Probabilités et simulations.
Feuille de TD 8.

Exercice 1 Pour quelles valeurs de a, b et c, les matrices suivantes sont-elles des matrices de transition ?

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & a \\ b & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & c & 0.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0.1 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & b \\ 0.6 & c & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Une urne rouge contient 2 boules rouges et 3 boules bleues. Une urne bleue contient une boule rouge et 4 boules bleues. Une boule est choisie dans une urne, on note sa couleur et on la remet dans son urne. La boule suivante est extraite de l'urne dont la couleur coincide avec celle de la boule extraite à l'étape précédente. L'espace des états correspond à la couleur des urnes dans lesquelles on effectue les tirages.

(1) Ecrire la matrice P de transition de la chaîne de Markov ainsi définie.
(2) Qu'effectuent les commandes
`grand(1000,'markov',P,1);`
`grand(100,'markov',P,2);` ?
(3) Supposant que la première boule est extraite de l'urne rouge quelle est la probabilité que la troisième soit extraite de l'urne bleue ? Vérifier grâce à une simulation.

Exercice 3 On considère trois produits de lessive $1, 2, 3$ et soit X_n, la marque choisie au n-ème achat. Les acheteurs qui essaient ces marques sont satisfaits et reprennent la même marque avec probabilité $0.8, 0.6, 0.4$. Lorsqu'ils changent, ils choisissent une des deux autres marques de manière équiprobable.

(1) Ecrire la matrice de transition P de la chaîne de Markov ainsi définie. Comment simuler une telle chaîne ?
(2) Sachant que le premier achat était la marque numéro 1 quelle est la probabilité que le troisième soit de la même marque ?
(3) Sachant que le premier achat était la marque numéro 1, quelle est la probabilité que le troisième achat soit de la marque 3 ?
(4) Vérifier les résultats des deux questions précédentes par des simulations.
(5) Donner la distribution stationnaire.
(6) Qu'effectue la commande
`eigenmarkov(P);` ?
(7) Supposons maintenant que la marque 2 désire atteindre 50 pourcent de parts de marché en changeant son taux de satisfaction, est-ce possible ? (On suppose que tous les acheteurs ont un comportement indépendant les uns des autres.)

Exercice 4 Le fonctionnement d'une photocopieuse est décrit de manière très simplifiée par une chaîne de Markov sur un espace d'état $\Omega = \{0, 1\}$, 0 correspondant à l'état hors service et 1 correspondant à l'état de marche. La matrice de transition est donnée par :

$$p = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}$$

(1) Quelle est la distribution stationnaire ? Vérifier votre calcul à l'aide de la commande `eigenmarkov`, puis à l'aide d'une simulation de la chaîne.

(2) Généraliser à une matrice de transition générale de la forme

$$p = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. *indépendantes* prenant leurs valeurs dans un espace détats fini S. Ecrire la matrice de transition. A quelle condition la chaîne de Markov est-elle homogène?

Exercice 6 *Modèle dEhrenfest.*
On imagine deux volumes cubiques dair connectés par un petit trou, à tout instant une molécule dair peut passer par ce trou.

On modélise cette situation par la chaîne de Markov définie de la façon suivante. On considère deux urnes contenant au total N boules. A chaque temps discret, on choisit uniformément au hasard l'une des N boules, on la retire de l'urne à laquelle elle appartient et on la dépose dans lautre urne.

L'état du système au temps n est décrit par X_n, le nombre de boules présentes dans la première urne.

(1) Simuler l'expérience décrite ci-dessus. On pourra choisir $N = 20000$ et tracer la trajectoire de $X_n, n = 0, ..., 500000$ pour différentes valeurs de X_0. Que remarquez-vous ?
(2) Exprimer les probabilités de transition à partir de l'état $k \in \{0, ..., N\}$.
(3) Ecrire explicitement la matrice de transition pour le cas $N = 4$.
(4) Soit $(\pi_k)_{0\leq k\leq N}$, la distribution invariante. Montrer que

$$\pi_k = 2^{-N}\binom{N}{k}.$$

(5) Cette distribution est-elle unique ?
(6) La chaîne est-elle apériodique, sinon quelle est sa période?

