p = \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{3}$. On remarque au passage que $3 < \gamma \Leftrightarrow p \in (0,1)$, et donc que la masse totale de μ est finie ssi $3 < \gamma$. Notons que cette masse vaut alors

$$\sum_{k\geq 1}\mu(k) = 1 + \frac{1}{(\gamma)1-p} = \frac{\gamma}{\gamma-3},$$

et que donc il faudra poser $\lambda = \frac{\gamma-3}{\gamma}\mu$.
Reste à vérifier $\mu Q(\ell) = 0$ pour $\ell \geq 2$. On a

$$\mu Q(\ell) = \sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1}\mu(k) - (1+\gamma)\mu(\ell) + \frac{\gamma}{1+\gamma}\mu(\ell+1)$$

Cependant

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\ell-1}\mu(k)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} &= \frac{C_1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-2}\sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\frac{3}{2}p\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{3\gamma}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-2}\frac{\left(\frac{3}{2}p\right)^{\ell-1}-1}{\frac{3}{2}p-1}\end{aligned}$$

Or $\frac{3}{2}p - 1 = \frac{3}{2\gamma}$ donc

$$\sum_{k=1}^{\ell-1}\mu(k)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} = \frac{1}{3}\left(p^{\ell-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\right),$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}\lambda Q(\ell) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1} + \frac{1}{3}\left(p^{\ell-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\right) - \frac{1+\gamma}{\gamma}p^{\ell-1} + p^{\ell}\\ &= p^{\ell-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1+\gamma}{\gamma} + p\right) = 0,\end{aligned}$$

et on conclut, comme souhaité, que μ est bien une mesure invariante.

L'ensemble des mesures stationnaires de notre chaîne est donc $\{a\mu, a > 0\}$, et l'existence d'une distribution stationnaire de la chaîne est donc équivalent à la finitude de la masse totale de μ, i.e. à $\gamma > 3$.
On retrouve au passage le fait que la chaîne est récurrente positive ssi $\gamma > 3$, et de plus, on a montré que dans ce cas la distribution stationnaire de la chaîne est $\lambda = \frac{\gamma-3}{\gamma}\mu$, i.e.

$$\lambda(0) = \frac{\gamma-3}{\gamma}, \quad \lambda(k) = \frac{\gamma-3}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \geq 1.$$

Exercice 4 [Examen 2016]
Soit E au plus dénombrable, $Q = \{q_{xy}, (x,y) \in E\}$ un générateur. Pour $x \in E$, et $f : E \to \mathbb{R}$ satifaisant la condition d'intégrabilité $\sum_y |q_{x,y} f(y)| < \infty$ on note

$$Qf(x) = \sum_{y \in E} q_{xy} f(y), x \in E.$$

Pour $t \geq 0$, $x, y \in E$, on note $p_t(x,y) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$. Pour $f : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathbb{E}_x[|f(X_t)|] < \infty$ on note

$$P(t)f(x) = \sum_{y \in E} p_t(x,y) f(y) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$$

On rappelle que $(P(t) = \{p_t(x,y), (x,y) \in E^2\}, t \geq 0)$ est tel que
$P(0) = Id, P'(t) = P(t)Q, t \geq 0$.
Dans l'ensemble de l'exercice on supposera que les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ utilisées satisfont systématiquement les conditions d'intégrabilité adéquates pour que $P(t)f, Qf, QP(t)f$ soient bien définies.

1. (*) Soit $(X_t, t \geq 0)$ une chaîne à temps continu de générateur Q, ussue de la distribution λ, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ et $f : E \to \mathbb{R}$. Justifier que

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P(t-s)f(X_s).$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et f telle que $Qf = \alpha f$. Montrer que pour $x \in E, t \geq 0$, $P'(t)f(x) = \alpha P(t)f(x)$. En déduire qu'on a alors

$$P(t)f = \exp(\alpha t) f,$$

et montrer alors que $(M_t^f := f(X_t)\exp(-\alpha t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

3. Dans cette question on considère $(S_t, t \geq 0)$ la marche simple symétrique à temps continu sur $\mathbb{Z}$, qui à taux 1, effectue un déplacement de 1 (resp. -1) avec probabilité $1/2$.

   (a) Exprimer le générateur Q de S.

