Université de Paris

Mercredi 10 novembre 2021

Chaînes de Markov

Examen

Documents autorisés, objets électroniques interdits

Exercice 1 Soit la chaîne X à temps continu sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer le noyau de transition Π associé. Décomposer l'espace d'états en classes de communication, en précisant lesquelles sont récurrentes ou transientes.
2. Donner l'ensemble des probabilités invariantes de la chaîne.
3. Calculer $\mathbb{P}_1(T_3 < T_4)$.
4. Calculer $\mathbb{E}_1[T_3]$.
5. Montrer que $X_t - 3$ converge en loi lorsque $t \to \infty$ vers une variable de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

1. On a
$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 5/6 & 1/6 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
de sorte que $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, et $\{1, 2\} \to \{3, 4\}$ mais $\{3, 4\} \nrightarrow \{1, 2\}$. Ainsi $\{1, 2\}$ est une classe non fermée, donc transiente, $\{3, 4\}$ est une classe finie fermée, donc récurrente positive.
2. Il existe une unique probabilité invariante associée à X (qui charge son unique classe récurrente positive), et $\lambda Q = 0$ conduit à $\lambda(3) = 3\lambda(4)$. Finalement $(0\ 0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4})$ est l'unisque probabilité invariante de X.
3. Par Markov au premier temps de saut de X issu de 1, on a
$$\mathbb{P}_1(T_3 < T_4) = \frac{5}{6}\mathbb{P}_2(T_3 < T_4) + 1/6.$$
et par un raisonnement similaire
$$\mathbb{P}_2(T_3 < T_4) = \frac{3}{4}\mathbb{P}_1(T_3 < T_4).$$
En résolvant le système il vient finalement
$$\mathbb{P}_1(T_3 < T_4) = \frac{4}{9}.$$

4. La loi de J_1 sous $\mathbb{P}_1$ est exp(6) d'espérance 1/6 et en J_1, la chaîne se rend en 3 avec probabilité 1/6, et sinon en 2. Par Markov en J_1, on obtient donc

$$\mathbb{E}_1[T_3] = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\mathbb{E}_2[T_3].$$

Par un raisonnement similaire

$$\mathbb{E}_2[T_3] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{E}_1[T_3] + \frac{1}{4}\mathbb{E}_4[T_3]$$

et enfin $\mathbb{E}_4[T_3] = 1/3$. Finalement

$$\frac{3}{8}\mathbb{E}_1[T_3] = \frac{1}{6} + \frac{5}{24} + \frac{5}{72} = \frac{4}{9},$$

et donc

$$\mathbb{E}_1[T_3] = \frac{32}{27}.$$

5. Le théorème de convergence s'applique à la chaîne restreinte à $\{3, 4\}$ (celle-ci est irréductible, récurrente positive), disons sous $\mathbb{P}_3$ par exemple. Pour une distribution initiale μ quelconque, $T_3 < \infty$ p.s. sous $\mathbb{P}_\mu$ (cf le raisonnement de la question 4), et $(X_{T_3+t}, t \geq 0)$ a même loi que X sous $\mathbb{P}_3$. On en déduit que comme sous $\mathbb{P}_3$, la loi de X_t sous $\mathbb{P}_\mu$ tend vers λ. Autrement dit, sous $\mathbb{P}_\mu$, $X_t - 3$ converge en loi lorsque $t \to \infty$ vers une variable de Bernoulli de paramètre 1/4.

Exercice 2 Dans cet exercice, on fixe un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et on considère la chaîne X à temps discret sur $E = \mathbb{N}^*$, et dont le noyau de transition est donné par

$$P(n, n+1) = C_\alpha \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^\alpha, n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(n, n-1) = C_\alpha \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)^\alpha, n \geq 2,$$

$$P(1,1) = 1 - P(1,2) = 1 - \frac{C_\alpha}{2^{\alpha/2}}, \qquad P(n,n) = 1 - P(n, n-1) - P(n, n+1), n \geq 2.$$

où $C_\alpha > 0$ et $C_\alpha < \min(\frac{1}{2}, 2^{\alpha/2}, \frac{1}{2^{\alpha/2}+(2/3)^{\alpha/2}})$. La définition précise de C_α n'a qu'une importance marginale pour la suite, on notera simplement qu'il est choisi assez petit pour que $P(n,n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme usuellement, on note $\mathbb{P}_\mu$ la loi de la chaîne issue de la distribution initiale μ sur $\mathbb{N}^*$.
Pour $s > 1$ on note

$$\zeta(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^s}.$$

1. Montrer que la chaîne X est irréductible, apériodique.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}_\mu(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_n = k, X_{n+1} \neq X_n) = \frac{P(k, k+1)}{P(k, k+1) + P(k, k-1)}$$

et que cette quantité tend vers 1/2 lorsque $k \to \infty$.