Exercice 7 *Promenade aléatoire asymétrique sur le tore.*
On considère une marche aléatoire sur le tore $S = 0, 1, 2, ..., 9$ (les points i et j sont voisins sur S lorsque $|i - j| = 1$, *et* les points 0 et 9 sont également voisins).

A chaque étape notre marche se déplace vers la droite avec probabilité p ou reste au même site avec probabilité $1 - p$, pour un $p \in [0, 1]$.

(1) A l'aide d'une simulation, tracer le graphe de 1000 pas de la trajectoire d'une telle marche.
(2) Ecrire la matrice des probabilités de transition.
(3) La chaîne de Markov est-elle irréductible ?
(4) Donner lunique mesure invariante.
(5) Mêmes questions si au lieu de rester sur place on se déplace vers la gauche avec probabilité $1 - p$.

Exercice 8 Une chaîne de Markov est donnée par la matrice de transition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(1) Simuler quelques trajectoires de cette chaîne.
(2) La chaîne est elle irréductible ?
(3) Donner une distribution invariante. Est-elle unique?

Exercice 9 On considère 5 urnes numérotées de 1 à 5 et disposées en ordre croissant. L'urne numéro i contient i boules noires et $5-i$ boules blanches. A chaque temps discret, on va tirer une boule uniformément au hasard dans l'une des urnes, noter sa couleur avant de la remettre dans son urne.

On suppose que le premier tirage s'effectue dans l'urne numéro 1.

Ensuite, si on tire dans l'urne i et que la boule obtenue est noire, le tirage suivant se fait dans lurne numéro $i+1 \bmod 5$, tandis que si la boule est blanche, le tirage suivant se fait à nouveau dans l'urne numéro i.

(1) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les variables indiquant le numéro de l'urne dans laquelle se fait le n-ième tirage. Ecrire la matrice de transition de la chaîne de Markov correspondante.
(2) Donner la probabilité que le 3-ième tirage se fasse dans l'urne 1, 2 ou 3.
(3) Exprimer la probabilité pour que la troisième boule tirée soit noire.
(4) Trouver la mesure stationnaire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(5) Vérifier le dernier calcul à l'aide d'une simulation.

Exercice 10 On considère une chaîne de Markov $X = \{X_0, X_1, \ldots\}$ dont l'espace d'états est $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et la matrice de transition est

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Simuler quelques trajectoires de cette chaîne.
(2) Montrer que la chaîne de Markov n'est pas irréductible et décomposer l'espace d'états E en classes irréductibles.
(3) Caractériser l'ensemble $\mathrm{Inv}(P)$ (l'ensemble de probabilités invariantes associées à P).
(4) On note $\tau_i = \inf\{n = 1, 2, \ldots : X_n = i\}$ ($\inf \emptyset := \infty$). Calculer $\mathbf{E}_i[\tau_i]$ pour tout $i \in E$.
(5) Calculer la limite $\mathbf{P}_\nu$-p.s. pour $N \to \infty$, si elle existe, de

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \tag{0.1}$$

pour $\nu = (1/2, 0, 1/4, 1/4)$.

Exercice 11 On considère une chaîne de Markov $X = \{X_0, X_1, \ldots\}$ dont l'espace d'états est $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et la matrice de transition est

$$Q := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 2/9 & 5/18 & 1/2 \\ 1/3 & 1/9 & 1/2 & 1/18 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $(4, 2, 3, 3)Q = (4, 2, 3, 3)$.

(1) Caractériser l'ensemble $\mathrm{Inv}(Q)$ (l'ensemble des probabilités invariantes associées à Q).
(2) On note $\tau_i = \inf\{n = 1, 2, \dots : X_n = i\}$ ($\inf \emptyset := \infty$). Calculer $\mathbf{E}_i[\tau_i]$ pour tout $i \in E$.
(3) Si $X_0 = 3$, est ce que $\lim_n n^{-1} \sum_{i=0}^{n} X_n$ converge presque sûrement ? Si oui, quelle elle la limite ?
(4) Calculer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} Q^n$.
(5) On choisit X_0 distribué uniformément sur E. Calculer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1)$.
(6) Vérifier les résultats des questions précédentes à l'aide d'une simulation.