(b) Soit $\mu > 0$, $\lambda = \ln(\mu)$. Montrer que $f_\lambda(x) = \exp(\lambda x), x \in \mathbb{Z}$ vérifie

$$Qf_\lambda = \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\mu} - 1\right) f_\lambda.$$

(c) En déduire que

$$\left(M_t := \exp\left(\lambda S_t - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\mu} - 1\right) t\right), t \geq 0\right)$$

est une martingale dans la filtration naturelle de S.

(d) Soit $T_1 = \inf\{t \geq 0 : S_t = 1\}$. Justifier que si $\mu > 1$, sous $\mathbb{P}_0$, $(M_{t\wedge T_1}, t \geq 0)$ est une martingale bornée. En déduire finalement que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\mathbb{E}_0[\exp(-\alpha T_1)] = \frac{1}{1 + \alpha + \sqrt{2\alpha + \alpha^2}}.$$

1. Pour $x \in E$, la propriété de Markov au temps s affirme que sachant $X_s = x$, $(\widetilde{X}_u := X_{s+u}, u \geq 0)$ est Markov de générateur Q issu de x, et indépendant de $\mathcal{F}_s$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] &= \sum_{x\in E} \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t)\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{x\in E} \mathbb{E}_x[f(\widetilde{X}_{t-s})]\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \\
&= \sum_{x\in E} \left(\sum_{y\in E} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{t-s} = y) f(y)\right) \mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \\
&= \sum_{x\in E} \left(\sum_{y\in E} p_{t-s}(x,y) f(y)\right) \mathbb{1}_{\{X_s=x\}} \\
&= \sum_{x\in E} P(t-s)f(x)\mathbb{1}_{\{X_s=x\}} = P(t-s)f(X_s),
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Remarques :

• en toute rigueur, la loi du processus $(X_t, t \geq 0)$ dépend de sa distribution initiale, disons ν, et on devrait donc plutôt écrire $\mathbb{E}_\nu[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P(t-s)f(X_s)$. Cela n'affecte cependant en rien le calcul précédent, qui exprime simplement comment on calcule l'espérance conditionnelle de $f(X_t)$ sachant $\mathcal{F}_s$, qui grâce à Markov est l'espérance conditionnelle de $f(X_t)$ sachant X_s. Notons cependant que la loi de X_s, et donc celle de $P(t-s)f(X_s)$ dépendent bien entendu de la mesure initiale ν.

• On utilise que pour tout x et pour tout $t \geq 0$, $f(X_t) \in \mathbb{L}^1$ à deux reprises dans le calcul : d'abord pour assurer que notre espérance conditionnelle est bien définie, puis pour s'assurer que $P(t-s)f(x)$ est bien défini pour tout x, et donc en X_s.

2. On a par définition de $P(t)$,

$$P(0)f = f, \qquad P'(t)f = P(t)Qf = \alpha P(t)f, t \geq 0,$$

de sorte que pour $x \in E$, $t \to g(t) = P(t)f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$g(0) = f(x), \qquad g'(t) = \alpha g(t),$$

et donc $g(t) = \exp(\alpha t)f(x)$. Comme le raisonnement est valable pour tout x on conclut que $P(t)f = \exp(\alpha t)f$.
La condition de mesurabilité de M_t^f est évidente, son intégrabilité provient de nos hypothèses d'intégrabilité sur f (qui font que $f(X_t) \in \mathbb{L}^1$)
Enfin d'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X_t)\exp(-\alpha t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= P(t-s)f(X_s)\exp(-\alpha t) \\ &= \exp(\alpha(t-s))f(X_s)\exp(-\alpha t) = M_s^f\end{aligned}$$

comme souhaité.

3. (a) Le générateur Q est tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$q_x = 1, \quad q_{x(x-1)} = q_{x(x+1)} = 1/2$$

On a donc pour $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$,

$$Qf(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)\right).$$

(b) Il est évident que Qf_λ est bien défini. Par ailleurs, le théorème central limite permet d'affirmer que pour des constantes c, C adéquates, on a $\mathbb{P}_0(|S_t| \geq a) \leq C\exp(-ca^2/(2t))$. Il découle facilement que $\sum_y p_t(x,y)\exp(\lambda y) < \infty$, et que f_λ satisfait les conditions d'intégrabilité qui permettent de définir $P(t)f, P(t)Qf$.
D'après (a)

$$Qf_\lambda(x) = \exp(\lambda x)\frac{1}{2}\left(e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2\right)f_\lambda(x).$$

Posons donc $\alpha = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2\right)$, d'après la question 2,

$$(f_\lambda(S_t)\exp(-\alpha t), t \geq 0)$$

est une martingale dans la filtration naturelle de S.