3. (a) Montrer que la mesure λ telle que $\lambda(n) = n^{-\alpha}, n \in \mathbb{N}^*$ est une mesure invariante de la chaîne, et que celle-ci est réversible.

(b) Pour quelles valeurs du paramètre α la chaîne X est-elle récurrente positive ? On notera D_+ l'ensemble de ces valeurs.

(c) Montrer que si $\alpha \in D_+$,
$$\mathbb{P}_1(X_n = 2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2^\alpha \zeta(\alpha)}.$$

4. On considère la fonction $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+$ telle que
$$h(1) = 0,\ \ h(n) = \sum_{k=2}^{n} (k(k-1))^{\alpha/2}, n \geq 2.$$

(a) Montrer que h est P harmonique sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, i.e. que $Ph(n) = h(n), n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

(b) Soit $\lim_{n\to\infty} h(n) =: H_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Déterminer $D := \{\alpha \in \mathbb{R} : H_\alpha = +\infty\}$.

(c) Soit $T_{1,N} = \inf\{k \geq 0 : X_n \in \{1, N\}\}$. Montrer que $h(X_{n\wedge T_{1,N}})$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

(d) Pour $k \in \{2, ..., N-1\}$, montrer que $\mathbb{P}_k(X_{T_{1,N}} = N) = \frac{h(k)}{h(N)}$.

(e) Exprimer $\mathbb{P}_k(T_1 < \infty)$ en fonction de $h(k), H_\alpha$ et en déduire que la chaîne est récurrente si et seulement si $\alpha \in D$.

5. Pour quelles valeurs de α la chaîne est-elle récurrente nulle ?

6. On suppose $\alpha \in D$, et on pose $f_\gamma(n) = n^\gamma, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\max(\gamma, \gamma') < \alpha - 1$ on a
$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_\gamma(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} f_{\gamma'}(X_k)} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \frac{\zeta(\alpha-\gamma)}{\zeta(\alpha-\gamma')}.$$

1. Comme $P(n, n+1)$ et $P(n+1, n)$ sont > 0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la chaîne est clairement irréductible. Par ailleurs $P(1,1) > 0$ car $C_\alpha < 2^{\alpha/2}$ de sorte que la chaîne est apériodique.

2. Par Markov au temps n,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_n = k, X_{n+1} \neq X_n) &= \mathbb{P}_k(X_{n+1} = k+1 \mid X_{n+1} \neq k) \\ &= \frac{P(k, k+1)}{P(k,k+1) + P(k, k-1)}, \end{aligned}$$
et comme $P(k, k+1)$ et $P(k, k-1)$ tendent tous deux vers $C_\alpha > 0$ lorsque $k \to \infty$, on obtient bien une limite $1/2$ pour la quantité ci-dessus.

3. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\lambda(n) P(n, n+1) = C_\alpha n^{-\alpha} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^\alpha = \frac{C_\alpha}{(n(n+1))^{\alpha/2}},$$
et
$$\lambda(n+1) P(n+1, n) = C_\alpha (n+1)^{-\alpha} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^\alpha = \frac{C_\alpha}{(n(n+1))^{\alpha/2}}.$$
Comme $P(i,j) = 0$ pour tous i, j tels que $|i-j| \geq 2$, on déduit que λ, P satisfont les équations de balance détaillée. La chaîne est donc bien réversible, et λ est une mesure invariante.

(b) La masse totale de λ est finie ssi $\alpha > 1$ (critère de Riemann). Dans ce cas il existe une probabilité invariante de la chaîne, $\pi := \frac{1}{\zeta(\alpha)}\lambda$, et elle est récurrente positive. Dans le cas contraire, λ a masse infinie et la chaîne ne peut pas être récurrente positive (sinon on contredirait le théorème qui affirme que deux mesures invariantes d'une chaîne récurrente sont proportionnelles). On conclut que $D_+ = (1, +\infty)$.

(c) Si $\alpha > 1$, la chaîne est irréductible, apériodique, récurrente positive et son unique mesure invariante est la mesure π décrite ci-dessus. Le théorème de convergence s'applique et on obtient la convergence en loi de X_n sous $\mathbb{P}_1$ vers une variable X_∞ de loi π. En particulier

$$\mathbb{P}_1(X_n = 2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(2) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}\frac{1}{2^\alpha}.$$

4. (a) Soit $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} Ph(n) - h(n) &= P(n,n-1)h(n-1) + P(n,n+1)h(n+1) + (P(n,n)-1)h(n) \\ &= P(n,n-1)(h(n-1)-h(n)) + P(n,n+1)(h(n+1)-h(n)) \\ &= C_\alpha\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha/2}(h(n-1)-h(n)) + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha/2}(h(n+1)-h(n))\right). \end{aligned}$$

Lorsque $n \geq 3$, on a donc bien

$$Ph(n) - h(n) = C_\alpha\left(-\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha/2}(n(n-1))^{\alpha/2} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha/2}(n(n+1))^{\alpha/2}\right) = 0.$$

Reste à voir que si $n = 2$,

$$\begin{aligned} Ph(2) - h(2) &= P(2,1)(h(1)-h(2)) + P(2,3)(h(3)-h(2)) \\ &= -C_\alpha 2^{\alpha/2}2^{\alpha/2} + C_\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha/2}(3\cdot 2)^{\alpha/2} = 0. \end{aligned}$$

.

