Université Denis Diderot Paris 7

Compléments du cours de Probabilités

1 Théorème de convergence monotone

Théorème 1.1. de Convergence Monotone (TCM) *:*
Soit $(X_n, n \geq 0)$ *une suite* *croissante* *de v.a.r.* *positives*, *qui converge en probabilité vers une variable* X, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X].$$

Corollaire 1.2. *Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite* *croissante* *de v.a.r.* *intégrables*, *qui converge en probabilité vers une variable* X, *alors*

$$\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X].$$

Preuve du corollaire : La suite croissante de variables $X_n - X_0$, et sa limite $X - X_0$ sont des variables positives, on peut donc leur appliquer le théorème de convergence monotone pour voir que

$$\mathbb{E}[X_n - X_0] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_0] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X - X_0] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X_0]$$

Preuve du théorème

a. On va d'abord montrer que $\mathbb{P}(X_n \leq X) = 1$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $(X_n)_{n\geq 0}$, et par hypothèse de la convergence en probabilité de cette suite vers X, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X_n \geq X + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_{n+k} \geq X + \varepsilon) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $\mathbb{P}(X_n \geq X + \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. On déduit

$$\mathbb{P}(X_n > X) = \mathbb{P}(\bigcap_{\varepsilon>0}\{X_n \geq X + \varepsilon\}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}(X_n \geq X + \varepsilon) = 0.$$

b. Par positivité et linéarité de l'espérance, $(\mathbb{E}[X_n])_{n\geq 0}$ est une suite croissante (en effet $X_{n+k} \geq X_n \Rightarrow \mathbb{E}[X_{n+k}] \geq \mathbb{E}[X_n]$).
Toujours par le même argument, le point a. permet d'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X]$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X].$$

c. Fixons Y simple (i.e. $Y = \sum_{i=1}^{p} y_j \mathbf{1}_{A_j}$), telle que $0 \leq Y \leq X$, et $a \in (0,1)$. On introduit

$$E_n := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \leq aY(\omega)\}.$$

Notons que $\{X > 0, aX > X - \varepsilon\} \Leftrightarrow \{0 < X < \frac{\varepsilon}{1-a}\}$, un événement dont la probabilité tend clairement vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour tout $\delta > 0$ on peut donc choisir $\varepsilon = \varepsilon_0$ suffisamment petit cette probabilité soit bornée par δ.

On écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n^c) &\leq \mathbb{P}(X_n > aY) \leq \mathbb{P}(X > 0, X_n > aX) \\ &\leq \mathbb{P}(X > 0, aX > X - \varepsilon_0) + \mathbb{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon_0) \\ &\leq \delta + \mathbb{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$ le deuxième terme de la somme ci-dessus tend vers 0 par hypothèse et on a donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n^c) \leq \delta$. Comme δ est arbitraire, on conclut finalement que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n^c) = 0.$$

d. D'après la définition de E_n,

$$\mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{E_n}] \geq \mathbb{E}[aY \mathbf{1}_{E_n}] \geq a \sum_{i=1}^{p} y_j \mathbb{P}(E_n \cap A_j).$$

D'après c., quelque soit $j = 1, ..., p$, $\mathbb{P}(E_n \cap A_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(A_j)$, et donc

$$a \sum_{i=1}^{p} y_j \mathbb{P}(E_n \cap A_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\mathbb{E}[Y].$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] \geq a\mathbb{E}[Y].$$

Comme $a \in (0,1)$ est arbitraire dans notre raisonnement on a donc, en faisant tendre $a \to 1$, que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[Y].$$

Comme Y simple tel que $O \leq Y \leq X$ est arbitraire dans ce raisonnement on conclut finalement

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] \geq \sup\{\mathbb{E}[Y] : Y \text{simple}, 0 \leq Y \leq X\} = \mathbb{E}[X].$$

Avec le point b., ceci achève la preuve du théorème.

2 Fatou, TCD

Propriété 2.1. Lemme de Fatou *:*
Soit $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v.a.r.* *positives, alors*

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Preuve : Considérons $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$ de sorte que (Y_n) est une suite croissante de variables positives, qui converge vers $\liminf_{n\to\infty} X_n := X$.
Par le théorème 1.1, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X]$.
D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a également $\mathbb{E}[Y_n] \leq \mathbb{E}[X_n]$, et on en déduit donc l'inégalité souhaitée.

Corollaire 2.2. Fatou renversé *: Si* $(X_n, n \geq 0), X$ *sont des v.a.r.* *positives, telles que pour tout* $n, X_n \leq X$*, avec* $\mathbb{E}[X] < \infty$*, alors*

$$\mathbb{E}[\limsup_{n\to\infty} X_n] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Preuve : Utiliser le Lemme de Fatou pour $Y_n = X - X_n$, puis la linéarité de l'espérance.

