Université Denis Diderot Paris 7

15 mai 2014

Probabilités et Simulations U1PS36

Examen

durée : 3 heures
Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.
On prendra soin de bien justifier les réponses.
Le barême est provisoire, et n'est donné qu'à titre d'indication de l'importance relative des exercices.

Questions de cours — Application directe du cours

1. *(1 point)* Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ (où $\mu \in \mathbb{R}^n$, et Σ est une matrice de taille $n \times n$ symétrique positive). Que vaut $\Phi_X(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$? A quelle condition X possède-t-elle une densité f_X sur $\mathbb{R}^n$? Lorsque cette condition est vérifiée, exprimer $f_X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. *(2 points)* Rappeler la définition de distribution invariante pour une chaîne de Markov sur un espace d'état E.
   Donner un exemple de chaîne :
   – qui possède une infinité de distributions invariantes.
   – qui possède une unique distribution invariante.
   – qui ne possède pas de distribution invariante.
3. *(1.5 point)* Soit
$$F(x) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{\{x\geq 3\}} + \frac{1}{3}\left((x-1)\mathbf{1}_{\{1\leq x<2\}} + \mathbf{1}_{\{x\geq 2\}}\right) + \frac{1}{3}(1-\exp(-x))\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}},\ x \in \mathbb{R}.$$
   Expliquer comment simuler une variable de fonction de répartition F.
4. *(1 point)* Soient (X, Y, Z) des variables i.i.d suivant une loi $\exp(3)$. Calculer $\mathbb{P}(\max(X, Y, Z) \leq 2)$.
5. *(1.5 points)* Soient (X, Y) des variables i.i.d suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y^4)$. Comment vérifier ce résultat par une simulation ?

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^n$,
$$\Phi_X(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}X)] \exp(i\mathbf{t}^T\mu + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}).$$
   Le vecteur X possède une densité ssi $\det(\Sigma) \neq 0$, et dans ce cas pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\det(\Sigma)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right).$$
2. Soit X une chaîne de Markov sur l'espace d'état E, et de noyau de transition P. On dit que π, mesure sur E est une distribution invariante ssi :

- π est une mesure de probabilité sur E (i.e. pour tout $x \in E$ $\pi(x) \geq 0$ et $\sum_{x \in E} \pi(x) = 1$),
- $\pi P = \pi$ (i.e. pour tout $x \in E$, $\sum_{y \in E} \pi(y) P(y, x) = \pi(x)$).

Pour la chaîne sur $E = \{1, 2\}$, de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, toute les distributions sur $\{1, 2\}$ sont invariantes : quelque soit $\pi = (\alpha \quad 1 - \alpha)$ distribution, $\pi P = \pi$. *Remarque* : Tout autre exemple de chaîne sur un espace d'état fini, comptant au moins 2 classes fermées récurrentes aurait convenu.

Toujours pour une chaîne à deux états, mais cette fois avec $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, on a l'équation $\pi P = \pi$ conduit à $\pi(1) = \pi(2)$, et donc l'unique distribution invariante est $\pi = (1/2 \quad 1/2)$.

Remarque : Tout autre exemple de chaîne sur un espace d'état fini, comptant une seule classe fermée, aurait également convenu.

Enfin, la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ ne possède pas de distribution invariante. En effet dans ce cas $E = \mathbb{Z}$, $P(x, y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x-y|=1\}}$, et donc $\pi P = \pi$ conduit à $\pi(x+1) - \pi(x) = \pi(x) - \pi(x-1)$, de sorte que néccessairement $\pi(x) = Ax + B$ avec A, B des réels. Pour que π soit une mesure positive il faut nécessairement $A = 0, B \geq 0$. Si $B = 0$ π est la mesure nulle, ce n'est pas une distribution. Si $B > 0$, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \pi(x) = +\infty$, et à nouveau π n'est pas une distribution.

Remarque : Bien entendu, il y a de nombreux autres exemples. Mais nécessairement il faut prendre E de cardinal infini (d'après le cours, si E fini, il existe au moins une classe fermée et donc au moins une distribution invariante). Tout exemple de chaîne transiente, irréductible sur E de cardinal infini aurait également convenu (par exemple la marche simple asymétrique sur $\mathbb{Z}$).

3. Notons que $F_1 : x \to \mathbf{1}_{\{x \geq 3\}}$ est la fonction de répartition de la v.a. X_1 telle que $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 1$.

