Université Denis Diderot Paris 7

18 mars 2015

Probabilités 31HU03MM

Partiel

durée : 2 heures
Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.
On prendra soin de bien justifier les réponses.
Le barème est provisoire, et n'est donné qu'à titre d'indication de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 [Cours et application directe] (*6 pts*)
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Enoncer, puis démontrer, l'inégalité de Chebychev pour une variable $X \in \mathbb{L}^2$.
   Si $X \in \mathbb{L}^2$, on a pour tout $a > 0$
   $$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a] \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$
   L'inégalité de Chebychev découle de l'inégalité de Markov pour la fonction $h : y \to y^2$ et la variable $X - \mathbb{E}[X]$. En effet l'inégalité de Markov affirme que si la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante et si $h(a) > 0$,
   $$\mathbb{P}(|Y| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(|Y|)]}{h(a)}.$$
   L'inégalité de Markov découle quant à elle du fait que puisque h est croissante et positive,
   $$\mathbb{P}(|Y| > a) \leq \mathbb{P}(h(|Y|) \geq h(a)) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{h(|Y|)\geq h(a)\}}] \leq \mathbb{E}[\frac{h(|Y|)}{h(a)}].$$

2. Enoncer (on ne demande pas d'effectuer la démonstration du théorème) le théorème de transfert pour une variable aléatoire réelle X et une application borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comment s'exprime $\mathbb{E}[h(X)]$ lorsque X possède la densité f_X ?
   Montrer que connaître $\mathbb{E}[h(X)]$ pour toute fonction h borélienne bornée caractérise la loi de X.
   Le théorème de transfert pour une variable réelle $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et une application borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affirme que
   $$\mathbb{E}[h(X)] = \int_\Omega h(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} h(x)d\mathbb{P}_X(x),$$

où $\mathbb{P}_X$ est la mesure-image de $\mathbb{P}$ par X, i.e. la loi de X.
Lorsque X possède la densité f_X, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x)f_X(x)dx.$$

Enfin, il suffit de voir que pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée borélienne, et que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B),$$

de sorte que la connaissance de $\mathbb{E}[h(X)]$ pour toute fonction h borélienne bornée implique la connaissance de $\mathbb{P}_X$.

3. On dispose de n boules numérotées, qu'on place dans r cases, également numérotées. On fixe également $k_1, ..., k_r$ des entiers tels que $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$. Combien de manières y a-t-il de placer les n boules dans les r cases de sorte qu'il y ait k_i boules dans la case i, pour $i = 1, ..., n$?
Il y a $\binom{n}{k_1}$ façons de choisir les k_1 boules qui atterrissent dans la case 1. Une fois ces boules choisies, il reste $\binom{n-k_1}{k_2}$ façons de choisir les k_2 boules qui atterrissent dans la case 2, etc...
Il y a donc

$$\binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times ... \times \binom{n-k_1-...-k_{r-1}}{k_r} = \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

manières de placer les n boules dans les r cases de sorte qu'il y ait k_i boules dans la case i, pour $i = 1, ..., n$.

4. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Rappeler la définition de la transformée de Laplace Ψ_X, et expliquer pourquoi elle caractérise la loi de X. Si on suppose de plus que $X \in \mathbb{L}^2$, montrer que Ψ_X est deux fois dérivable à droite en 0 et que

$$\mathrm{Var}[X] = \Psi_X''(0) - (\Psi_X'(0))^2.$$

Retrouver, grâce à cette formule, la variance de $X \sim \exp(\lambda)$.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(-tX) \in \mathbb{L}^1$,

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(-tX)].$$

Ici on suppose X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $\exp(-tX) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, et donc pour tout $t \geq 0$, $\exp(-tX) \in \mathbb{L}^1$. La tranformée de Laplace d'une variable réelle positive est donc toujours définie au moins sur $\mathbb{R}_+$.
En particulier elle est définie sur un intervalle d'intérieur non vide, et d'après le théorème du cours sur les tranformées de Laplace, elle caractérise donc la loi de X.
Si $X \in \mathbb{L}^2$, pour tout $t > 0$, par le théorème de convergence dominée,

$$\Psi_X'(t) = \mathbb{E}[-X\exp(-tX)] \searrow_{t \searrow 0} -\mathbb{E}[X],$$

$$\Psi_X''(t) = \mathbb{E}[X^2\exp(-tX)] \nearrow_{t \searrow 0} \mathbb{E}[X^2].$$

On a donc bien, lorsque $X \in \mathbb{L}^2$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \Psi_X''(0) - \Psi_X'(0)^2.$$