(b) On a pour tout $n \geq 3$, $h(n) \leq \sum_{k\geq 3} k^\alpha$ et cette somme est finie dès que $\alpha < -1$. A l'inverse $h(n) \geq \sum_{k\geq 3}(k-1)^\alpha$ et donc $h(n) \to \infty$ dès que $\alpha \geq -1$. On conclut que $D = [-1, +\infty)$.

(c) Comme h est harmonique sur $\{2, 3, ..., N-1\}$, et bornée sur ce domaine, $(h(X_{n\wedge T_{1,N}})$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale d'après le résultat général vu en cours.

(d) Sous $\mathbb{P}_k$, $T_{1,N}$ est fini p.s. (on peut par exemple le borner par $N \times G$ avec G une variable géométrique). Par Doob (notre martingale est bornée donc les hypothèses du théorème d'arrêt optionnel sont vérifiées), on obtient donc

$$\mathbb{E}_k[h(X_{T_{1,N}})] = h(k)$$

et on déduit

$$\mathbb{P}_2(X_{T_{1,N}} = N)h(N) + \mathbb{P}_2(X_{T_{1,N}} = 1)h(1) = h(k),$$

ce qui conduit au résultat souhaité puisque $h(1) = 0$.

(e) Par Markov au temps 1, $\mathbb{P}_1(T_1^+ < \infty) = P(1,1) + P(1,2)\mathbb{P}_2(T_1 < \infty)$. Or $\mathbb{P}_2(T_1 < \infty) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_2(T_1 < T_N) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{h(2)}{h(N)}\right)$ et donc la chaîne est récurrente ssi $\alpha \in D$ (et elle est donc transiente si $\alpha \in D^c$, i.e. $\alpha < -1$.

5. D'après ce qui précède X est récurrente nulle ssi $\alpha \in [-1.1]$.

6. Si $\alpha \geq -1$ la chaîne est récurrente et possède la mesure invariante λ. Si $\gamma < \alpha - 1$, $\sum f_\gamma(x)\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{\gamma-\alpha} = \zeta(\alpha-\gamma)$, et si $\gamma' < \alpha - 1$, $\sum f_{\gamma'}(x)\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{\gamma'-\alpha} = \zeta(\alpha-\gamma')$. Par théorème ergodique, on a donc la convergence presque sûre souhaitée.

Problème

Le problème est découpé en 4 parties et une annexe.
La partie A (et la question A.3 en particulier) établit un résultat général pour une chaîne de Markov à temps continu, qui sera utile dans les parties C et D.
L'annexe est consacrée à la description des solutions d'une famille d'équations différentielles ordinaires qui intervient dans certains calculs du problème.
Les parties B,C, et D se focalisent sur un exemple particulier de chaîne à temps continu, modélisant l'évolution de la taille d'une population de bactéries.
La partie B se consacre aux premières propriétés et au calcul de la probabilité d'extinction. Elle est indépendante de la partie A.
La partie C étudie deux martingales associées à la chaîne.
Enfin la partie D est consacrée à l'étude des martingales exponentielles de cette chaîne, dans le but d'exprimer la transformée de Laplace de X_t.
Bien évidemment, on peut admettre certaines questions du problème pour traiter une autre question.

A. Soit X une chaîne de Markov à temps continu, de générateur Q, à valeurs dans l'espace d'états E, et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par X. On suppose que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}$ est dérivable par rapport à sa première variable, que pour $t \geq 0$, $f(t, X_t) \in \mathbb{L}^1$. Pour $t \geq 0$, $x \in E$, on rappelle qu'on note, e.g.

$$P(s)f(t,x) = \sum_{y\in E}(P(s))_{xy} f(t,y), \quad Qf(t.x) = \sum_{y\in E} Q(x,y)f(t,y).$$

On suppose enfin que pour tout $T \geq 0$ il existe $G_T(x)$ telle que $\sup_{t\in[0,T]}(|f(t,x)|, \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|) \leq G_T(x)$ et $P(s)G_T(x), P(s)QG_T(x)$ restent finis pour tous $s \geq 0, x \in E$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}[f(t+s, X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] = P(s)f(t+s, X_t)$$