(c) La martingale arrêtée $M_{t\wedge T_1}$ reste bien une martingale. Si $\mu > 1, \lambda > 0$ et donc $M_{t\wedge T_1} = \exp(\lambda S_{t\wedge T_1} - \alpha t) \leq \exp(\lambda)$ reste effectivement bornée. On peut donc appliquer le théorème d'arrêt et on obtient

$$\mathbb{E}[\exp(-\alpha T_1)] = \frac{1}{\mu}$$

Reste à voir que si $\alpha > 0$ est fixé,

$$\alpha = \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\mu} - 1 \Leftrightarrow \mu^2 - 2(1+\alpha)\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu \in \{\mu_- = 1+\alpha-\sqrt{\alpha+\alpha^2}, \mu_+ = 1+\alpha+\sqrt{2\alpha+\alpha^2}\}.$$

Il est facile de voir que $\mu_- < 1, \mu_+ > 1$ et comme $\mu > 1$ on conclut que $\mu = \mu_+$, et que

$$\mathbb{E}[\exp(-\alpha T_1)] = \frac{1}{1+\alpha+\sqrt{2\alpha+\alpha^2}}.$$

Exercice 5 [Rattrapage 2017]
On considère un modèle de file d'attente, dans lequel Y_t désigne le nombre de clients dans la file à l'instant t, et où le serveur ne peut traiter qu'un seul client à la fois. On fait l'hypothèse que les clients arrivent à des temps espacés d'exponentielles indépendantes et de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que le temps de service τ_n du n-ième client, indépendant de ceux des autres clients, se divise en deux étapes indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle. Plus précisément, $\tau_n = e_{n,1} + e_{n,2}$, où les $\{e_{n,i}, n \in \mathbb{N}^*, i \in \{1,2\}\}$ sont i.i.d suivant la loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$.

1. Expliquer pourquoi $(Y_t, t \geq 0)$ n'est pas une chaîne de Markov.
2. On définit le processus $(X_t, t \geq 0)$, càdlàg, et à valeurs dans $\{(0,0)\} \cup \mathbb{N}^* \times \{0,1\}$ comme suit : $X^1_t = Y_t$, et
   — si $X^1_t = 0$, i.e. si il n'y a pas de client dans la file au temps t, $X^2_t = 0$.
   — si $X^1_t > 0$, $X^2_t = 0$ lorsque la première étape dans le service du client courant est inachevée au temps t, $X^2_t = 1$ sinon.

   Expliquer pourquoi $(X_t, t \geq 0)$ est une chaîne de Markov, décrire son générateur, et représenter le diagramme de la chaîne.

   On note dans la suite $B = \{(k,0), k \in \mathbb{N}\}$, et $\mathbb{P}_{(k,0)}$ la loi de la chaîne X lorsqu'initialement elle est dans l'état $(k,0)$.
3. On définit enfin $(Z_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : $Z_n = X^1_{T_n}$, où $T_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

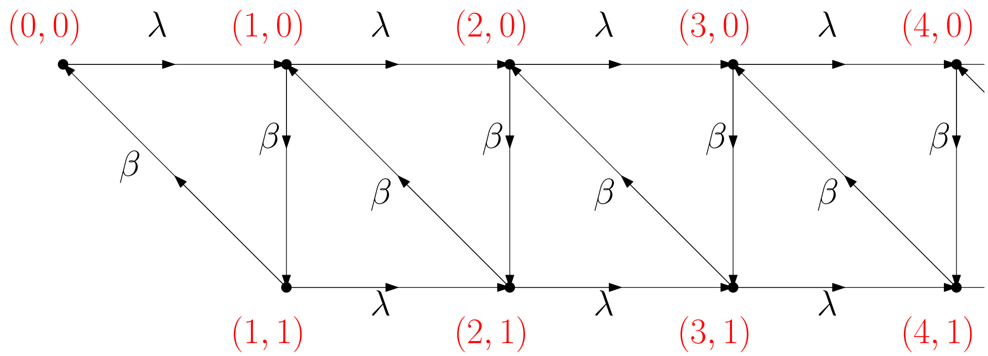
$$\begin{aligned} S_n &:= \inf\{t \geq T_n : X_t \neq X_{T_n}\}, \\ T_{n+1} &:= \inf\{t \geq S_n : X_t \in B\}. \end{aligned}$$

