Probabilités et simulations.
Feuille de TD 1.

Exercice 1 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on définit les ensembles de parties

$$\mathcal{A}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \Omega, \emptyset\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \Omega, \emptyset\}.$$

(1) $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont-elles des tribus de Ω ? Justifier votre réponse.
(2) On définit l'application $\mathbb{P} : \mathcal{A}_2 \to [0, 1]$ par $\mathbb{P}(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{4, 5, 6\}) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. L'application $\mathbb{P}$ est-elle une probabilité ?
(3) Donner un ensemble de parties différent de l'ensemble des parties de Ω et des exemples ci-dessus et qui soit une tribu de Ω. Définir ensuite une probabilité sur cette tribu.
(4) Que signifient les lignes de code suivantes?
   - `--> M=zeros(2,2);`
   - `--> x=rand();`
   - `--> y=rand(1:6);`
   - `--> y=rand(1:6);`
   - `--> A=rand(2,2);`
   - `--> z=ceil(6*x);`
   - `--> b=floor(2*y);`
   - `--> disp(z);`
   - ```
     --> for i=1:6 do
     if y(i) < 0.5 then
     y(i)=0;
     else y(i)=1;
     end
     end
     disp(y);
     ```
(5) On considère Ω muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(\Omega)$, et $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ une probabilité telle que

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 0.1 \quad \mathbb{P}(\{1, 2\}) = 0.4 \qquad \mathbb{P}(\{3\}) = 0.1 \qquad \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}).$$

Exprimer $\mathbb{P}(\{i\})$ pour tout $i \in \{1, ..., 6\}$. Ecrire un programme qui simule un variable à valeurs dans $\{1, ..., 6\}$, de loi $\mathbb{P}$.

Note : Par la suite on pourra aussi utiliser la fonction
`grand(m,n,"uin",Low,High)`
qui génère une matrice $m \times n$ de variables i.i.d, uniformes sur l'ensemble des entiers {`Low, Low+1,...,High`}.

Les fonctions `rand` et `grand` n'utilisent pas le même générateur de nombres pseudo-aléatoires. `rand` est plus rapide, tandis que `grand` possède de meilleures propriétés statistiques. On pourra consulter l'aide de `scilab` pour de plus amples informations.

Exercice 2 Soit Ω un ensemble de cardinal n. Montrer que la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties est également finie. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$?
     ```

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B des évenements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Montrer que $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$ muni de la tribu de l'ensembles de toutes ses parties et de la probabilité uniforme. Donner des exemples de tels A et B et tels que $\mathbb{P}(A \cap B)$ atteint les bornes ci-dessus. Donner des bornes correspondantes pour $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 4

A. On considère n dés équilibrés, distinguables, et on suppose que le i-ième dé possède f_i faces, où, pour $1 \leq i \leq n$ $f_i \in \{2, 3, ...\}$.
   Décrire un espace de probabilité Ω, une tribu $\mathcal{A}$ et une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui permet de décrire un jet des n dés.

B. On jette un dé rouge et un dé vert, tous deux ayant 6 faces.
   (1) Quelle est la probabilité que le nombre sur le dé rouge soit strictement plus grand que le nombre sur le dé vert?
   (2) Quelle est la probabilité que les deux nombres diffèrent d'au plus 1 ?
   (3) Quelle est la probabilité que le maximum des deux nombres est plus grand ou égal à 5 ?

C. (1) Ecrire un programme qui, pour des entiers k, n, simule k variables indépendantes de loi $\text{Unif}(1, ..., n)$.
   (2) Ecrire un programme qui pour un entier N, simule la fréquence de l'événement de la question B.1.
   (3) Faire de même avec les événements des questions B.2, B.3.

Exercice 5

Soit n un entier strictement positif.

On considère $X_1, X_2, ..., X_n$ le nombre de minutes d'ensoleillement à Paris, au cours des années $2013, 2014, ..., 2013 + n - 1$.

On classe alors ces variables par ordre décroissant (on suppose qu'il n'y a aucun cas d'égalité), et, pour $1 \leq i \leq n$, on note $r(i)$ le rang de X_i.

(1) Expliquer pourquoi l'espace $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, ..., n\}$, muni de la tribu des parties, et de la probabilité uniforme, semble approprié pour décrire $(r(1), ..., r(n))$
(2) Quel est le cardinal de $\mathfrak{S}_n$?
(3) Ecrire un programme qui, en fonction de n, renvoie les cardinaux respectifs de $\mathfrak{S}_1, ..., \mathfrak{S}_n$.
(4) Pour $n \geq 1$ on définit
$$\alpha(n) := \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$
En utilisant la commande `plot2d3`, écrire un programme qui, en fonction de n, trace le graphe de
$$\frac{|\mathfrak{S}_i|}{\alpha(i)}, 1 \leq i \leq n.$$
(5) Calculer $\mathbb{P}(|r(1) - r(2)| = k + 1)$, $k \in \{0, ..., n - 1\}$ en fonction de k, n.
(6) Ecrire le programme `RandomPermutation` qui en fonction de n, renvoie une permutation aléatoire de $\{1, ..., n\}$.
   Note : Par la suite on pourra aussi utiliser la fonction `grand(m,"prm",vect)`. Elle renvoie m colonnes qui sont des permutations aléatoires, tirées indépendamment, du vecteur <u>colonne</u> `vect` (par exemple `[1:n]'`).

