**Probabilités et simulations.**
**Feuille de TD 6.**

**Exercice 1** Soient deux variables $X$ et $Y$, indépendantes, de fonctions de répartition respectives $F_X, F_Y$. Pour $\alpha \in [0,1]$ on pose

$$F_\alpha(x) = \alpha F_X(x) + (1-\alpha)F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, $F_\alpha$ est une fonction de répartition.
(2) Soit $\xi \sim \mathrm{Ber}(\alpha)$ indépendante de $(X,Y)$. Exprimer la fonction de répartition de $\xi X + (1-\xi)Y$.
(3) Soit $\phi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\phi(\xi X + (1-\xi)Y)] = \alpha \mathbb{E}[\phi(X)] + (1-\alpha)\mathbb{E}[\phi(Y)].$$

**Exercice 2** On suppose que le nombre $X$ d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la probabilité qu'un oeuf meurt sans éclore est, indépendamment des autres oeufs, égale à $1-p$, où $p \in ]0,1[$.

(1) Ecrire un programme qui simule $Y$, le nombre d'oeufs qui arrivent à éclosion. Tracer l'histogramme de $10^6$ réalisations de cette variable pour $\lambda = 10$, et $p = 0, 1/10, 1/4, 1/2, 3/4, 1$.
(2) Quelle est la loi de $Y$ ?
(3) Quelle est la loi jointe de $(Y, Z)$, où $Z = X - Y$ est le nombre d'oeufs morts avant éclosion?

**Exercice 3** Qu'effectuent les lignes de code qui suivent ?

```
M=grand(100000,2,"nor",0,1);
x=[-3:0.25:3];
y=[-3:0.25:3];
for i=1:24 do
 for j=1:24 do
 B=[x(i) <= M(:,1) M(:,1) <= x(i+1) y(j)<= M(:,2) M(:,2) <=y(j+1) ];
 C=and(B,'c');
 D(i,j) = sum(C);
 end
end
hist3d(D, flag=[2 2 0]);
```

On notera que l'on peut examiner la figure obtenue sous n'importe quel angle en utilisant le bouton droit de la souris.

**Exercice 4** Supposons que $0 < r \leq p \leq 1/2$, que $X_1, X_2$ suivent toutes deux la loi $\mathrm{Ber}(p)$, et enfin que $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = r$.

(1) A l'aide de la commande `hist3d`, écrire un programme qui, en fonction de $p, r, n$, trace l'histogramme en 3 dimensions des valeurs prises par $n$ réalisations de la paire de variables.
(2) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ en fonction de $p$, $r$. A quelle condition les deux variables sont-elles positivement corrélées?
(3) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2), \mathrm{Var}(X_1 + X_2)$.

(4) On suppose dans cette question que de plus $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = r$. Montrer qu'alors $p = 1/2$. Quelle est la distribution de la variable $X_1 + X_2$?
(5) Soient $X_3, ..., X_n$ des variables aléatoires suivant la loi $\mathrm{Ber}(p)$, indépendantes de $X_1$. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2 + X_3 + ... + X_n)$.

**Exercice 5** Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, indépendante de $\varepsilon \sim \mathrm{Ber}(1/2)$. On pose $Y := (2\epsilon - 1)X$.
(1) Ecrire un programme qui simule le couple $(X,Y)$.
Tracer l'histogramme des valeurs prises par $Y$ pour $10^6$ réalisations du couple. Qu'observe-t-on?
(2) A l'aide de la commande `hist3d`, tracer l'histogramme en 3 dimensions des valeurs prises par $10^4$ réalisations du couple $(X,Y)$. Qu'observe-t-on?
(3) Calculer la loi de $Y$.
(4) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
(5) Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes? Le couple $(X,Y)$ possède-t-il une densité sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 6** Soient $(X_1, X_2)$ deux variables indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $X_3$ une variable qui suit la loi uniforme sur $[0,4]$ indépendante de $(X_1, X_2)$.
(1) Calculer $\mathrm{Var}(X_1 + 2X_2 + 4X_3)$.
(2) Exprimer $\mathbb{P}(X_3 < X_1 < X_2)$.
(3) Simuler $10^6$ réalisations du triplet $(X_1, X_2, X_3)$, puis vérifier le calcul effectué à la question précédente pour $\lambda = 1/2, 1, 2$.