   La fonction $F_2 : x \to (x-1)\mathbf{1}_{\{1 \leq x \leq 2} + \mathbf{1}_{\{x \geq 2\}}$ est la fonction de répartition de la v.a. $X_2 \sim \text{Unif}[1, 2]$.

   Enfin la fonction $F_3 : x \to (1 - \exp(-x))\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$ est la fonction de répartition de X_3, où $X_3 \sim \exp(1)$.

   Soient les variables X_1, X_2, X_3, ξ indépendantes, avec X_1, X_2, X_3 de fonctions de répartitions respectives F_1, F_2, F_3 et $\xi \sim \text{Unif}(\{1, 2, 3\})$. On définit

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{lorsque } \xi = 1 \\ X_2 & \text{lorsque } \xi = 2 \\ X_3 & \text{lorsque } \xi = 3 \end{cases}.$$

   Alors X a pour fonction de répartition F.

   Il n'est évidemment pas difficile de simuler X_1, X_2, X_3, ξ et donc X : par exemple

```
 x1 = 3 ;
x2 = grand(1,1,"unf",1,2) ;
x3 = grand(1,1,"exp",1) ;
xi = grand(1,1,"uin",1,3) ;
if xi == 1 then x= x1 ; else if xi==2 then x=x2 ; else x=x3 ;
```

4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max(X,Y,Z)\leq 2) &= \mathbb{P}(X\leq 2, Y\leq 2, Z\leq 2)\\
&= \mathbb{P}(X\leq 2)\mathbb{P}(Y\leq 2)\mathbb{P}(Z\leq 2)\\
&= (1-\exp(-6))^3
\end{aligned}$$

où à la deuxième ligne ci-dessus, on a utilisé l'indépendance du triplet (X,Y,Z), et à la troisième, on a utilisé que la fonction de répartition d'une variable exponentielle de paramètre 3 est $x \to (1-\exp(-3x))\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$.

5. Comme X et Y sont indépendantes, le couple (X,Y) a pour densité

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X\leq Y^4) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\leq Y^4\}}] = \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{x\leq y^4\}}f(x,y)dxdy\\
&= \int_{[0,1]^2}\mathbf{1}_{\{x\leq y^4\}}dxdy\\
&= \int_0^1 dy\left(\int_0^{y^4}dx\right)\\
&= \int_0^1 y^4 dy = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini ci-dessus est triviale puisqu'on a affaire à des fonctions positives mesurables.
Pour vérifier ce résultat par une simulation il faut effectuer un grand nombre de réalisations du couple (X,Y), et compter la fréquence de l'év'enement $X\leq Y^4$.
Par exemple

```
 function f=verif(n)
x=grand(1,n,"unf",0,1);
y=grand(1,n,"unf",0,1);
f=sum(x <= y^4)/n;
endfunction
```

```
 --> verif(10000000)
 ans =
 0.1999343
```

Exercice 1 *(5 points)* Soit X,Y deux variables réelles et positives telles que, quelque soient $(u,v)\in\mathbb{R}_+^2$,

$$\Psi_{(X,Y)}(u,v) := \mathbb{E}[\exp(-uX-tY)] = \frac{1}{2+u-\exp(-v)}.$$

1. En utilisant que $\Psi_X(u) = \Psi_{(X,Y)}(u,0)$, reconnaître la transformée de Laplace d'une loi usuelle et en déduire la loi de X.
Retrouver $\mathbb{E}[X]$, puis $\mathbb{E}[X^2]$ et enfin $\mathrm{Var}(X)$.

2. Par une méthode similaire, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$. Retrouver également $\mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[Y^2], \mathrm{Var}(Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Soit $Z = X + Y$. Déterminer $\Psi_Z(u) = \mathbb{E}[\exp(-u(X + Y))]$. Calculer alors $\mathbb{E}[X + Y], \mathbb{E}[(X + Y)^2], \mathrm{Var}[X + Y], \mathrm{Cov}(X, Y)$.