Montrer que Z est une chaîne de Markov à temps discret d'espace d'état $\mathbb{N}$, et de noyau P tel que $P(0,1) = 1$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(k,k+1) &= \frac{\lambda}{\lambda+\beta} + \frac{\beta^2\lambda^2}{(\beta+\lambda)^4}, \\ P(k,k+i-1) &= \frac{\beta^2\lambda^i}{(\lambda+\beta)^{i+2}}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{2\}. \end{aligned}$$

4. Montrer que
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (i-1)\frac{\beta^2\lambda^i}{(\lambda+\beta)^{i+2}} = 1 - \frac{2\beta}{\lambda+\beta}.$$
En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{E}_k[Z_1 - Z_0]$, où $\mathbb{E}_k$ désigne l'espérance lorsque Z est issue de k.
5. A quelle condition sur β, λ la chaîne X est-elle transiente, récurrente nulle, récurrente positive ?
6. A quelle condition sur β, λ la chaîne X vérifie-t-elle le théorème de convergence ?

1. Par exemple, pour $k \geq 1$, $\mathbb{P}(Y_\varepsilon = k-1 \mid Y_0 = k)$ est la probabilité qu'aucun nouveau client n'arrive pendant le temps de service du premier client de la file, elle vaut donc $\mathbb{P}(e_1 + e_2 < \varepsilon < e_3)$ où e_1, e_2, e_3 sont indépendantes, exponentielles, de paramètres respectifs β, β, λ, et cette probabilité est donc d'ordre ε^2 lorsque $\varepsilon \to 0$. En revanche pour un $s > 0$ $\mathbb{P}(Y_{s+\varepsilon} = k-1 \mid Y_s = k)$ est la probabilité de ne voir arriver aucun client pendant le temps de service du client courant servi au temps s. Cependant le temps de service de ce client courant au temps s a démarré en $s - U$ où U est une variable à densité à valeurs dans $[0, s]$. La probabilité que la fin de ce temps de service tombe entre s et $s + \varepsilon$ est donc d'ordre ε lorsque $\varepsilon \to 0$. Finalement lorsque $\varepsilon \to 0$,
$$\mathbb{P}(Y_{s+\varepsilon} = k-1 \mid Y_s = k) >> \mathbb{P}(Y_\varepsilon = k-1 \mid Y_0 = k),$$
et donc Y ne peut être Markov.
2. On a par exemple que $\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = (k+1,1) \mid X_t = (k,1))$ est la probabilité qu'un client arrive dans l'intervalle $[t, t+\varepsilon]$ avant que la première partie du temps de service du client courant s'achève, on a donc
$$Q((k,1),(k+1,1)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = (k+1,i) \mid X_t = (k,i)) = \lambda.$$
De même pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$Q((k,1),(k,2)) = \beta, \quad Q((k,2),(k+1,2)) = \lambda, \quad Q((k,2),(k-1,1)) = \beta.$$



3. La probabilité que la chaîne X issue de $(k, 1)$ effectue d'abord la transition $(k, 1) \to (k + 1, 1)$ est égale à $\mathbb{P}(e_1 < e_2)$ où e_1, e_2 sont des variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ, β, et donc cette probabilité vaut $\lambda/(\lambda + \beta)$. Par des considérations similaires, la chaîne issue de $(k, 2)$ effectue d'abord la transition $(k, 2) \to (k + 1, 2)$ avec probabilité $\lambda/(\lambda + \beta)$.

