Probabilités et simulations.
Feuille de TD 7.

Exercice 1 Pour X une variable aléatoire réelle et $t \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$.

(1) On note $\bar{z}$ le complexe conjugué de z. Montrer que si X est une v.a.r., on a $\bar{\Phi}_X(u) = \Phi_X(-u)$.
(2) Soit X une v.a.r. Montrer que $\Phi_X(u)$ est à valeurs réelles si et seulement si X a une loi symétrique, c'est à dire ssi la loi de X et celle de $-X$ coıincident.
(3) Montrer que si X et Y sont des v.a. indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique.

Exercice 2 On considère dans cet exercice $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d., et pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et $\overline{S}_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])$.

(1) Pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, on suppose dans cette question que $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  - Pour $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.8$, tracer les histogrammes de S_{10000}, de $S_{10000}/10000$ puis ceux de $\overline{S}_{10000}$, $\overline{S}_{10000}/10000$, $\overline{S}_{10000}/100$. Qu'observe-t-on ?
  - Pour $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_{S_n}(t)$, puis $\Phi_{S_n/n}(t)$. Pour $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_{\overline{S}_n}(t)$, $\Phi_{\overline{S}_n/n}(t)$, et enfin $\Phi_{\overline{S}_n/\sqrt{n}}(t)$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

(2) Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois que $X_1 \sim \exp(1)$.
(3) Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois que $X_1 \sim \text{Cauchy}(1)$. On admettra dans ce cas que $\Phi_{X_1}(t) = \exp(-|t|)$.
(4) Reprendre les simulations dans le cas où $X_1 \sim \text{Pareto}(1, \alpha)$, avec $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$. Qu'observez-vous ?

Exercice 3 On considère, pour $n \geq 1$, la variable $X_n = U_n/n$, avec $U_n \sim \text{Unif}\{1, ..., n\}$.

(1) Estimer, à l'aide d'une simulation, la probabilité $P(X_{10000} \leq x)$, pour $x \in \{-1, -0.9, -0.8, \ldots 1.9, 2\}$. Que remarque-t-on ?
(2) Exprimer la fonction de répartition de U_n, puis celle de X_n.
(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{X_n}(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} F(x),$$

pour une certaine fonction F que l'on déterminera.
(4) Vérifier que F est la fonction de répartition d'une variable X dont on déterminera la loi.
(5) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_{X_n}(t) := \mathbb{E}[\exp(itX_n)]$. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X_n}(t) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(t),$$

pour une fonction Φ que l'on déterminera. Quel rapport y a-t-il entre la variable X de la question précédente et cette fonction Φ ?
(6) Soit $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell_h,$$

pour un réél ℓ_h que l'on déterminera. Quel rapport existe-t-il entre ℓ_h et la variable X trouvée à la question 4. ci-dessus ?

Dans l'exercice précédent, on a trouvé — dans le cadre d'un exemple simple — qu'on avait à la fois

- convergence de la fonction de répartition de X_n vers la fonction de répartition de X en tout point de continuité de F_X.
- convergence, en tout point, de la fonction caractéristique de X_n vers la fonction caractéristique de X.
- convergence de $\mathbb{E}[h(X_n)]$ vers $\mathbb{E}[h(X)]$, pour tout $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

On peut en fait montrer que (on l'admettra) dans un cadre général, ces trois notions sont équivalentes. Elles correspondent à la notion de convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles. On notera

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} X.$$

En reprenant les trois points ci-dessus dans le cadre particulier du théorème central limite, on écrira, après avoir rappelé son énoncé usuel, les trois formulations équivalentes de sa conclusion.

Exercice 4 On considère une *marche aléatoire* issue du point $x \in \mathbb{R}$ et dont les pas effectué aux temps $1, 2, \ldots$ sont respectivement $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d.

On note S_n le réél où se situe notre marche juste après son n-ième pas.

