Université Denis Diderot Paris 7

Compléments du cours de Probabilités

1 Mesures invariantes

On considère une chaîne de Markov X sur un espace d'état E fini ou dénombrable, de noyau de transition P.
Rappelons que $\mathbb{E}_x$ désigne la loi de la chaîne issue de l'état x, que
$T_x^+ = \inf\{n > 0 : X_n = x\}$ est le "temps de retour" en x, et enfin que
$V_y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$ désigne le nombre de visites de la chaîne en y strictement avant le temps n.

Définition 1.1. *Fixons $x \in E$, et considérons la mesure positive Λ telle que*

$$\Lambda(y) := \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T_x^+-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}] = \mathbb{E}_x[V_y(T_x^+)].$$

Commençons par énoncer les résultats concernant cette mesure.

Théorème 1.2. *Si X est récurrente, irréductible, alors*

1. *$\Lambda(x) = 1$.*
2. *Λ est une mesure invariante.*
3. *$\Lambda(y) \in (0, \infty)$ pour tout $y \in E$.*

Théorème 1.3. *Si X est irréductible, et si la mesure positive ν est invariante et vérifie $\nu(x) = 1$, alors*

1. *$\nu \geq \Lambda$*
2. *Si de plus X est récurrente, alors $\nu = \Lambda$.*

Un corollaire immédiat du théorème précédent est qu'une chaîne irréductible récurrente possède au plus une distribution invariante.

Théorème 1.4. *Si X est irréductible les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Tout état est "récurrent positif" : $\mathbb{E}_x[T_x^+] < \infty$.*
2. *Un des états est récurrent positif.*
3. *Il existe une distribution invariante π.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, il existe une unique distribution invariante π, et $\mathbb{E}_x[T_x^+] = \frac{1}{\pi(x)}$, $\forall x \in E$.

1.1 Preuve du Théorème 1.2

1. Par définition du temps de retour, la chaîne issue de x visite exactement une fois l'état x entre les temps 0 et $T_x^+ - 1$, ainsi $V_x(T_x^+) = 1$, et donc $\Lambda(x) = 1$.
2. La chaîne est supposée récurrente donc $T_x^+ < \infty$ p.s.
   Comme l'événement $\{T_x^+ \geq n\} = \{X_1 \neq x, \dots X_{n-1} \neq x\} \in \sigma(X_0, ..., X_{n-1})$, la propriété de Markov au temps $n-1$ assure que
   $$\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, X_n = y, T_x^+ \geq n) = \mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^+ \geq n) p_{zy}.$$
   On en déduit (en utilisant pour la deuxième égalité ci-dessous que $X_0 = X_{T_x^+} = x$.)
   $$\begin{aligned}
   \Lambda(y) &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{k\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k = y, k < T_x^+\}}\right] \\
   &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{X_n = y, n \leq T_x^+\}}\right] \\
   &= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, X_n = y, T_x^+ \geq n) \\
   &= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^+ \geq n) p_{zy} \\
   &= \Lambda P(y)
   \end{aligned}$$
3. Fixons $y \in E$. Comme X est irréductible, il existe k, ℓ tels que $p_{xy}^{(k)} > 0, p_{yx}^{(\ell)} > 0$. D'après les deux points précédents, on a donc
   $$\Lambda(y) = \Lambda P^k(y) \geq \Lambda(x) p_{xy}^{(k)} > 0,$$
   $$1 = \Lambda(x) = \Lambda P^\ell(x) \geq \Lambda(y) p_{yx}^{(\ell)},$$
   de sorte que
   $$0 < p_{xy}^{(k)} \leq \Lambda(y) \leq \frac{1}{p_{yx}^{(\ell)}} < \infty.$$