2. Soit $\psi : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$ dérivable par rapport à sa première variable, Pour tout $T \geq 0$ fixé, on suppose qu'il existe $G_T(x)$ telle que $\sup_{t\in[0,T]}(|\psi(t,x)|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x)\right|) \leq G_T(x)$, et$P(s)G_T(x), P(s)QG_T(x)$ restent finis pour tous $s \geq 0, x \in E$. On pose $\phi(s) := P(s)\psi(s,x)$. Montrer que
$$\phi'(s) = P(s)\left[Q\psi(s,x) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,x)\right]$$

3. Déduire des questions précédentes que si pour tout $x \in E$, $Qf(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0$, alors $(f(t,X_t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

4. Retrouver à l'aide de la question précédente, le résultat du cours : si $g : E \to E$ est une fonction propre pour Q associée à la valeur propre α, et telle que $g(X_t) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $t \geq 0$, et $P(s)|g|(x), P(s)Q|g|(x)$ sont finis pour tout x, alors $(g(X_t)\exp(-\alpha t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

B. Dans cette partie, et toute la suite de ce problème, on considère un exemple particulier de chaîne de Markov à temps continu, modélisant l'évolution d'une population de bactéries.

On suppose que $p \in (0,1)$ est fixé, et qu'indépendamment, chaque individu de la population meurt à taux 1, et est remplacé instantanément par un nombre aléatoire de descendants : 2 avec probabilité p, et 0 avec probabilité $1-p$. On note X_t la taille de la population au temps $t \geq 0$, avec $\mathbb{P}_i$ la loi de X lorsque la population initiale est de taille i.

1. Montrer que $q_0 = 0$ et que pour $x \in \mathbb{N}^*$, on a

$$q_x = x, \quad q_{x,x+1} = xp, \quad q_{x,x-1} = x(1-p).$$

2. Montrer que si $g : E \to E$ on a

$$Qg(0) = 0 \qquad Qg(x) = x[pg(x+1) + (1-p)g(x-1) - g(x)],\ x \in \mathbb{N}^*.$$

3. Exprimer Π le noyau de transition associé à Q. Décomposer l'espace d'états en classes de communication, et préciser lesquelles sont récurrentes ou transientes.
4. On s'intéresse dans cette question à $h(t) = \mathbb{P}_1(X_t = 0)$.
   (a) En considérant séparément les descendances des 2 individus ancestraux, montrer que $\mathbb{P}_2(X_t = 0) = h(t)^2$.
   (b) En utilisant la propriété de Markov forte au premier temps de saut de X sous $\mathbb{P}_1$, montrer que

   $$h(t) = \int_0^t \exp(-s)\left((1-p) + ph(t-s)^2\right) ds$$

   (c) En déduire que

   $$h(t)\exp(t) = \int_0^t \exp(u)\left((1-p) + ph(u)^2\right) du$$

   puis que h vérifie l'équation (E) de l'annexe.
   (d) Conclure à l'aide de l'annexe. On précisera en particulier le comportement asymptotique de $h(t)$.

C. Dans cette partie on détermine quelques martingales simples associées à la chaîne X. La première question permet d'assurer les conditions d'intégrabilité.

1. On souhaite établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X_t)^k \in \mathbb{L}^1$
   (a) Montrer que

   $$\mathbb{P}_1(X_t \geq N) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i \geq t\right),$$

où les $(\mathbf{e}_i, i \geq 1)$ sont indépendantes, $\mathbf{e}_i \sim \exp(i)$.
En déduire que pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{P}(X_t \geq N) \leq \exp(-st) \prod_{i=1}^{N-1} \frac{i}{s+i}.$$

(b) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(X_t \geq N) \leq \frac{(k+1)!}{N^{k+1}}$ et conclure.

2. Montrer que $QId = (2p-1)Id$. En déduire (à l'aide de la partie A) que $(X_t \exp((1-2p)t)), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.
3. Soit $f(t,x) = x^2\phi(t) + x\psi(t)$. Montrer que

$$Qf(t,x) = x(2(2p-1)x+1)\phi(t) + x(2p-1)\psi(t).$$

Déduire de la partie A que si $p \neq 1/2$, $\Big((X_t^2 + \frac{1}{2p-1}X_t)\exp(-2(2p-1)t, t \geq 0\Big)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

4. Déduire $\mathbb{E}_1[X_t^2]$ lorsque $p \neq 1/2$.

D. Le but de cette partie est le calcul de la transformée de Laplace de X, i.e. pour $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ et $T \geq 0$, on cherche à exprimer $\mathbb{E}_k[\exp(-\lambda X_T)]$.
Pour ce faire on détermine une famille de martingales associées à X.