(7) Dans cette question on suppose que $n = 10$. Ecrire un programme qui estime la fréquence de l'événement $\{|r(1) - r(2)| = 3\}$ sur 10000 réalisations indépendantes de $(r(1), ..., r(10))$. Comparer avec la formule obtenue à la question précédente.

Exercice 6 On considère un ensemble de N personnes. Pour simplifier le problème, on suppose que les anniversaires de ces N personnes sont des variables indépendantes et identiquement distribuées, uniformes sur $\{1, ..., 365\}$.

(1) Trouver un espace probabilisé qui permet de décrire la situation.
(2) Quelle est, en fonction de N, la probabilité p_N qu'au moins deux des N personnes aient un anniversaire commun? En utilisant cette formule exacte, écrire un programme qui renvoie p_k, $k = 1, ..., 100$. A partir de quelle valeur de N la probabilité p_N dépasse-t-elle $1/2$?
(3) Pour $1 \leq i \leq 365$, quelle est la loi de N_i, le nombre de personnes parmi les N qui ont leur anniversaire le jour i? Quelle est la loi de $(N_1, ..., N_{365})$?
(4) (*) Ecrire un programme qui, en fonction de N et k, la réalisation des N dates d'anniversaire, et renvoie si au moins k personnes ont un anniversaire commun et 0 sinon. Ecrire alors un programme qui, en fonction de N et n, simule n réalisations indépendantes des N anniversaires, et renvoie la fréquence $q_N(n)$ de l'evénement $\mathcal{E}_N^{(3)} := \{$au moins trois des N personnes ont un anniversaire commun$\}$.

A partir de quelle valeur de N la probabilité $q_N := \mathbb{P}(\mathcal{E}_N^{(3)})$ semble-t-elle dépasser $1/2$?

Exercice 7

(1) Ecrire un programme qui, en fonction de n, renvoie les $n + 1$ premières lignes du triangle de Pascal. Expliquer pourquoi il est préférable d'utiliser la formule
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
plutôt que la formule
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
(2) En déduire un programme qui, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$ trace la distribution d'une variable $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Note : Par la suite on pourra aussi utiliser la fonction `grand(m,k,"bin",n,p)` qui génère une matrice $m \times k$ de variables i.i.d, de loi $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Exercice 8 Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, des évenements d'une tribu d'un espace probabilisé , démontrer par récurrence la formule de Poincaré :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n paires de chaussures (chaque paire possède une chaussure droite et une chaussure gauche) toutes distinctes sont séparées, complètement mélangées, puis reconstituées de façon à former à nouveau n paires (chaque paire possèdant à nouveau exactement une chaussure droite et une chaussure gauche).

(1) Dans cette question on suppose que $n = 3$. Quelle est la probabilité que toutes les paires soient correctement reconstituées? Quelle la probabilité qu'aucune ne soit correctement reconstituée? Quelle est la probabilité qu'au moins une paire soit correctement reconstituée?
(2) Dans le reste de l'exercice on considère $n \geq 1$ quelconque. Expliquer pourquoi, comme dans l'exercice 3, l'espace $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, ..., n\}$, muni de la tribu des parties, et de la probabilité uniforme, est approprié pour décrire la situation.
(3) Pour $1 \leq i \leq n$, on note $A_i = \{$ la i-ième paire est reconstituée$\}$.
Calculer $\mathbb{P}(A_i)$, $1 \leq i \leq n$.
Calculer $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$, pour $1 \leq i < j \leq n$.
De façon générale, pour $k \in \{1, ...n\}$, et $i_1 < ... < i_k$, calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq \ell \leq k} A_{i_\ell}\right)$.
(4) A l'aide de l'exercice précédent, trouver une formule pour la probabilité p_n qu'aucune paire parmi n ne soit reconstituée (un tel événement est parfois appelé un *dérangement*).
(5) Ecrire un programme qui, en fonction de n, simule la reconstitution aléatoire des n paires.
(6) Estimer de deux manières les probabilités $p_n, 1 \leq n \leq 40$:
   - en écrivant un programme utilisant la formule exacte de p_n trouvée à la question 4 ci-dessus.
   - en simulant, pour chaque $n \in \{1, ..., 40\}$, 1000 réalisations de l'expérience et en mesurant la fréquence de l'événement de dérangement.

Exercice 10 Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des évenements d'une tribu d'un espace probabilisé,

$$\text{montrer que } \forall n \in \mathbb{N} \ \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \quad \text{puis que} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 11 *Inégalités de Bonferroni.*

$$\text{Montrer que} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

$$\text{et que} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

Exercice 12 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties de appartenant à une tribu $\mathcal{A}$ d'un ensemble Ω. Montrer que

- $\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{A}$
- $\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k \in \mathcal{A}$

et aussi que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.