1.2 Preuve du Théorème 1.3

1. Puisque ν est invariante et $\nu(x) = 1$, quelque soit $y \neq x$,
   $$\begin{aligned}
   \nu(y) &= P\nu(y) = \sum_{z_0 \neq x} p_{z_0 y}\nu(y) + p_{xy} \\
   &= \sum_{z_0\neq x, z_1 \neq x} p_{z_0 z_1} p_{z_1 y}\nu(y) + \sum_{z_0 \neq x} p_{x z_0} p_{z_0 y} + p_{xy} \\
   &= \sum_{z_0\neq x, z_1\neq x, \dots z_n \neq x} p_{z_0 z_1} \dots p_{z_n y}\nu(y) + \sum_{z_0 \neq x, \dots z_{n-1}\neq x} p_{x z_0} \dots p_{z_{n-1} y} + \dots + p_{xy} \\
   &\geq \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x^+ \geq n) + \dots \mathbb{P}_x(X_1 = y, T_x^+ \geq 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(y)
   \end{aligned}$$

où on a simplement supprimé le premier terme de la somme (qui est positif puisque ν l'est) pour obtenir l'inégalité de la dernière ligne ci-dessus. On a donc bien $\nu \geq \Lambda$.

2. Si X est récurrente, Λ est invariante par le Théorème 1.2, et donc $\mu = \nu - \Lambda$ est une mesure invariante, et positive d'après le point qui précède. Soit $y \in E$,

$$0 = \mu(x) = \mu P^{\ell}(x) \geq \mu(y) p_{yx}^{(\ell)},$$

ce qui entraîne $\mu(y) = 0$. Comme le raisonnement est valable quelque soit $y \in E$, on conclut.

1.3 Preuve du Théorème 1.4

On va montrer que 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.
Le point 1. entraîne 2. de façon évidente.
Supposons 2. et fixons x l'état récurrent positif. Par Théorème 1.2, Λ est invariante, et

$$\Lambda(E) = \mathbb{E}_x[T_x^+] < \infty$$

La mesure

$$\pi(\cdot) = \frac{\Lambda(\cdot)}{\Lambda(E)}$$

est une distribution invariante, ce qui assure 3.
Supposons 3. et fixons un $x \in E$. Puisque $\pi(E) = 1$, il existe $y \in E$ tel que $\pi(y) > 0$. Mais alors

$$\pi(x) \geq \pi(y) p_{yx}^{(\ell)} > 0$$

également (en utilisant que la chaîne est irréductible. Posons alors

$$\nu(\cdot) = \frac{\pi(\cdot)}{\pi(x)}.$$

La mesure ν est positive, invariante puisque π l'est, et donc d'après le Théorème 1.3 1., $\nu \geq \Lambda$.
Mais alors

$$\mathbb{E}_x[T_x^+] = \Lambda(E) \leq \nu(E) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty,$$

ce qui assure que l'état x est récurrent positif. Comme le raisonnement est valable quelque soit $x \in E$, on conclut à 1., ce qui achève la preuve des équivalences.
Par ailleurs, fixons $x \in E$. Puisqu'on sait désormais que la chaîne est récurrente, on a d'après Théorème 1.3 2. que pour la mesure ν introduite dans le paragraphe ci-dessus vérifie $\nu = \Lambda$, et que l'unique distribution invariante est donnée par $\pi(\cdot) = \frac{\Lambda(\cdot)}{\Lambda(E)}$, de sorte que

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^+]}.$$

2 Théorème ergodique

Théorème 2.1. *Supposons X irréductible, issue de la mesure initiale ν, et rappelons que $V_x(n)$ désigne le nombre de visites au point x, strictement avant le temps n.*

1. *$\mathbb{P}_\nu$-presque sûrement,*
$$\frac{V_x(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^+]}.$$
2. *Si de plus la chaîne est positive récurrente, et si $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée, alors $\mathbb{P}_\nu$-presque sûrement*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{x\in E} \pi(x) f(x).$$

2.1 Preuve de la première partie du théorème

2.1.1 Le cas transient

La preuve est immédiate dans ce cas : si la chaîne est transiente, alors p.s. le nombre de visites en x est fini, et donc $V_x(n)/n$ tend vers 0 p.s., comme souhaité.