1. Soit $\lambda > 0$ A l'aide de la partie A, établir que si ϕ_λ est solution de

$$(E_2) \quad \lambda\phi'_\lambda(t) = p\exp(-\lambda\phi_\lambda(t)) + (1-p)\exp(\lambda\phi_\lambda(t)) - 1,$$

et si $f_\lambda(t,x) = \exp(-\lambda x\phi_\lambda(t))$ alors $(f_\lambda(t,X_t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

2. Soit ψ_λ la solution de (E) telle que $\psi_\lambda(0) = \exp(-\lambda)$. Vérifier à l'aide de l'annexe que ψ_λ est définie et reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Montrer alors, pour $T \geq 0$ fixé, que $\phi_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln(\psi_\lambda(T-t)), t \in [0,T]$ est la solution de (E_2) sur $[0,T]$ vérifiant $\phi_\lambda(T) = 1$. En déduire que

$$\mathbb{E}_1[\exp(-\lambda X_T] = \psi_\lambda(T).$$

3. En considérant séparément les descendances des individus ancestraux, déduire finalement que

$$\mathbb{E}_k[\exp(-\lambda X_T)] = \psi_\lambda(T)^k,$$

où ψ_λ est la solution de (E) telle que $\psi_\lambda(0) = \exp(-\lambda)$.

4. Dans cette question on fixe $p = 3/4$. On pourra utiliser l'annexe.

(a) En considérant $\lambda = \log(2)$, montrer que pour tout $T \geq 0$,

$$\mathbb{E}_1[2^{-X_T}] = \frac{1+\exp(-T/2)}{3+\exp(-T/2)}.$$

(b) En considérant $\lambda = \log(3)$, montrer que $(3^{-X_t}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale

(c) Montrer que pour $T \geq 0$,

$$\mathbb{E}_1[6^{-X_T}] = \frac{5 - 3\exp(-T/2)}{15 - 3\exp(-T/2)}.$$

(d) Exprimer $\mathbb{E}_1[\exp(-\lambda X_T)]$ pour un $\lambda > 0$ quelconque.

Annexe Les énoncés de cette annexe peuvent être simplement admis pour la résolution du problème.

Soit $p \in (0,1)$ fixé. On considère l'équation différentielle (non linéaire) du premier ordre dont l'inconnue est un élément de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, avec $I \subset \mathbb{R}_+$:

$$(E) \quad f'(t) = pf(t)^2 - f(t) + (1-p).$$

D'après Cauchy-Lipschitz, pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale de (E) vérifiant $f(0) = a$.

Notons que l'équation (E) peut être réécrite

$$(E) \quad f'(t) = p\Big(f(t) - 1\Big)\left(f(t) - \frac{1-p}{p}\right).$$

On remarque donc d'ores et déjà que la fonction constante égale à 1, et la fonction constante égale à $\frac{1-p}{p}$ sont solutions de (E).

En revanche, on va voir que si $f(0) \notin \{1, \frac{1-p}{p}\}$, alors sur l'intervalle maximal de définition de la solution, $f(t) \notin \{1, \frac{1-p}{p}\}$. On suppose donc cette condition vérifiée dans la suite.

Notons de plus que si $f(0) < \min(1, \frac{1-p}{p})$, la solution est strictement croissante et définie sur $\mathbb{R}_+$. Si $f(0)$ se situe strictement entre les deux valeurs $\{1, \frac{1-p}{p}\}$, la solution est strictement décroissante et définie sur $\mathbb{R}_+$. Enfin si $f(0) > \max(1, \frac{1-p}{p})$, elle est strictement croissante, et on verra qu'elle n'est définie que sur un intervalle borné.

- On suppose $p > 1/2$, on détaille les solutions dans ce cas. D'après ce qui précède pourvu que $f(0) \notin \{1, \frac{1-p}{p}\}$, et t appartienne à l'intervalle de définition de f,

$$\frac{f'(t)}{(f(t)-1)(f(t) - \frac{1-p}{p})} = p,$$

  et donc

$$\frac{f'(t)}{f(t) - \frac{1-p}{p}} - \frac{f'(t)}{f(t)-1} = 1 - 2p.$$

  On déduit

$$\left| \frac{f(t) - \frac{1-p}{p}}{f(t) - 1} \right| = C \exp(t(1-2p)).$$

  avec $C = \left| \frac{f(0) - \frac{1-p}{p}}{f(0)-1} \right|$. Quitte à poser plutôt $\kappa = \frac{f(0) - \frac{1-p}{p}}{f(0)-1}$, on a

$$\frac{f(t) - \frac{1-p}{p}}{f(t) - 1} = \kappa \exp(t(1-2p)),$$

  et donc

$$f(t) = \frac{(1-p) - \kappa p \exp((1-2p)t)}{p - \kappa p \exp((1-2p)t)}.$$

  Il faut cependant noter que si $f(0) > 1$, $\kappa > 1$ et la solution n'est définie que sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2p-1}\log(\kappa))$. Dans les deux autres cas la solution est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