   Quant au processus Z, tant qu'il y a des clients dans la file il répertorie les valeurs successives du nombre de clients dans la file à chaque fois qu'un service est terminé. Lorsque $Z_n = 0$, $S_{n+1} = T_{n+1}$ est simplement le temps d'arrivée du prochain client et on a alors systématiquement $Z_{n+1} = 1$. On a donc bien dans ce cas

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Z_n = 0) =: P(0, 1) = 1$$

   Pour que $Z_{n+1} = k + 1$ si $Z_n = k \geq 1$, il y a deux chemins possibles pour X : soit X effectue sa première transition de $(k, 1)$ à $(k + 1, 1)$ (un événement de probabilité $\lambda/(\lambda + \beta)$), soit elle effectue les transitions successives $(k, 1) \to (k, 2), (k, 2) \to (k + 1, 2), (k + 1, 2) \to (k + 2, 2), (k + 2, 2) \to (k + 1, 1)$ (un événement, d'intersection vide avec le précédent, et de probabilité $\lambda^2\beta^2/(\lambda + \beta)^4$), ce qui conduit au résultat souhaité :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k + 1 \mid Z_n = k) = P(k, k + 1) = \frac{\lambda}{\lambda + \beta} + \frac{\lambda^2\beta^2}{(\lambda + \beta)^4}$$

   Par ailleurs, si $k \geq 1, i \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, pour que $Z_{n+1} = k + i - 1$ lorsque $Z_n = k$ il n'y a qu'un seul chemin possible pour X, qui doit effectuer les transitions successives $(k, 1) \to (k, 2), (k, 2) \to ... \to (k + i, 2), (k + i, 2) \to (k + i - 1, 2)$. On déduit que

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k \mid Z_n = k + 1) =: P(k, k + i - 1) = \frac{\beta\lambda^i}{(\beta + \lambda)^{i+2}}.$$

   On conclut que Z est bien une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, de générateur P.

4. On a

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} j \frac{\beta}{\lambda + \beta} \frac{\lambda^{j-1}}{(\lambda + \beta)^{j-1}} = \frac{\lambda + \beta}{\beta},$$

on reconnaît en effet l'espérance d'une variable géométrique de paramètre $\beta/(\lambda+\beta)$.
On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-1)\frac{\beta^2\lambda^i}{(\lambda+\beta)^{i+2}} &= \sum_{j\in\mathbb{N}^*}(j-2)\frac{\beta^2}{(\lambda+\beta)^2}\frac{\lambda^{j-1}}{(\lambda+\beta)^{j-1}}\\ &= 1-\frac{2\beta^2}{(\lambda+\beta)^2}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\beta}}\\ &= 1-\frac{2\beta}{\lambda+\beta}=\frac{\lambda-\beta}{\lambda+\beta}\end{aligned}$$

On en déduit, pour $k\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_k[Z_1-Z_0] &= \sum_{i=-1}^{\infty} iP(k,k+i)\\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\beta}+\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-1)\frac{\beta^2\lambda^i}{(\lambda+\beta)^{i+2}}\\ &= \frac{2\lambda-\beta}{\lambda+\beta}\end{aligned}$$

5. Notons que Z est la version "réfléchie" en 0 d'une marche asymétrique sur $\mathbb{Z}$, disons S, de noyau R tel que pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}R(k,k+1) &= \frac{\lambda}{\lambda+\beta}+\frac{\beta^2\lambda^2}{(\beta+\lambda)^4},\\ R(k,k+i-1) &= \frac{\beta^2\lambda^i}{(\lambda+\beta)^{i+2}},\quad \forall i\in\mathbb{N}\setminus\{2\}.\end{aligned}$$

Si $2\lambda-\beta>0$ on a que $\mathbb{E}_k[Z_1-Z_0]=\frac{2\lambda-\beta}{\lambda+\beta}>0$ pour tout $k\geq 1$. Un argument de loi des grands nombres permet de conclure que p.s. $Z_n/n\to\frac{2\lambda-\beta}{\lambda+\beta}$ et la chaîne est donc transiente.
Lorsque $2\lambda-\beta<0$, S est transiente vers $-\infty$. Comme elle n'effectue que des pas de taille 1 vers la gauche, et des pas à moments exponentiels vers la droite, on déduit qu'elle atteint 0 en un temps d'espérance finie depuis 1, et donc que Z est récurrente positive.
Enfin si $2\lambda=\beta$, un argument classique permet d'affirmer que S, et donc Z sont récurrentes nulles.