Lorsque $X \sim \exp(\lambda)$, on a pour tout $t > -\lambda$

$$\Psi_X(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda \exp(-\lambda x - tx) dx = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

On a donc $\Psi_X'(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda+t)^2}$ de sorte que $\mathbb{E}[X] = -\Psi_X'(0) = \frac{1}{\lambda}$. De plus, $\Psi_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda+t)^3}$ de sorte que $\mathbb{E}[X^2] = \Psi_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$. On retrouve alors

$$\mathrm{Var}(X)\Psi_X''(0) - \Psi_X'(0)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5. Rappeler la définition de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X.
   A quelles conditions sur la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe-t-il une variable X telle que $F = F_X$ (on ne demande pas de redémontrer le résultat) ?
   Pour X variable aléatoire réelle,

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Si la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est croissante, continue à droite, et vérifie

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

   alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X (c'est le théorème du cours sur la caractérisation d'une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$)

6. Calculer $\mathbb{E}[\sin(X)]$ lorsque $X \sim \exp(1)$.
   D'après le théorème de transfert, puis deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sin(X)] &= \int_{\mathbb{R}_+} \sin(x)\exp(-x)dx \\
&= [-\sin(x)\exp(-x)]_0^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}_+} \cos(x)\exp(-x)dx \\
&= [-\cos(x)\exp(-x)]_0^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}_+} \sin(x)\exp(-x)dx.
\end{aligned}$$

   On en déduit $\mathbb{E}[\sin(X)] = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 (*5 pts*) On considère deux dés équilibrés, le premier possède $k \in \mathbb{N}^*$ faces, le deuxième en compte $\ell \in \mathbb{N}^*$.
A chaque instant discret $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue un lancer des deux dés. On suppose qu'à chaque lancer les résultats obtenus sur chacun des deux dés sont indépendants, et que les différents lancers sont également indépendants.
On fixe $k_1 \in \{1, ..., k\}, \ell_2 \in \{1, ..., \ell\}$ et on considère les temps

$$T_1 := \inf\{n: \text{ au } n\text{-ième lancer, le premier dé fournit un score } \leq k_1\},$$

$$T_2 := \inf\{n: \text{ au } n\text{-ième lancer, le deuxième dé fournit un score } \geq \ell_2\},$$

$$T := \min(T_1, T_2).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ déterminer $\mathbb{P}(T_1 > n)$ (on pourra introduire $p_1 = \frac{k_1}{k}$). En déduire la loi de T_1. Déterminer de manière similaire la loi de T_2 (pour simplifier l'écriture, on pourra introduire un p_2 judicieusement choisi).
   Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'événement $\{T_1 > n\}$ correspond à ce que les n premiers lancers du premier dé ont tous donné un résultat $> k_1$. Pour un lancer, puisque ce dé est équilibré et possède k faces, la probabilité d'obtenir pour le premier dé un résultat $> k_1$ est exactement $(k - k_1)/k = 1 - \frac{k_1}{k} =: 1 - p_1$. Les n lancers étant indépendants, on obtient que
   $$\mathbb{P}(T_1 > n) = (1 - p_1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
   et on conclut que T_1 est une variable géométrique de paramètre $p_1 = \frac{k_1}{k}$.
   De manière en tous points similaire, on montre que $T_2 \sim \text{Geom}(p_2)$, avec $p_2 = \frac{\ell - \ell_2 + 1}{\ell}$.
2. Montrer que
   $$\{T > n\} = \{T_1 > n\} \cap \{T_2 > n\}.$$
   En déduire $\mathbb{P}(T > n)$, et la loi de T.
   Le résultat obtenu est-il surprenant ?
   Pour tous x, y, a réels,
   $$\min(x, y) > a \Leftrightarrow x > a \text{ et } y > a,$$
   de sorte que
   $$\{\omega : \min(T_1(\omega), T_2(\omega) > n\} = \{\omega : T_1(\omega) > n \text{ et } T_2(\omega) > n.$$
   On conclut qu'effectivement
   $$\{T > n\} = \{T_1 > n\} \cap \{T_2 > n\}.$$
   Les résultats obtenus sur chacun des deux dés sont indépendants, de sorte que $\{T_1 > n\}$ et $\{T_2 > n\}$ sont des événements indépendants. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{P}(\{T_1 > n\} \cap \{T_2 > n\}) = \mathbb{P}(T_1 > n)\mathbb{P}(T_2 > n) = (1 - p_1)^n (1 - p_2)^n = (1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2)^n.$$
   Si on note $p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$, on a donc que $T \sim \text{Geom}(p)$.
   Le résultat obtenu n'a rien de surprenant, T est en effet le premier temps de "succès" dans une suite d'essais indépendants, où un "succès" correspond au fait que ou bien