Théorème 2.3. Convergence dominée *:*
Soit $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v.a.r. intégrables qui converge en probabilité vers* X*. On suppose qu'il existe* Z *intégrable telle que* $\forall n \geq 0;\ |X_n| \leq Z$*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Preuve : Par le même argument que a. de la preuve du TCM, il est facile de voir que $X_n \to X$ en probabilité entraîne que $|X| \leq Z$. On a donc $|X_n - X| \leq 2Z$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] = 0$, et donc, puisque $|X_n - X| \leq 2Z$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbf{1}_{|X_n - X|>\varepsilon}] &\leq \mathbb{E}[2Z\mathbf{1}_{|X_n - X|>\varepsilon}] \\ &\leq \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{Z>K}] + K\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}}]. \end{aligned}$$

La variable Z étant intégrable, et $Z\mathbf{1}_{Z\geq K} \nearrow Z$, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que le premier terme ci-dessus est arbitrairement petit pourvu qu'on choisisse K suffisamment grand. Le deuxième, quelque soit K et ε fixés, tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. On a donc $\mathbb{E}[|X_n - X|\mathbf{1}_{|X_n - X|>\varepsilon}] \to 0$ quand $n \to \infty$.
D'autre part,

$$\mathbb{E}[|X_n - X|\mathbf{1}_{|X_n - X|\leq\varepsilon}] \leq \varepsilon\mathbb{E}[2Z],$$

et encombinant cette inégalité avec la limite précédente on obtient

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \varepsilon\mathbb{E}[2Z].$$

Enfin, puisque $|\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]| = |\mathbb{E}[X_n - X]| \leq \mathbb{E}[|X_n - X|]$, il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 pour obtenir le résultat souhaité.

Propriété 2.4. Jensen *:*
Si ϕ est convexe et $X, \phi(X)$ sont intégrables alors

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)].$$

Remarque 2.5. *En particulier si $X \in \mathbb{L}^p$, la propriété précédente implique que*

$$|\mathbb{E}[X]|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p].$$

Preuve : Lorsque $\psi(x) = ax + b$, on a même égalité $\mathbb{E}[\psi(X)] = \psi(\mathbb{E}[X])$. Comme d'autre part une application convexe est obtenue comme le supremum des droites qui la minorent, il est facile de conclure.

Propriété 2.6. Inégalité de Cauchy *:*
Soient X et Y des v.a.r. de carré intégrable. Alors

$$\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2].$$

Preuve : C'et l'inégalité de Cauchy classique : il s'agit simplement de remarquer que l'espace $\mathbb{L}^2$ est muni du produit scalaire $< X, Y >= \mathbb{E}[XY]$.

3 Théorème de transfert

Dans cette partie on suppose que l'espace E est métrique et séparable. Au delà de ces hypothèses, il sera utile de penser aux exemples suivants :

- $E = \mathbb{R}^d, d \geq 1$ (pour $d = 1$ on on peut penser aux variables usuelles, pour $d \geq 2$ à des vecteurs aléatoires),
- $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, les suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ (penser au jeu de pile ou face infini).
- $E = S^{\mathbb{N}}$ les suites à valeurs dans un espace fini S (penser à un jeu de roulette infini, où $S = \{0, 00, 1, ..., 36\}$, ou encore aux chaînes de Markov sur un espace fini S).
- $E = S^{\mathbb{N}}$ les suites à valeurs dans un espace S dénombrable (dans certains des projets, on aura affaire à des chaînes de Markov sur des espaces infinis, mais dénombrables)
- $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (si vous faites un master en probabilité, vous découvrirez le mouvement brownien qui est à valeurs dans cet espace).

On munit cet espace d'une tribu $\mathcal{E}$. La loi d'une variable X à valeurs dans un tel espace est la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X.
Rappelons que pour tout $B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$.
Caractériser la loi de X, c'est donc être capable de pouvoir donner $\{\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B), B \in \mathcal{E}\}$.
Plus généralement, savoir caractériser la loi de X revient à savoir calculer $\mathbb{E}[h(X)]$, pour une classe de fonctions h suffisamment large, afin de pouvoir retrouver $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)] = \mathbb{P}(X \in B)$ pour tout $B \in \mathcal{E}$.
Il est donc primordial de savoir calculer de telles espérances.

Théorème 3.1. de transfert *Soit* $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ *une variable aléatoire à valeurs dans* E*, et* $h : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable. On suppose que la variable réelle* $h(X)$ *est intégrable. Alors*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_\Omega h(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_E h(x)d\mathbb{P}_X(x).$$

Preuve :

a. Soit $B \in \mathcal{E}$, et la fonction $h = \mathbf{1}_B$. On a, par définition de mesure-image,

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B),$$

de sorte que l'égalité souhaitée est vérifiée lorsque h est fonction indicatrice d'un borélien.

b. Par linéarité de l'intégrale, le point a. implique que l'égalité reste vérifiée pour $h = \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{1}_{B_i}$, où $p \in \mathbb{N}$, les a_i sont des réels, et les B_i des éléments de $\mathcal{E}$. Autrement dit, l'égalité souhaitée est vérifiée lorsque h est une fonction en escalier de E dans $\mathbb{R}$.

c. Soit h à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors on peut trouver une suite croissante $(h_n)_{n\geq 0}$ de fonctions en escalier telle que $h_n \nearrow h$. En utilisant une première fois le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[h_n(X)] = \mathbb{E}[h(X)] = \int_\Omega h(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega).$$

En utilisant à nouveau le théorème de convergence monotone, mais cette fois pour l'intégrale vis-à-vis de la mesure $\mathbb{P}_X$, on trouve également que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E h_n(x)d\mathbb{P}_X(x) = \int_E h(x)d\mathbb{P}_X(x).$$

On déduit finalement que l'égalité souhaitée est vérifiée lorsque h est une fonction mesurable et positive.

d. Enfin si h est de signe quelconque, intégrable, on écrit $h = h^+ - h^-$, et on déduit du point précédent que l'égalité souhaitée est vérifiée pour h, ce qui achève la preuve. $\square$