6. La chaîne Z possède donc une unique distribution invariante et vérifie le théorème de convergence ssi $\beta<2\lambda$.
Il suffit alors de remarquer que $\mathbb{E}_{(k,1)}[T_{(0,1)}]=\mathbb{E}_k[T_0]<\infty$ ssi $\beta<2\lambda$. Comme

$$\mathbb{E}_{(k,2)}[T_{(0,1)}] = \frac{1}{\lambda+\beta}+\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\mathbb{E}_{(k+1,2)}[T_{(0,1)}]+\frac{\beta}{\lambda+\beta}\mathbb{E}_{(k-1,1)}[T_{(0,1)}]$$

il vient également que ces quantités sont finies ssi $\beta < 2\lambda$. On conclut que X est récurrente positive ssi $\beta < 2\lambda$, et donc que le théorème de convergence est vérifié uniquement dans ce cas.

Exercice 6 [Rattrapage 2016]
Soit k un entier non nul fixé. Soit $(X_n), n \geq 0$ une chaîne de Markov irreductible sur $\Omega = \{1, \dots, k\}$. On note, pour $y \in \Omega$, τ_y le temps d'atteinte de y i.e. $\tau_y = \inf\{n, X_n = y\}$. On appelle τ_{cov} le temps de recouvrement i.e. le temps au bout duquel on a visité tous les sommets de Ω. On pose enfin

$$t_{hit} := \max_{x,y \in \Omega} \mathbb{E}_x(\tau_y); \quad t_{cov} := \max_{x \in \Omega} \mathbb{E}_x(\tau_{cov}).$$

1. Montrer que $t_{hit} \leq t_{cov}$.
2. On veut montrer que $t_{cov} \leq t_{hit}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$. On fixe un état initial x et soit σ une permutation uniforme sur $\mathcal{S}_k$, σ indépendante de $(X_n), n \geq 0$. On va chercher les états "dans l'ordre de σ" : étant donné un entier $1 \leq l \leq k$, soit T_l le premier instant où $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(l)$ ont été visités (tous) et on définit alors L_l comme le dernier état visité parmi $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(l)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}_x(T_1|\sigma(1) = s) \leq t_{hit}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}_x(T_1) \leq t_{hit}$.
   (c) Dans le cas où $L_2 = \sigma(2)$, montrer que $E_x(T_2 - T_1|L_2 = \sigma(2)) \leq t_{hit}$. (On pourra montrer que $E_x(T_2 - T_1|\sigma(1) = r, \sigma(2) = L_2 = s) = \mathbb{E}_r(\tau_s)$, r, s étant deux entiers distincts).
   (d) Calculer $E_x(T_2 - T_1|L_2 = \sigma(1))$.
   (e) Déduire des deux questions précédentes que $E_x(T_2 - T_1) \leq \frac{1}{2}t_{hit}$.
   (f) Soit $k \geq 3$. On note μ la loi de L_{k-1}. On fixe deux entiers distincts r, s. Montrer que $\mathbb{E}(T_k - T_{k-1}|\sigma(k-1) = r, \sigma(k) = L_k = s) = \mathbb{E}_\mu(\tau_s)$. En déduire que $\mathbb{E}(T_k - T_{k_1}) \leq \frac{1}{k}t_{hit}$.

Exercice 7 [Examen 2015]
On considère le graphe suivant, qui est un arbre de généalogie : un sommet noté 0 appelé racine. Ce sommet est connecté à deux sommets ou "descendants" qui forment la génération 1. Ensuite pour $i = 1, \dots, k-1$, chacun des sommets de la génération i est connecté à deux sommets de la génération $i+1$. Le graphe obtenu est sans cycle. On représente les premières générations du graphe sur la figure ci-dessus.
L'arbre s'arrête à la génération k pour un entier k fixé. La distance à la racine d'un sommet v est simplement le numéro de la génération auquel v appartient, il est noté $|v|$. Une feuille est un sommet de la génération k, on note B l'ensemble des feuilles.
Partie I.

1. Montrer que les degrés possibles des sommets sont $1, 2$ et 3 et dénombrer chaque ensemble de degrés.

2. On note (X_t^v) la marche aléatoire lazy sur ce graphe issue d'un sommet v quelconque : $X_0^v = v$ et à chaque instant $t \in \mathbb{N}$, avec probabilité $1/2$ elle reste au même endroit et sinon elle saute uniformément au hasard sur un des sommets voisins (elle peut remonter sur la génération précédente en particulier). Donner sa matrice de transition et ses lois invariantes.