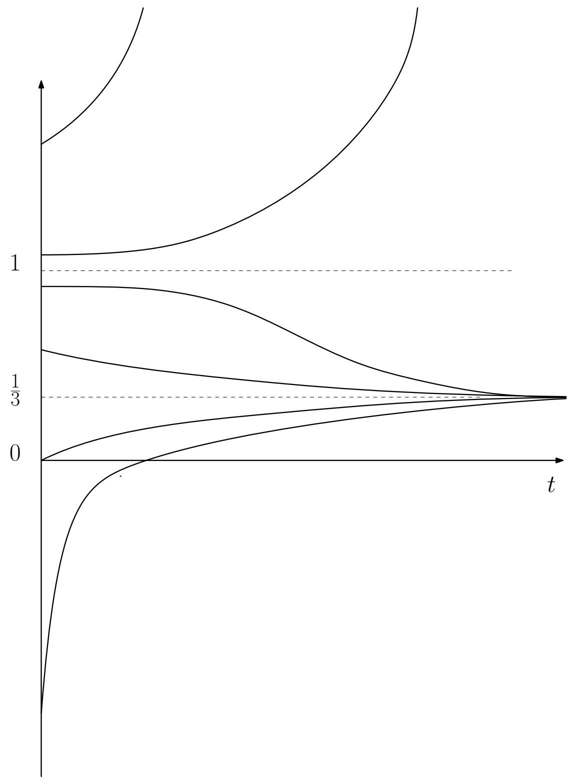

FIGURE 1. Quelques graphes de solutions de l'équation (E), pour $p = 3/4$ et diverses conditions initiales.

- Dans le cas $p < 1/2$, et pourvu que $f(0) \notin \{1, \frac{1-p}{p}\}$ un raisonnement similaire conduit à
$$f(t) = \frac{p - \kappa'(1-p)\exp((2p-1)t)}{p - \kappa' p \exp((2p-1)t)},$$
où $\kappa' = 1/\kappa = \frac{f(0)-1}{f(0)-\frac{1-p}{p}}$. Si $f(0) > \frac{1-p}{p}$, on a $\kappa' > 1$ et la solution n'est définie que sur l'intervalle $[0, \frac{1}{1-2p}\log(\kappa'))$.
Il faut noter qu'on aurait pu écrire $f(t)$ comme dans le cas $p > 1/2$, mais il semble plus clair de faire apparaître des exponentielles décroissantes.
- Enfin si $p = 1/2$, et si $f(0) \neq 1$ on a
$$f(t) = \frac{pt(1-f(0)) + f(0)}{pt(1-f(0)) + 1} = \frac{t(1-f(0)) + 2f(0)}{t(1-f(0)) + 2},$$
en notant que si $f(0) > 1$, la solution n'est définie que sur l'intervalle $[0, \frac{2}{f(0)-1})$.

A. 1. D'après le cours si $g : E \to \mathbb{R}$ est telle que $g(X_t) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $t \geq 0$, on a $\mathbb{E}[g(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] = P(s)g(X_t)$, Il suffit d'appliquer ce résultat à $g(x) := f(t+s, x)$ pour obtenir l'égalité souhaitée.

2. On a défini $\phi(s)=\sum_{y\in E}(P(s))_{xy}\psi(s,y)$. Or $(P(t),t\geq 0)$ est solution de l'équation forward $P'(s)=P(s)Q$, et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}(P(s))_{xy}\psi(s,y) &= (P'(s))_{xy}\psi(s,y)+(P(s))_{xy}\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,y)\\ &= (P(s)Q)_{xy}\psi(s,y)+(P(s))_{xy}\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,y)\end{aligned}$$

Les hypothèses de l'énoncé garantissent que celles du théorème de dérivation sous le signe somme sont vérifiées, et en sommant sur y il vient donc

$$\phi'(s)=P(s)\left[Q\psi(s,x)+\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,x)\right],$$

comme souhaité.

3. En appliquant ce qui précède à $\psi(s,x)=f(t+s,x)$ on trouve que pour tout $x\in E$,

$$\frac{d}{ds}P(s)f(t+s,x)=P(s)\left[Qf(t+s,x)+\frac{\partial f}{\partial s}(t+s,x)\right]$$

Si f vérifie l'équation de l'énoncé, on a donc que pour tout $t\geq 0, x\in E$, la fonction $s\to P(s)f(t+s,x)$ est constante. On déduit que pour tout $\omega, t\geq 0$, $s\to P(s)f(t+s,X_t(\omega))$ est constante. Mais alors
$P(s)f(t+s,X_t)=P(0)f(t,X_t)=f(t,X_t)$, et donc, d'après la question 1, $(f(t,X_t),t\geq 0)$ (qui vérifie, par hypothèse la condition d'intégrabilité) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale .

4. Quitte à poser $f(t,x)=g(x)\exp(-\alpha t)$, les hypothèses d'intégrabilité sont clairement vérifiées et on a

$$Qf(t,x)+\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\alpha f(t,x)-\alpha f(t,x)=0.$$

Il suffit donc d'appliquer la question précédente pour conclure.

