Probabilités et simulations.
Feuille de TD 3.

Exercice 1

(1) Qu'effectuent les lignes de code qui suivent ?
```
x=-4:0.05:4;
y=grand(1,1000000,"nor",0,1);
histplot(x,y);
```
(2) De manière similaire, construire les histogrammes de 1000000 réalisations de variables ayant les distributions suivantes :
$\chi^2(10), \Gamma(4, 1/2), \mathrm{Poi}(3), \beta(2, 3)$, et ce dans des fenêtres appropriées.
On utilisera la commande `grand` avec l'option appropriée (consulter la rubrique d'aide de `scilab` pour plus de détails).

Exercice 2

(1) Qu'effectuent les lignes de code qui suivent ?
```
X=linspace(-4,4,10000);
[P Q] = cdfnor("PQ",X, zeros(1:10000),ones(1:10000));
plot2d(X,P);
```
(2) De manière similaire à la question précédente, tracer le graphe, dans une fenêtre appropriée, de fonctions de répartitions de variables
$\chi^2(10), \Gamma(4, 1/2), \mathrm{Poi}(3), \beta(2, 3)$.
On utilisera les fonctions `cdfchi, cdfgam, cdfpoi, cdfbet` et la rubrique d'aide de `scilab` pour comprendre la syntaxe de chacune de ces fonctions.
(3) Pourquoi n'y a-t-il pas de commande spécifique similaire pour tracer les fonctions de répartition de lois uniformes, exponentielles?

Exercice 3 Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x)$$

Trouver la probabilité que X prenne ses valeurs dans les ensembles suivants :

(1) $A =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
(2) $B =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
(3) $C =]\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$
(4) $D = [0, 2[$
(5) $E =]3, \infty[$

Quelle est la loi de X?

Exercice 4 Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\mathbb{1}_{[\frac{1}{i},\infty[}(x).$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une fonction de répartition. Soit alors X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par F.

(2) Trouver la probabilité que X prenne ses valeurs dans les ensembles suivants :
- $A = [1, \infty[$
- $B = [\frac{1}{10}, \infty[$
- $C = \{0\}$
- $D = [0, \frac{1}{2}[$
- $E =]-\infty, 0[$
- $G =]0, \infty[$.

(3) Quelle est la loi de $1/X$? Ecrire un programme qui simule n réalisations indépendantes de X, et vérifier les valeurs calculées en 2.

Exercice 5 Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{\min(x,1)}{3} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^i} \mathbb{1}_{[i,\infty[}(x).$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une fonction de répartition. Soit alors X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par F.

(2) Trouver la probabilité que X prenne ses valeurs dans les ensembles suivants :
- $A = [1, +\infty[$
- $B =]0, 1[$
- $C = \{0\}$
- $D = \{1, 2, 3\}$
- $E_n = [n, +\infty[$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$,
- $F =]-\infty, 0[$
- $G_n = \{1, ..., n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Montrer que pour des variables B, Y, Z indépendantes, et dont on précisera la loi, on peut écrire

$$X = BY + (1-B)Z.$$

(4) Déduire de la question précédente un programme qui simule n réalisations indépendantes de X, et vérifier les valeurs calculées en 2.

Exercice 6 On rappelle que dans le cadre de l'exercice II.8 on a écrit un programme qui simule k tirages successifs dans une urne de Polyá.

On rappelle d'autre part que la loi $\beta(a, b)$ a la densité

$$f_{\beta(a,b)}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Ecrire un programme qui renvoie l'histogramme des proportions de boules rouges obtenues à l'issue de 10000 réalisations indépendantes de 400 tirages successifs pour

- $r = n = d = 1$. Qu'observe-t-on?
- $r = 2, n = 3, d = 1$. Comparer avec la fonction de densité de la variable $X \sim \beta(2, 3)$.

- $r = 5, n = 2, d = 3$. Comparer avec la fonction de densité de la variable $Y \sim \beta(5/3, 2/3)$.

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $Y_k = X^k$ pour un entier $k \geq 1$.

(1) Ecrire un programme qui renvoie, en fonction de k, un histogramme de 100000 réalisations de Y_k.
(2) Déterminer la densité de Y_k (*Indication*: Distinguer les k pairs et impairs). Tracer son graphe et comparer avec celui de l'histogramme obtenu en 1.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire de Cauchy, centrée, de paramètre α. Soit $Y_a := \frac{a}{X}$ avec $a \neq 0$.

(1) Ecrire un programme qui renvoie, en fonction de a, un histogramme de 100000 réalisations de Y_a.
(2) Montrer que Y_a est aussi une variable de Cauchy centrée dont on déterminera le paramètre. Comparer le graphe de la densité de Y_a avec l'histogramme obtenu en 1.

Exercice 9 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $]-\pi, \pi[$, et $Y_\theta = \sin(X+\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

(1) Ecrire un programme qui renvoie, en fonction de θ, un histogramme de 10^6 réalisations de Y_θ.
(2) Montrer que Y_θ admet la densité

$$f_{Y_\theta}(y) = \frac{2}{2\pi\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(y),$$

puis comparer le graphe de f avec celui de l'histogramme obtenu en 1.

Exercice 10

(1) • Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évenements deux à deux disjoints sur un espace de probabilités. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
• Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évenements négligeables sur un espace de probabilités. Montrer que $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ est également négligeable.
(2) • Soit $(A_\beta)_{\beta\in B}$ une famille d'évenements deux à deux disjoints sur un espace de probabilités. Montrer que si $\mathbb{P}(A_\beta) > 0$, $\forall \beta \in B$, alors l'ensemble d'indices B est fini ou dénombrable.
• Soit F la fonction de répartition d'une v.a.r. Montrer que F peut avoir une infinité de points de discontinuité, mais que le nombre de ces points est au plus dénombrable.

Exercice 11 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ admettant une densité f.

(1) Montrer que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que si B est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$ alors B est un borélien et $\mathbb{P}(B) = 0$.
(3) Soit A un borélien, on note $\mathbb{P}(A) = p \in [0, 1]$. Montrer que $A \cup B$ est un borélien et que $\mathbb{P}(A \cup B) = p$.