**Exercice 7** Soit le couple de v.a.r. $(X,Y)$ ayant pour densité $f(x,y) = ce^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - xy + y^2\right)}$.
(1) Quelle doit-être la valeur de $c$ pour que $f$ soit bien une densité de probabilité ?
(2) Quelles sont les densités marginale de $X$ et de $Y$ ?

**Exercice 8** Soient $X_1, X_2$ et $X_3$, 3 variables aléatoires réelles indépendantes uniformément distribuées sur $[-1,1]$. On pose $U = \inf\{X_1, X_2, X_3\}$ et $V = \sup\{X_1, X_2, X_3\}$.
(1) Calculer les lois de $U$ et de $|U|$ puis leurs espérances et variances.
(2) Calculer la loi du couple $(U,V)$.
(3) Simuler $n$ réalisations du couple $(U,V)$.
Vérifier d'abord les calculs de moments effectués à la première question.
A l'aide de la commande `hist3d`, tracer l'histogramme en 3 dimensions de $10^5$ réalisations du couple $(U,V)$.

**Exercice 9** Calculer les densités marginales des v.a.r $X$ et $Y$, quand le couple $(X,Y)$ a la densité suivante :

- $f(x,y) = e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{]0;\infty[\times]0;\infty[}(x,y)$
- $f(x,y) = 2e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{(x,y):0<x<y\}}$

Dans chacun des 2 cas, comment simuler le couple $(X,Y)$?
*Indication* : on pourra utiliser une méthode de rejet pour le simuler le deuxième couple.
Tracer les histogrammes en 3 dimensions de $10^5$ réalisations du 2-ième couple de variables.

**Exercice 10** Soient $X_1, X_2$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et distribuées suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0, \mu > 0$. On note $U = \min(X_1, X_2)$, $V = \max(X_1, X_2)$.

(1) Déterminer la loi de $U$, puis celle de $V$.
(2) Déterminer la loi jointe de $(U, V)$.
(3) Déterminer la loi jointe de $(U, X_1)$.
(4) Tracer l'histogramme en 3 dimensions de $10^5$ réalisations de $(U, V)$, puis celui de $10^5$ réalisations de $(U, X_1)$.

**Exercice 11** Soit $Z = (X, Y)$, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que $Z$ admet une densité $f$ définie par

$$f(x, y) = \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq |y|\}},$$

où $\sigma > 0$.

(1) Tracer le graphe de la fonction $f$ à l'aide de la commande `plot3d`.
(2) Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité.
(3) Calculer les lois de $X$ et de $Y$ . Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
(4) Calculer la loi de $(X-Y, X+Y)$ et montrer que $X-Y$ et $X+Y$ sont indépendantes.
(5) A posteriori, comment faire pour simuler simplement le couple $(X, Y)$ ?

**Exercice 12** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} \exp(-\frac{x}{y} - y), \text{ si } x > 0, y > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Tracer le graphe de $f$.
(2) Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
(3) Déterminer la loi marginale de $Y$.
(4) Calculer $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y > 1)$.
(5) (*) Quelle démarche suivre pour simuler le couple $(X, Y)$ ?

**Exercice 13** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite. On note $Z = \frac{X}{Y}$ (on expliquera rapidement pourquoi $Z$ est bien définie).

(1) Simuler $10^5$ réalisations indépendantes de la variable $Z$, et tracer l'histogramme correspondant sur l'intervalle $[-10, 10]$.
(2) A l'aide d'un changement de variable, trouver la loi jointe du couple $(X, Z)$, et en déduire que $Z$ suit une loi de Cauchy.
(3) Soit $C \sim$ Cauchy. Quelle est la loi de $1/C$?

**Exercice 14** Soit le couple de va réelles $(X, Y)$ et de densité $f$.

(1) Déterminer la loi de $S = X + Y$.(On considèrera le couple $(S, X)$).
(2) Même question mais avec $X$ et $Y$ indépendantes, de densités respectives $f_X$ et $f_Y$.
(3) Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de va i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$.

- Quelle est la loi de $S_2$ ?
- Montrer par récurrence que $S_n$ a pour densité

$$f_n(x) = c_n x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

où $c_n$ est une constante dont on déterminera la valeur.