Probabilités et simulations.
Feuille de TD 5.

Exercice 1 Lois usuelles
Rappeler f_X la fonction de densité (ainsi que F_X la fonction de répartition si son expression est simple), puis calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$, $\phi_X : t \to \mathbb{E}[\exp(tX)]$ (dont on n'oubliera pas de préciser le domaine de définition), et enfin rappeler une commande simple permettant de simuler X, dans chacun des cas suivants :

(1) $X \sim \mathrm{Unif}[a,b]$, où $a < b$ sont deux réels.
(2) $X \sim \exp(\lambda)$, où $\lambda > 0$.
(3) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
(4) $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.
(5) $X \sim \Gamma(n,\lambda)$, où $n \in \mathbb{N}^*, \lambda > 0$.

Exercice 2

(1) Soit X une v.a. de fonction de répartition F continue. Montrer que la v.a. $Y = F(X)$ est uniforme sur $[0,1]$.
(2) Soit F une fonction de répartition continue et injective. Soit U une variable uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $X = F^{-1}(U)$ admet F pour fonction de répartition.
(3) Expliquer l'intérêt de 2. pour les simulations.

Exercice 3 Pareto
Fixons $c > 0, \alpha > 0$, et considérons X une variable aléatoire réelle telle que pour tout $x \geq c$,

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{c^\alpha}{x^\alpha}.$$

On dit alors que X suit une loi de Pareto de paramètres c, α.

(1) Dans quel intervalle la variable X prend-elle ses valeurs ? Que vaut F_X, la fonction de répartition de X ?
(2) Calculer f_X, la densité de X.
(3) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\mathbb{E}[|X|] < \infty$? Pour ces valeurs calculer $\mathbb{E}[X]$.
(4) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\mathbb{E}[X^2] < \infty$? Pour ces valeurs calculer $\mathrm{Var}(X)$.
(5) Soit $Y \sim \exp(\alpha)$. Quelle est la loi de la variable $Z := c\exp(Y)$?
(6) Ecrire un programme qui simule 10^6 variables indépendantes toutes de même loi de Pareto de paramètres $1, 3$. Tracer l'histogramme correspondant et comparer f_X trouvé plus haut.

Exercice 4 Weibull
Soit $X \sim \exp(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour un $\alpha > 0$ on pose $Y = X^{1/\alpha}$

(1) Trouver F_Y, f_Y.
(2) Exprimer $\mathbb{E}[Y]$ à l'aide de la fonction Γ. On rappelle que $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\exp(-x)dx$.

(3) On dit que la variable Y suit une loi de Weibull de paramètres λ, α. Simuler 10^6 variables indépendantes de même loi de Weibull de paramètres $1, 3$. Tracer le diagramme correspondant et comparer à f_Y calculée en 1.

Exercice 5 Gumbel
Soient $\mu \in \mathbb{R}, \beta > 0$ fixés. On considère X la variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = e^{-e^{(\mu-x)/\beta}}.$$

On dit que X suit une loi de Gumbel de paramètres μ, β.

(1) Vérifier que F_X est bien une fonction de répartition, et qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Calculer F_X^{-1}.
(2) Calculer la densité f_X.
(3) Simuler 10^6 variables indépendantes, toutes distribuées suivant la loi de Gumbel de paramètres $0, 1$. Tracer l'histogramme correspondant et comparer avec la fonction f_X calculée à la question précédente.

Exercice 6 Fréchet
Soit $\alpha > 0$ fixé, et X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad \forall\ x > 0.$$

On dit que X suit la loi de Fréchet de paramètre α

(1) Vérifier que F_X est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer F_X^{-1}.
(2) Calculer f_X.
(3) Simuler 10^6 variables indépendantes, toutes distribuées suivant la loi de Fréchet de paramètre 2. Tracer l'histogramme correspondant et comparer avec la fonction f_X calculée à la question précédente.

Exercice 7 *L'intensité* d'une v.a. X est définie par la fonction

$$h_X(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq X < t + \epsilon | X \geq t)}{\epsilon}$$

lorsque la limite existe. Elle représente la probabilité qu'un objet de durée de vie X meure immédiatement après l'instant t, sachant qu'il est en vie à l'instant t.

(1) Calculer l'intensité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. Vérifier ce calcul par une simulation de l'intensité lorsque $\lambda = 1$ (on estimera la probabilité conditionnelle ci-dessus pour $\varepsilon = 0.001$).
(2) Calculer l'intensité d'une variable aléatoire de Weibull de paramètres λ, α. On vérifiera à nouveau le calcul par une simulation lorsque $\lambda = 1, \alpha = 2$.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(t) = \frac{1}{2} \left(e^t \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(t) + (2 - e^{-t}) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) \right).$$

Déterminer la loi de la variable $Y = |X|$, puis écrire un programme qui simule la variable Y.

Exercice 9 Soit X une v.a. uniforme $]-\pi, \pi[$, et $Y = a \tan X$ avec $a > 0$. Trouver la densité f_Y de Y.

Simuler 10^6 variables indépendantes de même loi que Y, tracer l'histogramme correspondant et comparer à f_Y.

Exercice 10 Soit X une v.a. normale $N(\mu, \sigma^2)$. Calculer la densité de $Y = e^X$

Simuler 10^6 variables indépendantes de même loi que Y, tracer l'histogramme correspondant et comparer à f_Y.

Exercice 11 Soit X et Y des v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Trouver les probabilités des évenements suivants :

(1) $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq i)$
(2) $\mathbb{P}(X = Y)$
(3) $\mathbb{P}(Y > X)$
(4) $\mathbb{P}(X \,\text{divise}\, Y)$
(5) $\mathbb{P}(X \geq kY), \quad k \in \mathbb{N}^*$
(6) Vérifier les calculs précédents à l'aide d'une simulation.

Exercice 12 Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $Z = XY$. Discuter l'indépendance des variables X, Y, Z.

Ecrire un programme qui simule le triplet (X, Y, Z).