B. 1. Lorsque la population est de taille $x\in\mathbb{N}$, la prochaine mort survient au bout d'un temps qui correspond au minimum des temps de mort (exponentiels de paramètre 1 indépendants, p.s. tous distincts) de ces x individus, et donc ce minimum suit une loi exponentielle de paramètre x. On a vérifié que $q_x=x, x\in\mathbb{N}$, et qu'en ce temps, p.s. un unique individu de la population a atteint la fin de sa vie.

Notons que lorsque $k=0$, $q_0=0$, autrement dit, l'état 0 est absorbant.

Lorsque $x\geq 1$, d'après les hypothèses, l'individu qui meurt le premier est remplacé instantanément par deux individus avec proba p (portant alors la taille de la population à $x-1+2=x+1$), ou par 0 avec proba $1-p$ (portant alors la taille de la population à $x-1$). Autrement dit une proportion p de q_x correspond à la transition $x\to x+1$, le reste à la transition $x\to x-1$, i.e.
$q_{x,x+1}=kp, q_{x,x-1}=x(1-p)$.

2. Comme $q_0=0$ on a clairement $Qg(0)=0$. Si $x\in\mathbb{N}^*$,

$$Qg(x)=xpg(x+1)+x(1-p)g(x-1)-xg(x),$$

conduisant à la formule souhaitée.

3. Le noyau Π est tel que $\Pi(0,0) = 1$, et pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $\Pi(x, x+1) = p, \Pi(x, x-1) = 1-p$. Autrement dit Π est le noyau de la marche simple sur $\mathbb{N}$ avec proba p (resp. $1-p$) d'aller vers la droite (resp. vers la gauche) absorbée en 0.

   Les classes de communication sont clairement $\{0\}$ et $\mathbb{N}^*$. La classe $\{0\}$ est absorbante, donc récurrente (positive), la classe $\mathbb{N}^*$ est non fermée ($\Pi(1,0) = 1-p > 0$), donc toujours transiente.

4. (a) Si on part de deux individus ancestraux, alors $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$, où $X_t^{(1)}$ est la taille de la descendance du premier individu ancestral au temps t, et $X_t^{(2)}$ celle du deuxième. Comme les morts et remplacements sont indépendants, $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$ sont i.i.d, et ont même loi que X_t sous $\mathbb{P}_1$. On a montré que la loi de X_t sous $\mathbb{P}_2$ est égale à la somme de deux copies i.i.d de X_t sous $\mathbb{P}_1$. En particulier, la probabilité d'extinction au temps t, sous $\mathbb{P}_2$ correspond à l'événement que les descendances des deux individus ancestraux soient éteintes au temps t :

$$\mathbb{P}_2(X_t = 0) = \mathbb{P}_2(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0) = \mathbb{P}_1(X_t = 0)^2 = h(t)^2.$$

   (b) Sous $\mathbb{P}_1$, $J_1 \sim \exp(1)$. En remarquant que $\{J_1 > t\} \subset \{X_t \neq 0\}$, en décomposant suivant les valeurs de J_1 et en utilisant Markov fort en ce temps, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1(X_t = 0) &= \mathbb{P}(J_1 \leq t, X_t = 0) \\ &= \int_0^t \exp(-s)\left((1-p) + p\mathbb{P}_2(X_{t-s} = 0)\right) ds \\ &= \int_0^t \exp(-s)\left((1-p) + ph(t-s)^2\right) ds\end{aligned}$$

   où on a utilisé la question précédente pour la dernière égalité.

   (c) Quitte à multiplier les deux membres de l'égalité de la question précédente par $\exp(t)$, puis effectuer le changement de variables $u = t-s$ on obtient l'équation

$$h(t)\exp(t) = \int_0^t \exp(u)((1-p) + ph(u)^2)du.$$

   En dérivant il vient

$$h'(t)\exp(t) = \exp(t)((1-p) + ph(t)^2 - h(t))$$

   et en divisant par $\exp(t)$ on obtient l'équation (E).

   (d) Comme $h(0) = 0$, on déduit de l'annexe que
   - si $p > 1/2$,
   $$h(t) = \frac{(1-p)(1-\exp((1-2p)t))}{p-(1-p)\exp((1-2p)t)},$$
   et en particulier $h(t) \to \frac{1-p}{p}$ lorsque $t \to \infty$.
   - si $p = 1/2$, $h(t) = \frac{t}{t+2}$, et en particulier $h(t) \to 1$ lorsque $t \to \infty$.

- si $p < 1/2$,

$$h(t) = \frac{1-\exp((2p-1)t)}{1-\frac{p}{1-p}\exp((2p-1)t)},$$

et $h(t) \to 1$ lorsque $t \to \infty$.