1. On a pour tout $u \in \mathbb{R}_+$
$$\Psi_X(u) = \Psi_{(X,Y)}(u, 0) = \frac{1}{1 + u},$$
et on reconnaît là la transformée de Laplace d'une variable exponentielle de paramètre 1. Comme cette transformée est définie sur un intervalle d'intérieur non vide elle caractérise la loi de X et on conclut donc que $X \sim \exp(1)$.
D'après le cours
$$\mathbb{E}[X] = -\Psi'_X(0), \mathbb{E}[X^2] = \Psi''_X(0).$$
Or $\Psi'_X(u) = \frac{-1}{(1+u)^2}, \Psi''_X(u) = \frac{2}{(1+u)^3}$ de sorte que
$$\mathbb{E}[X] = 1, \mathbb{E}[X^2] = 2.$$
Enfin,
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1.$$
Remarque : on pouvait aussi refaire les calculs directs avec la densité de X.
2. De même, pour tout $v \geq 0$,
$$\Psi_Y(v) = \Psi_{(X,Y)}(0, v) = \frac{1}{2 + \exp(-v)}.$$
Cette transformée est elle aussi définie sur un intervalle d'intérieur non vide elle caractérise la loi de Y.
Par ailleurs si Z vérifie $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$\mathbb{E}[\exp(-vZ)] = \sum_{k \geq 0} \exp(-vk) \frac{1}{2^{k+1}}.$$
La somme ci-dessus est la somme des termes d'une suite géométrique de terme initial $1/2$ et de raison $\exp(-v)/2$ de sorte que
$$\mathbb{E}[\exp(-vZ)] = \sum_{k \geq 0} \exp(-vk) \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{\exp(-v)}{2}} = \frac{1}{2 - \exp(-v)}.$$
Ainsi les variables Y et Z ont la même transformée de Laplace, et celle-ci caractérise la loi. On conclut que Y suit la même loi que Z, et donc on a bien $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour le calcul des deux premiers moments utilisons la même méthode que dans la question précédente. On a
$$\Psi'_Y(v) = \frac{-\exp(-v)}{(2 - \exp(-v))^2}, \quad \Psi''_Y(v) = \frac{2\exp(-v) + \exp(-2v)}{(2 - \exp(-v))^3},$$

et donc
$$\mathbb{E}[Y] = 1, \quad \mathbb{E}[Y^2] = 3, \quad \mathrm{Var}(Y) = 2.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $Y = Y' - 1$ où $Y' \sim \mathrm{Geom}(1/2)$, mais les calculs sont essentiellement les mêmes.

3. Si les variables X et Y étaient indépendantes on aurait pour tous $u, v \geq 0$,
$$\Psi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}[\exp(-uX - vY)] = \mathbb{E}[\exp(-uX)]\mathbb{E}[\exp(-vY)] = \frac{1}{1+u}\frac{1}{2-\exp(-v)}.$$
Ce n'est évidemment pas le cas (prendre par exemple $u = v = 1$ pour le constater), et on conclut que X et Y ne sont pas indépendantes.

4. On a pour tout $u \geq 0$,
$$\Psi_Z(u) = \mathbb{E}[\exp(-u(X+Y))] = \Psi_{(X,Y)}(u,u) = \frac{1}{2+u-\exp(-u)}.$$
On va à nouveau utiliser la même méthode que dans les questions précédentes pour le calcul des deux premiers moments. Ainsi
$$\Psi'_Z(u) = \frac{-1-\exp(-u)}{(2+u-\exp(-u))^2}, \qquad \Psi''_Z(u) = \frac{\exp(-u)(2+u-\exp(-u)) + 2(1+\exp(-u))^2}{(2+u-\exp(-u))^3},$$
et donc
$$\mathbb{E}[Z] = 2 \ (= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]), \qquad \mathbb{E}[Z^2] = 9, \quad \mathrm{Var}[Z] = 5.$$
Mais comme
$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X,Y),$$
On déduit
$$5 = 1 + 2 + 2\mathrm{Cov}(X,Y), \qquad \text{et donc } \mathrm{Cov}(X,Y) = 1.$$
Remarque : On trouve que les deux variables sont corrélés, ce qui implique en particulier le résultat de la question 3.