le premier dé affiche un score $\le k_1$, ou bien le deuxième dé affiche un score $\ge \ell_2$. La probabilité de "succès" sur un lancer est bien (d'après la formule du crible, et l'indépendance des deux dés) :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{\text{premier dé } \le k_1\} \cup \{\text{deuxième dé } \ge \ell_2\}) \\
= \; & \mathbb{P}(\{\text{dé 1 } \le k_1\}) + \mathbb{P}(\{\text{dé 2 } \ge \ell_2\}) - \mathbb{P}(\{\text{dé 1 } \le k_1\} \cap \{\text{dé 2 } \ge \ell_2\}) \\
= \; & \frac{k_1}{k} + \frac{\ell - \ell_2 + 1}{\ell} - \frac{k_1}{k}\frac{\ell - \ell_2 + 1}{\ell} = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = p.
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien que $T \sim \mathrm{Geom}(p)$.

3. Calculer G_T, la fonction génératrice de T. En déduire $\mathbb{E}[T(T-1)(T-2)]$.
Puisque $T \sim \mathrm{Geom}(p)$, on a pour tout $x \in [0, 1/(1-p))$,

$$\begin{aligned}
G_T(x) &= \mathbb{E}[x^T] \\
&= \sum_{n \ge 1} x^n p (1-p)^{n-1} \\
&= px \sum_{n' \ge 0} (x(1-p))^{n'} \\
&= \frac{px}{1 - x(1-p)},
\end{aligned}$$

D'après le théorème du cours listant les propriétés des fonctions génératrices,

$$\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = G_T^{(3)}(1).$$

Or $G_T'(x) = \frac{p}{(1-x(1-p))^2}$, donc $G_T''(x) = \frac{2p(1-p)}{(1-x(1-p))^3}$ (on retrouve au passage que $\mathbb{E}[T(T-1)] = \frac{2(1-p)}{p^2}$), et enfin

$$G_T^{(3)}(x) = \frac{6p(1-p)^2}{(1-x(1-p))^4},$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[T(T-1)(T-2)] = \frac{6(1-p)^2}{p^3},$$

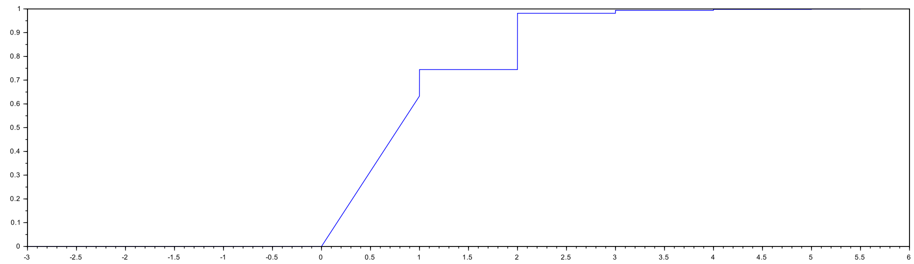
où on rappelle que $p = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = \frac{k_1}{k} + \frac{\ell - \ell_2 + 1}{\ell} - \frac{k_1}{k}\frac{\ell - \ell_2 + 1}{\ell}$.

Exercice 3 (*6 pts*) Pour β, γ des réels, on considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{5}\mathbb{1}_{\{x \ge 2\}} + \frac{1}{3}\sum_{i \ge 1} \frac{1}{3^i}\mathbb{1}_{\{x \ge i\}} + \beta x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \gamma \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(x).$$

1. **(a)** Déterminer les valeurs de β et γ telles que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.
On ébauchera le graphe de F (on pourra se contenter par exemple de la représenter sur l'intervalle $[-3.5, 3.5]$) pour un choix de telles valeurs de β, γ.

On suppose dans la suite de l'exercice que β, γ sont bien choisis de sorte que F soit la fonction de répartition de X.