3. Soit v et w deux sommets quelconques. On considère deux particules initialement en v et w respectivement. A chaque instant $t \in \mathbb{N}$ on lance une pièce non truquée. Si Pile sort, la particule initialement en v bouge uniformément sur un de ses voisins. Si Face sort c'est la particule initialement en w qui saute uniformément sur un de ses voisins. Montrer qu'on définit ainsi un couplage (Y_t, Z_t) de (X_t^v) et (X_t^w).

4. On utilise ce couplage jusqu'au premier instant T où les marches X_t^v et X_t^w sont à la même distance de la racine. Expliciter alors un couplage $(Y_t, Z_t), t \geq T$ tel que : Y_t évolue comme une marche aléatoire lazy issue de v et à chaque instant Z_t se rapproche (resp. s'éloigne) de la racine ssi Y_t se rapproche (resp. s'éloigne) de la racine.

5. On suppose à partir de maintenant que v est plus proche de la racine que w. Soit B l'ensemble des feuilles. Montrer que si Y_t a visité B puis 0 alors Y_t et Z_t se sont forcément croisés.

6. On note $\tau = \inf\{t, \exists\, t' < t : X_{t'}^0 \in B; X_t^0 = 0\}$ le temps que met la marche aléatoire lazy issue de 0 pour aller en B puis revenir en 0. Montrer que si $\tau_{v,w}$ désigne le temps de couplage de (X_t^v) et (X_t^w)

$$\mathbb{P}(\tau_{v,w} \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\tau}{t}.$$

Partie II.

On considère maintenant une marche aléatoire sur un graphe (toutes les conductances sont 1). On notera $R(a \to b)$ la résistance effective entre deux sommets a et b.

1. Expliciter la probabilité invariante π dans ce cas.

2. Soit τ_b le temps d'atteinte de b. On rappelle que si G_{τ_b} est la fonction de Green de la marche tuée au temps τ_b alors $c(a)R(a \to b) = G_{\tau_b}(a, a)$. Montrer que $c(a)R(a \to b) = G_{\tau_{b,a}}(a, a)$ où $\tau_{b,a}$ désigne le premier temps de passage en a après τ_b en partant de a (i.e. le temps mis partant de a pour aller en b puis revenir en a).

3. Rappeler pourquoi $G_{\tau_{b,a}}(a, a) = \pi(a)\mathbb{E}_a(\tau_{b,a})$. *Indication : Montrer que* $\frac{G_{\tau_{b,a}}(a,x)}{\mathbb{E}_a(\tau_{b,a})}$ *est une probabilité invariante comme dans le lemme de Kac...*

4. En déduire $\mathbb{E}_a(\tau_{b,a})$.

5. On considère maintenant la marche non lazy sur le graphe de la partie I. Calculer la résistance effective $R(0 \to B)$, en utilisant le fait qu'on peut identifier les sommets d'une même génération (justifier). Majorer alors $\mathbb{E}_0(\tau_{B,0})$ et en déduire une majoration de cette espérance pour la marche aléatoire lazy.

Exercice 8 [Examen 2015]
Une bactérie se divise en deux bactéries identiques après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ , qui se divisent de la même façon (chacune après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ se divise en deux bactéries) à leur tour les unes indépendamment des autres. Soit X_t le nombre de bactéries au temps t .

1. Prouver que $(X_t), t \geq 0$ est un processus de Markov dont on donnera le générateur.
2. Prouver que $\mathbb{E}_1 X_t = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{E}_2(X_{t-s}) ds + e^{-\lambda t}$. (utiliser la propriété de Markov forte).
3. On pose $f(t) = \mathbb{E}_1 X_t$. Montrer que $f(t) = 2 \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} f(t-s) ds + e^{-\lambda t}$. En déduire une equation pour $e^{\lambda t} f(t)$. Calculer enfin $f(t)$.
4. Prouver que $\phi(t) = \mathbb{E}[z^{X_t}]$ vérifie l'équation :
$$\phi(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \phi(t-s)^2 ds + z e^{-\lambda t}.$$
Différencier les cas $J_1 \leq, \geq t$ où J_1 est l'instant de la première division.
5. En déduire que $\phi'(t) = \lambda \phi(t)(\phi(t) - 1)$ en faisant le changement de variables $u = t - s$. En déduire une expression de $\phi(t)$ (vu que $\phi(0) = z$).
6. Calculer $\mathbb{P}(X_t = n)$ $\forall n \geq 0$.