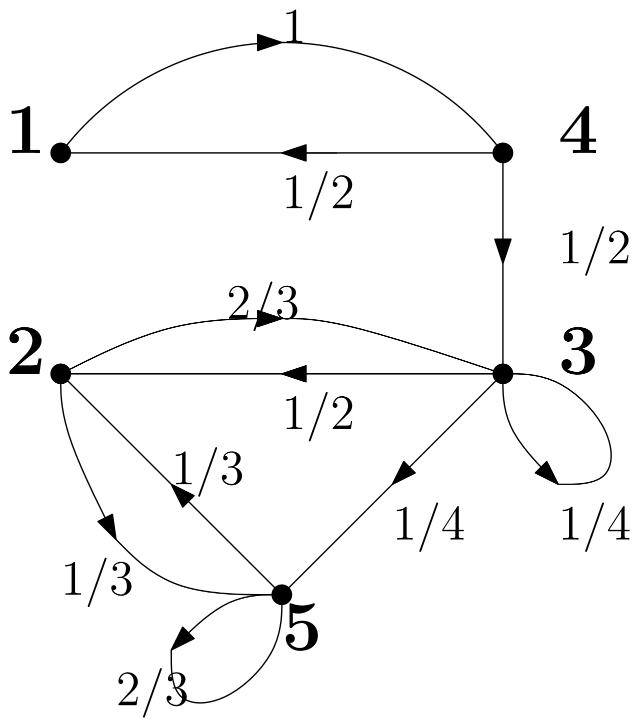
Exercice 2 *(6 points)* On considère une chaîne de Markov $\{X_0, X_1, ...\}$ d'espace d'état $E = \{1,2,3,4,5\}$ et de matrice de transition
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer l'espace d'état en classes de communication. Lesquelles parmi ces classes sont transientes ? récurrentes ?
2. Soit $\nu = (1/2, 0, 1/6, 1/6, 1/6)$. Calculer
$$\mathbb{P}_\nu(X_1 = j), j \in \{1,...,5\}, \quad \mathbb{P}_\nu(X_0 = 1, X_n \neq 1 \ \forall n \geq 1), \quad \mathbb{P}_\nu(X_n = 3 \ \forall n \geq 0).$$

3. Soit $T_3 = \min\{n \geq 0 : X_n = 3\}$. Déterminer $\mathbb{E}_i[T_3], i \in \{1,2,3,4,5\}$, et en déduire que $\mathbb{E}_\nu[T_3] = \frac{7}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble des distributions invariantes de la chaîne.
5. A-t-on convergence, lorsque $n \to \infty$, de $\mathbb{P}_3(X_n = 1), \mathbb{P}_3(X_n = 2), \ldots \mathbb{P}_3(X_n = 5)$?
6. Pour $n \geq 1$ on définit $U_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\pi X_k}{3})$. Montrer que sous $\mathbb{P}_3$,

$$U_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(p.s.)}}{\longrightarrow}} \frac{-5}{32}.$$

1. On a le diagramme suivant :



Les états $2,3,5$ communiquent : $p_{23} > 0, p_{32} > 0, p_{25} > 0, p_{52} > 0$. Comme $p_{i1}, p_{i4} = 0$ pour tout $i = 2,3,5$ on voit que $\{2,3,5\}$ forme une classe fermée et bien sûr finie, donc récurrente.

Par ailleurs les états 1 et 4 communiquent, ils forment donc une autre classe. Cette classe $\{1,4\}$ est ouverte (et donc transiente) puisque $p_{43} > 0$.

2. On a $\mathbb{P}_\nu(X_1 = j) = \nu P(j)$ pour $j = 1,2,3,4,5$, or

$$\nu P = (1/12 \quad 5/36 \quad 1/8 \quad 1/2 \quad 11/72).$$

D'autre part

$$\mathbb{P}_\nu(X_0 = 1, X_n \neq 1 \,\forall\, n \geq 1) = \mathbb{P}_\nu(X_0 = 1, X_1 = 4, X_2 = 3),$$

puisque depuis l'état 4 on ne peut aller qu'en les états 1 ou 3, et qu'une fois qu'elle s'y trouve, la chaîne ne peut quitter la classe fermée $\{2,3,5\}$. On a donc

$$\mathbb{P}_\nu(X_0 = 1, X_n \neq 1 \,\forall\, n \geq 1) = \nu(1)p_{14}p_{43} = \frac{1}{4}.$$

Enfin, quelque soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = 3 \ \forall n \geq 0) \leq \mathbb{P}_\nu(X_n = 3, n = 0, \dots, N) = \nu(3) p_{33}^N = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^N.$$

Or le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. L'inégalité étant valable pour tout N, on conclut que

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = 3 \ \forall n \geq 0) = 0.$$

3. D'après le cours (on avait obtenu le résultat en conditionnant au premier pas de la chaîne et en appliquant la propriété de Markov au temps 1), on a le système linéaire