2.1.2 Le cas récurrent

Si la chaîne est récurrente, la longueur des excursions successives hors de x, $T_x^{(2)} - T_x^{(1)}, T_x^{(3)} - T_x^{(2)}, \dots$ sont des variables i.i.d, de même loi que T_x^+ d'après le théorème 9.7. du cours (qui est une conséquence directe de la propriété de Markov forte). Puisque la chaîne est récurrente, $T_x^{(1)}/k \to 0$ p.s. lorsque $k \to \infty$, et la loi forte des grands nombres assure donc que

$$\frac{1}{k} T_x^{(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[T_x^+]. \tag{1}$$

Or, le nombre de visites au point x pour chacune de ces excursions est exactement 1. Or

$$T_x^{(1)} + T_x^{(2)} - T_x^{(1)} + \dots + T_x^{(V_x(n))} - T_x^{(V_x(n)-1)} = T_x^{(V_x(n))} \leq n \leq T_x^{(V_x(n)+1)}.$$

et donc

$$\frac{T_x^{(V_x(n))}}{V_x(n)} \leq \frac{n}{V_x(n)} \leq \frac{T_x^{(V_x(n)+1)}}{V_x(n)}.$$

Mais comme la chaîne est récurrente, $V_x(n) \to \infty$ p.s. lorsque $n \to \infty$ et donc d'après (1), $\frac{T_x^{(V_x(n))}}{V_x(n)} \to \mathbb{E}[T_x^+]$. Par ailleurs, la variable $T_x^{(V_x(n)+1)} - T_x^{(V_x(n))}$ a même loi que T_x^+ donc $(T_x^{(V_x(n)+1)} - T_x^{(V_x(n))})/n \to 0$ p.s., on conclut donc que p.s.

$$\frac{n}{V_x(n)} \to \mathbb{E}_x[T_x^+],$$

comme souhaité.

Remarque 2.2. *Il faut faire attention ici qu'il est possible que la chaîne soit récurrente nulle, i.e. que la chaîne soit récurrente mais $\mathbb{E}_x[T_x^+] = +\infty$ (cf le cas de la marche simple symmétrique sur $\mathbb{Z}$). Le théorème ergodique dit alors que le temps moyen passé en l'un des états tend vers 0 lorsque le nombre de pas effectué tend vers l'infini.*

2.2 Preuve de la partie 2. du théorème

On suppose dans cette partie que la chaîne est récurrente positive. D'après le théorème 1.4, ceci assure l'existence d'une unique mesure invariante π. On suppose par ailleurs que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in E$.
Notons

$$\overline{f} := \sum_{x \in E} \pi(x) f(x).$$

Pour tout $F \subset E$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \overline{f} \right| &= \left| \sum_{x \in E} (\frac{V_x(n)}{n} - \pi(x)) f(x) \right| \\
&\leq M \sum_{x \in F} \left| \frac{V_x(n)}{n} - \pi(x) \right| + M \sum_{x \notin F} \left| \frac{V_x(n)}{n} - \pi(x) \right| \\
&\leq M \sum_{x \in F} \left| \frac{V_x(n)}{n} - \pi(x) \right| + M \sum_{x \notin F} \left(\frac{V_x(n)}{n} + \pi(x) \right) \\
&\leq 2M \sum_{x \in F} \left| \frac{V_x(n)}{n} - \pi(x) \right| + 2M \sum_{x \notin F} \pi(x).
\end{aligned}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. On peut trouver F fini tel que $\sum_{x \notin F} \pi(x) \leq \frac{\varepsilon}{4M}$.
D'après 1., le premier terme de la somme ci-dessus tend vers 0 p.s., et donc il existe $N(\omega)$ tel que pour tout $n \geq N(\omega)$

$$2M \sum_{x \in F} \left| \frac{V_x(n)}{n} - \pi(x) \right| \leq \varepsilon/2.$$

On obtient finalement que pour tout $n \geq N(\omega)$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \overline{f} \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui établit le résultat souhaité.

Remarque 2.3. *Le point 2. ci-dessus peut également être établi par une preuve similaire à celle effectuée dans la partie 1. Les trajectoires excursions successives hors de x sont en* *effet i.i.d. (c'est toujours Markov fort qui l'assure). En particulier les variables*

$$\left\{ \sum_{k=T_x^{(j)}}^{T_x^{(j+1)}-1} f(X_k) \right\}_{j\geq 1}$$

sont i.i.d. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[\sum_{k=T_x^{(1)}}^{T_x^{(2)}-1} f(X_k)] = \sum_{y\in E} f(y)\Lambda(y) = \mathbb{E}[T_x^+] \sum_{y\in E} f(y)\pi(y).$$

On conclut alors de manière similaire au paragraphe précédent.