(1) Exprimer S_n en fonction de x et de $X_1, ..., X_n$.
(2) Dans cette question on suppose que $X_1 \sim \exp(2)$.
Déterminer les limites suivantes :
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 0)$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > \sqrt{n})$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 2n - \sqrt{n})$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 3n - \sqrt{n})$.
Vérifier ces calculs à l'aide de simulations.
(3) Dans cette question on suppose que $\mathbb{P}(X_1 = -2) = \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/5$. Déterminer les limites suivantes :
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq n)$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n < -10^{-32}n)$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n < -3\sqrt{n})$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 0)$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n < 0.003n - 1000\sqrt{n})$.
Pourquoi est-il délicat de vérifier certains de ces calculs à l'aide de simulations ?

Exercice 5 Soit $\lambda > 0$ fixé. Pour tout entier $n \geq \lambda$ on considère $X_n = \frac{Y_n}{n}$, avec $Y_n \sim \text{Geom}(\lambda/n)$

(1) Pour $\lambda = 1$, estimer, à l'aide d'une simulation, la probabilité $P(X_{10000} \leq x)$, pour $x \in \{0, 0.1, 0.2, \ldots 4.9, 5\}$.
(2) Exprimer la fonction de répartition de Y_n, puis celle de X_n.
(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x),$$
pour une certaine fonction F que l'on déterminera. Vérifier alors que F est la fonction de répartition d'une variable X dont on déterminera la loi.
(4) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_{X_n}(t) := \mathbb{E}[\exp(itX_n)]$. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\Phi_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(t),$$
pour une fonction Φ que l'on déterminera.

Exercice 6

(1) Soit $X_n = nY_n$, avec $Y_n \sim \text{Ber}(1/n)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{(loi)}} X$, pour une variable X que l'on déterminera. A-t-on $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$?
(2) Soit $X_n = nY_n$, avec $Y_n \sim \text{Ber}(1-1/n)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(t)$ converge vers $\ell(t)$. Peut-on conclure que la suite (X_n) converge en loi lorsque $n \to \infty$? Si c'est le cas, on déterminera la loi limite.
(3) Soit $X_n = Y_n/n$, avec $Y_n \sim \text{Ber}(1-1/n)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{(loi)}} X$, pour une variable X que l'on déterminera. A-t-on $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ en tout point $t \in \mathbb{R}$?

Exercice 7 Soient $X_i, i = 1, 2, ...$ des variables i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \geq 1$ on définit $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$, et

$$Z_n := M_n - \frac{1}{\lambda}\ln(n).$$

(1) Tracer un histogramme de 10000 réalisations de Z_{1000}.
(2) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $F_{Z_n}(t)$.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(t)$ converge lorsque $n \to \infty$.
(4) Conclure que

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{(loi)}} Z.$$

Reconnaissez-vous la loi limite ?

Exercice 8 Soient $X_i, i = 1, 2, ...$ des variables i.i.d. suivant la loi de Pareto de paramètres 1 et $\alpha > 0$. On rappelle qu'alors

$$F_{X_1}(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}.$$

Pour $n \geq 1$ on définit $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$, et

$$Z_n := \frac{M_n}{n^{1/\alpha}}.$$

(1) Tracer un histogramme de 10000 réalisations de Z_{1000}.
(2) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $F_{Z_n}(t)$.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(t)$ converge lorsque $n \to \infty$.
(4) Conclure que

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{(loi)}} Z.$$

Reconnaissez-vous la loi limite ?

Exercice 9 Soient $X_i, i = 1, 2, ...$ des variables i.i.d. suivant la loi Uniforme$[0, 1]$. Pour $n \geq 1$ on définit $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$, et

$$Z_n := n(1 - M_n).$$

(1) Tracer un histogramme de 10000 réalisations de Z_{1000}.
(2) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $F_{Z_n}(t)$.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(t)$ converge lorsque $n \to \infty$.

(4) Conclure que

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} Z.$$

Reconnaissez-vous la loi limite ?