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_1[T_3] = 1 + \mathbb{E}_4[T_1] \\
&\mathbb{E}_2[T_3] = 1 + \frac{1}{3}\mathbb{E}_5[T_3] + \frac{2}{3}\mathbb{E}_3[T_3] \\
&\mathbb{E}_3[T_3] = 0 \\
&\mathbb{E}_4[T_3] = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}_1[T_3] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_3[T_3] \\
&\mathbb{E}_5[T_3] = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}_5[T_3] + \frac{1}{3}\mathbb{E}_2[T_3]
\end{aligned}$$

Il est facile de le résoudre, on obtient

$$\mathbb{E}_1[T_3] = 4 \quad \mathbb{E}_2[T_3] = 3 \quad \mathbb{E}_3[T_3] = 0 \quad \mathbb{E}_4[T_3] = 3 \quad \mathbb{E}_5[T_3] = 6.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}_\nu[T_3] = \sum_{i=1}^{5} \nu(i)\mathbb{E}_i[T_3] = \frac{7}{2},$$

ce qui est le résultat souhaité.

4. Pour trouver l'ensemble des distributions invariantes on résout $\pi P = \pi$, avec π une mesure de proba sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
$\pi P = \pi$ est le système

$$\begin{aligned}
&\pi(1) = \frac{1}{2}\pi(4) \\
&\pi(2) = \frac{1}{2}\pi(3) + \frac{1}{3}\pi(5) \\
&\pi(3) = \frac{2}{3}\pi(2) + \frac{1}{4}\pi(3) + \frac{1}{2}\pi(4) \\
&\pi(4) = \pi(1) \\
&\pi(5) = \frac{1}{3}\pi(2) + \frac{1}{4}\pi(3) + \frac{2}{3}\pi(5).
\end{aligned}$$

Les première et quatrième équations conduisent à $\pi(1) = \pi(4) = 0$, ce qui n'est pas surprenant puisqu'une distribution stationnaire ne peut charger des états transients. Reste à résoudre le système en les 3 variables $\pi(2), \pi(3), \pi(5)$, on trouve que

$$\pi(3) = \frac{8}{9}\pi(2), \quad \pi(5) = \frac{5}{3}\pi(2),$$

et la condition $\pi(2) + \pi(3) + \pi(5) = 1$ permet de conclure que l'unique distribution invariante de la chaîne est

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{32} & \frac{8}{32} & 0 & \frac{15}{32} \end{pmatrix}.$$

5. La chaîne issue de 3 ne visite que les états $\{2, 3, 5\}$. En particulier quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 4) = 0$, et donc ces deux suites convergent de façon triviale.
   En réalité tout se passe donc comme si on travaillait avec la chaîne définie sur l'espace d'état restreint $\{2, 3, 5\}$ (la matrice de transition de la chaîne restreinte peut facilement être obtenue de P, il suffit d'effacer première et quatrième lignes, et première et quatrième colonnes).
   Cette chaîne définie sur l'espace restreint est irréductible. Elle est apériodique puisque $p_{33}^{(n)} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On peut donc appliquer le théorème de convergence, et donc la suite $(X_n, n \geq 0)$ converge en loi vers une variable $X_\infty \sim \pi$. Autrement dit, lorsque $n \to \infty$,

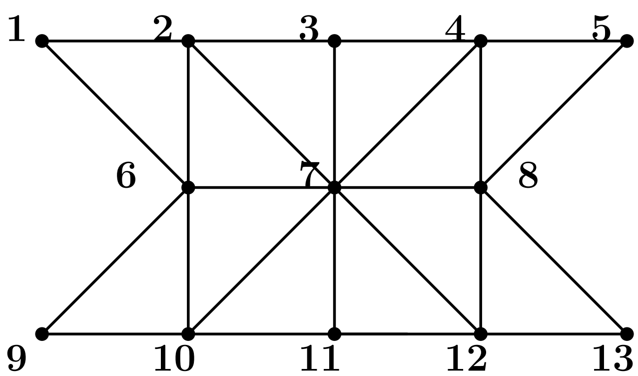
$$\mathbb{P}_3(X_n = 2) \to \frac{9}{32}, \quad \mathbb{P}_3(X_n = 3) \to \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}_3(X_n = 5) \to \frac{15}{32}.$$