D'après le théorème du cours concernant la caractérisation d'une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pour que la fonction F soit une fonction de répartition il faut et il suffit qu'elle soit croissante de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$, continue à droite, que $\lim_{-\infty} F(x) = 0$ et que $\lim_{+\infty} F(x) = 1$.
Pour que F soit continue à droite en 1 il faut et il suffit que $\beta = \gamma$. Enfin, sa limite en $+\infty$ est

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\sum_{i\geq 1}\frac{1}{3^i} + \gamma = \frac{1}{5} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-1/3} + \gamma = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \gamma = \frac{11}{30} + \gamma,$$

ce qui entraîne que $\gamma = 19/30$ pour que $\lim_{+\infty} F(x) = 1$.
On a donc nécessairement $\beta = \gamma = 19/30$. Pour ces valeurs, il est clair que $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est croissante, continue à droite en tout point et que $\lim_{-\infty} F(x) = 0$. On conclut que c'est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.

(b) La variable X est-elle discrète ? Possède-t-elle une densité ?
La variable X n'est pas discrète, puisque (par exemple) elle peut prendre n'importe quelle valeur sur $[0,1]$. Elle n'est pas non plus à densité, puisque (par exemple), on a $\mathbb{P}(X=2) > 0$.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$, $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 2)$, $\mathbb{P}(X \in (-5, 100])$.
On a

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \lim_{x \nearrow 1} F(x) = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30},$$

$$\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 2) = F(3) - \lim_{x \nearrow 0.5} F(x) = F(2) - F(0.5) = \frac{53}{54} - \frac{19}{60} = \frac{359}{540},$$

$$\mathbb{P}(X \in (-5, 100]) = F(100) - F(-5) = F(100) = 1 - \sum_{i \geq 101} \frac{1}{3^{i+1}} = 1 - \frac{1}{2 * 3^{100}}.$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = k \mid X \geq 1)$.
D'après la question précédente $\mathbb{P}(X \geq 1) = \frac{11}{30}$. Par définition de probabilité conditionnelle, on a donc

$$\mathbb{P}(X = k \mid X \geq 1) = \frac{30}{11}\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X \geq 1\}).$$

Pour $k=0$, on a $\{X=k\}\cap\{X\geq 1\}=\emptyset$, de sorte que $\mathbb{P}(X=0\mid X\geq 1)=0$. Pour tout $k\geq 1$, $\{X=k\}\cap\{X\geq 1\}=\{X=k\}$, de sorte que

$$\mathbb{P}(X=k\mid X\geq 1)=\frac{30}{11}\mathbb{P}(X=k).$$

Pour $k\geq 1, k\neq 2$, on a $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{3^{k+1}}$ et donc

$$\mathbb{P}(X=k\mid X\geq 1)=\frac{30}{11*3^{k+1}}=\frac{10}{11*3^k},\quad \forall k\geq 1, k\neq 2$$

Enfin pour $k=2$, $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{27}+\frac{1}{5}=\frac{32}{135}$, d'où

$$\mathbb{P}(X=2\mid X\geq 1)=\frac{30}{11}\frac{32}{135}=\frac{64}{99}.$$

4. Montrer que X a la même loi que Y_ξ où

$$\xi=\begin{cases}1 \text{ avec proba } 1/5\\ 2 \text{ avec proba } 1/6\\ 3 \text{ avec proba } \frac{19}{30}\end{cases},$$

$$Y_1=2,\quad Y_2\sim \text{Geom}(2/3),\quad Y_3\sim\text{Unif}[0,1],$$

et ξ, Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes.
La fonction de répartition de Y_1 est

$$F_{Y_1}(x)=\mathbb{1}_{\{y\geq 2\}}.$$

Celle de Y_2 est

$$F_{Y_2}(x)=\sum_{i\geq 1}\frac{2}{3}\frac{1}{3^{i-1}}\mathbb{1}_{\{x\geq i\}}.$$

Enfin celle de Y_3 est

$$F_{Y_3}(x)=x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)+\mathbb{1}_{(1,+\infty)}(x)$$

Calculons alors la fonction de répartition de Y_ξ au point $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_\xi\leq x) &= \mathbb{P}(\xi=1,Y_1\leq x)+\mathbb{P}(\xi=2,Y_2\leq x)+\mathbb{P}(\xi=3,Y_3\leq x)\\ &= \frac{1}{5}F_{Y_1}(x)+\frac{1}{6}F_{Y_2}(x)+\frac{19}{30}F_{Y_3}(x),\end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité, on a utilisé l'indépendance de ξ avec Y_1, Y_2, Y_3. Reste à remarquer que

$$\frac{1}{5}F_{Y_1}(x)+\frac{1}{6}F_{Y_2}(x)+\frac{19}{30}F_{Y_3}(x)=F(x),$$

et comme la fonction de répartition d'une variable réelle caractérise sa loi, on conclut que X a même loi que Y_ξ.

5. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$.

   Les espérances de $Y_i, i = 1, 2, 3$ sont usuelles, on a $\mathbb{E}[Y_1] = 2$, $\mathbb{E}[Y_2] = \frac{3}{2}$, et $\mathbb{E}[Y_3] = \frac{1}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{\xi=1\}}] + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{\xi=2\}}] + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{\xi=3\}}] \\
&= \mathbb{E}[Y_1\mathbb{1}_{\{\xi=1\}}] + \mathbb{E}[Y_2\mathbb{1}_{\{\xi=2\}}] + \mathbb{E}[Y_3\mathbb{1}_{\{\xi=3\}}] \\
&= \frac{1}{5}\mathbb{E}[Y_1] + \frac{1}{6}\mathbb{E}[Y_2] + \frac{19}{30}\mathbb{E}[Y_3] \\
&= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{19}{60} = \frac{29}{30}.
\end{aligned}$$

   De même, puisque $\mathbb{E}[Y_1^2] = 4, \mathbb{E}[Y_2^2] = \mathrm{Var}(Y_2) + (\mathbb{E}[Y_2])^2 = \frac{1-2/3}{(2/3)^2} + \frac{1}{(2/3)^2} = 3, \mathbb{E}[Y_3^2] = \mathrm{Var}(Y_3) + (\mathbb{E}[Y_3])^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$, on déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X^2\mathbb{1}_{\{\xi=1\}}] + \mathbb{E}[X^2\mathbb{1}_{\{\xi=2\}}] + \mathbb{E}[X^2\mathbb{1}_{\{\xi=3\}}] \\
&= \mathbb{E}[Y_1^2\mathbb{1}_{\{\xi=1\}}] + \mathbb{E}[Y_2^2\mathbb{1}_{\{\xi=2\}}] + \mathbb{E}[Y_3^2\mathbb{1}_{\{\xi=3\}}] \\
&= \frac{1}{5}\mathbb{E}[Y_1^2] + \frac{1}{6}\mathbb{E}[Y_2^2] + \frac{19}{30}\mathbb{E}[Y_3^2] \\
&= \frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{19}{90} = \frac{68}{45}.
\end{aligned}$$

   On conclut

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1360}{900} - \frac{841}{900} = \frac{519}{900}.$$

Exercice 4 *(4 pts)* On considère dans cet exercice la variable aléatoire réelle X de densité

$$f_X(x) = \alpha x^{-5}\mathbb{1}_{\{x\geq 1/2\}}.$$

1. Déterminer la valeur de α pour que f_X soit bien une densité de probabilité.

   La fonction f_X est positive, intégrable, et

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \alpha \int_{1/2}^{+\infty} x^{-5}dx = \alpha \left[\frac{-x^{-}4}{4}\right]_{1/2}^{+\infty} = 4\alpha.$$

   Pour que f_X soit une densité il faut donc que $\alpha = 1/4$

2. Déterminer alors la fonction de répartition F_X.

   On a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2 \\ 1 - \frac{1}{16x^4} & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}.$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de $p \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $X \in \mathbb{L}^p$? Pour ces valeurs, calculer $\mathbb{E}[X^p]$.

   On a

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p f_X(x)dx = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{4}x^{p-5}dx < \infty$$

si et seulement si $p < 4$. Dans ce cas on a

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{4} x^{p-5} dx = \left[-\frac{x^{p-4}}{4(p-4)} \right]_{1/2}^{+\infty} = \frac{2^{4-p}}{4(4-p)}$$

Les valeurs de $p \in \mathbb{N}^*$ telles que $X \in \mathbb{L}^p$ sont donc $p = 1, 2, 3$ et d'après la formule qui précède on a dans ces trois cas $\mathbb{E}[X] = 2/3, \mathbb{E}[X^2] = 1/2, \mathbb{E}[X^3] = 1/2$.

4. Soit $U = X^2$. Déterminer la loi de U.

   Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée mesurable. On a, d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(U)] &= \mathbb{E}[\phi(X^2)] \\ &= \int_{1/2}^{+\infty} \phi(x^2) \frac{x^{-5}}{4} dx \\ &= \int_{1/4}^{+\infty} \phi(u) \frac{u^{-3}}{8} du. \end{aligned}$$

   Comme l'égalité ci-dessus est valable pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée mesurable, on conclut que la variable U a pour densité

$$f_U(u) = \frac{u^{-3}}{8} \mathbb{1}_{\{u \geq 1/4\}}.$$