6. Dans cette question également la chaîne est issue de l'état 3 et donc ne visitera jamais les états $1, 4$. On peut, comme dans la question précédente, travailler avec la chaîne restreinte, irréductible, définie sur l'espace restreint $\{2, 3, 5\}$.
   On regarde $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$, avec $f : x \to \cos(\pi x/3)$. Evidemment f est bornée, et donc par le théorème ergodique, on conclut que

$$U_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(p.s.)}}{\longrightarrow}} \sum_{x=2,3,5} \pi(x)f(x) = \frac{9}{32}\cos(2\pi/3) + \frac{1}{4}\cos(\pi) + \frac{15}{32}\cos(5\pi/3) = -\frac{9}{64} - \frac{1}{4} + \frac{15}{64} = -\frac{5}{32}$$

   (on notera que la somme ci-dessus est également $\sum_{x \in E} \pi(x)f(x)$, puisque π ne charge pas les états $1, 4$).

Exercice 3 *(4 points)* On considère la marche aléatoire simple $(S_n, n \geq 0)$ sur le graphe suivant :



On rappelle que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et que sachant S_n, S_{n+1} est choisi uniformément parmi les voisins de S_n. Par exemple l'état 1 possède 2 voisins (les états 2 et

6), tandis que l'état 2 en possède 4 (les états $1, 3, 6, 7$) de sorte que :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = 2 \mid S_n = 1) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 6 \mid S_n = 1) = 1/2, \text{ tandis que}$$
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = 1 \mid S_n = 2) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 3 \mid S_n = 2) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 6 \mid S_n = 2) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 7 \mid S_n = 2) = 1/4.$$

Pour $i \in \{1, ..., 13\}$ on note

$$T_i^+ := \inf\{n > 0 : S_n = i\}.$$

1. Montrer que la chaîne $(S_n, n \geq 0)$ est réversible (on cherchera une distribution π telle que les équations de balance détaillée sont satisfaites).
2. Montrer alors que

$$\mathbb{E}_7[T_7^+] = 6 \text{ tandis que } \mathbb{E}_6[T_6^+] = 9.6\,.$$

   Que valent $\mathbb{E}_1[T_1^+], \mathbb{E}_2[T_2^+], \mathbb{E}_3[T_3^+]$?

1. Si les équations de balance détaillée sont satisfaites, on a pour tous états $i, j \in \{1, ..., 13\}^2$,

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

   Si i et j sont voisins dans le graphe, on a $p_{ij} = \frac{1}{\#\{\text{voisins de } i\}}$ tandis que $p_{ji} = \frac{1}{\#\{\text{voisins de } j\}}$. L'équation de balance détaillée devient alors

$$\frac{\pi(i)}{\#\{\text{voisins de } i\}} = \frac{\pi(j)}{\#\{\text{voisins de } j\}},$$

   Ainsi, si on décide pour une constante C que l'on va déterminer plus loin on prend $\pi(i) = \frac{\#\{\text{voisins de } i\}}{C}$, on voit que les équations de balance détaillée sont automatiquement satisfaites.
   Pour que π soit une distribution il faut que $\sum_{i=1}^{13} \pi(i) = 1$,et il faut et il suffit donc de prendre

$$C = \sum_{i=1}^{13} \#\{\text{voisins de } i\} = 48.$$

   (autrement dit C est la somme des degrés des noeuds du graphe, i.e. $2*$ le nombre d' arêtes du graphe)
   La chaîne est donc réversible, puisqu'on satisfait les équations de balance détaillée avec

$$\pi(1) = \pi(5) = \pi(9) = \pi(13) = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$
$$\pi(2) = \pi(4) = \pi(10) = \pi(12) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$
$$\pi(3) = \pi(11) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$
$$\pi(6) = \pi(8) = \frac{5}{48}$$
$$\pi(7) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}.$$

   On rappelera que puisque la chaîne est réversible, on a trouvé là son unique distribution invariante.

2. Puisque la chaîne est irréductible (elle est même réversible !) et qu'elle possède la distribution invariante π, on peut utiliser le théorème du cours qui affirme que pour tout état $x \in E$ on a

$$\mathbb{E}_x[T_x^+] = \frac{1}{\pi(x)}.$$

D'après la question précédente on trouve donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1[T_1^+] &= 24 \\
\mathbb{E}_2[T_2^+] &= 12 \\
\mathbb{E}_3[T_3^+] &= 16 \\
\mathbb{E}_6[T_6^+] &= \frac{48}{5} = 9.6 \\
\mathbb{E}_7[T_7^+] &= 6.
\end{aligned}$$

et en particulier on retrouve bien les résultats souhaités.