C. 1. (a) La chaîne X n'effectue que des pas de taille 1, donc elle ne peut atteindre N depuis 1 avant d'avoir effectué $N-1$ sauts (autrement dit si Y est la chaîne de sauts associée on a, sous $\mathbb{P}_1$, $Y_{n-1} \leq n$). Lorsque $Y_{n-1} = i$, le n-ième temps d'attente est $S_n \sim \exp(i)$, mais puisque $Y_{n-1} \leq n$, on peut coupler $S_n \sim \exp(i)$ avec une exponentielle $\mathbf{e}_n \sim \exp(n)$ de sorte que $S_n \geq \mathbf{e}_n$ (pour un couplage explicite on peut prendre $U_n \sim \text{Unif}[0,1]$, $S_n = -\frac{1}{Y_{n-1}}\log(U_n)$, avec la convention $S_n = +\infty$ si $Yn-1 = 0$, et $\mathbf{e}_n = -\frac{1}{n}\log(U_n)$). Finalement

$$\mathbb{P}(X_t \geq N) \leq \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{N-1} S_i \geq t) \leq \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i \geq t).$$

Remarque : Une autre manière de décrire ce raisonnement est qu'on couple X et la chaîne $\tilde{X}$ de naissance pure (qui correspond au cas $p = 1$) de sorte que les sauts de $\tilde{X}$ égalent ou précèdent toujours ceux de X, et donc $X_t \leq \tilde{X}_t$ pour tout $t \geq 0$.

Mais alors par Markov (Chernoff), pour $s > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i \geq t\right) &= \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{N-1} \exp(-s\mathbf{e}_i) \leq \exp(-st)\right) \\ &\leq \exp(-st)\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N-1} \exp(-s\mathbf{e}_i)\right] = \exp(-st)\prod_{i=1}^{N} \frac{i}{i+s}.\end{aligned}$$

(b) Quitte à prendre $s = k+1$, on a

$$\prod_{i=1}^{N-1} \frac{i}{i+k+1} \leq \frac{(k+1)!}{N^{k+1}}.$$

Mais alors par Fubini,

$$\mathbb{E}[X_t^k] = \sum_{N \geq 1} \mathbb{P}(X_t \geq N) k N^{k-1} \leq \sum_{N \geq 1} k(k+1)! N^{-2} < \infty.$$

2. On a d'après B.2,

$$QId(x) = x\left[p(x+1) + (1-p)(x-1) - x\right] = x(2p-1),$$

de sorte que $QId = (2p-1)Id$. D'après A.4, on conclut que $(X_t \exp(-(2p-1)t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (les conditions d'intégrabilité suivent immédiatement de la question précédente).

3. Toujours d'après B.2,

$$\begin{aligned} Qf(t,x) &= x\left[pf(t,x+1)+(1-p)f(t,x-1)-f(t,x)\right] \\ &= x\left[(p(x+1)^2+(1-p)(x-1)^2-x^2)\phi(t)+(2p-1)\psi(t)\right] \\ &= x\left[(2(2p-1)x+1)\phi(t)+(2p-1)\psi(t)\right] \end{aligned}$$

   Par ailleurs $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = x^2\phi'(t) + x\psi'(t)$. Donc $Qf(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0$ est satisfaite pour tout (t,x) pourvu que $\phi'(t) = -2(2p-1)\phi(t)$, $\psi'(t) = -\phi(t) - (2p-1)\psi(t)$, On voit aisément que $\phi(t) = \exp(-2(2p-1)t)$ satisfait la première équation, et que $\psi(t) = \frac{1}{2p-1}\exp(-2(2p-1)t)$ satisfait la deuxième. D'après C.1 les conditions d'intégrabilité sont vérifiées, et on conclut au résultat souhaité grâce à A.3.

4. D'après la question précédente, pour $p \neq 1/2$

$$\mathbb{E}_1\left[\left(X_t^2 + \frac{1}{2p-1}X_t\right)\exp(-2(2p-1)t)\right] = 1 + \frac{1}{2p-1} = \frac{2p}{2p-1}.$$

   D'après C.2, $\mathbb{E}[X_t] = \exp((2p-1)t)$, et donc

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \frac{2p}{2p-1}\exp(2(2p-1)t) - \frac{1}{2p-1}\exp((2p-1)t)$$

   Remarque : Pour $p = 1/2$ on trouve que $(X_t, t \geq 0), (X_t^2 - tX_t, t \geq 0)$ sont des martingales, d'où on déduit que $\mathbb{E}_1[X_t^2] = 1 + t$.

D. 1. On a d'après B.2

$$\begin{aligned} Qf_\lambda(t,x) &= x\left[pf_\lambda(t,x+1)+(1-p)f_\lambda(t,x-1)-f_\lambda(t,x)\right] \\ &= xf_\lambda(t,x)\left[p\exp(-\lambda\phi_\lambda(t))+(1-p)\exp(\lambda\phi_\lambda(t))-1\right]. \end{aligned}$$

   et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\lambda x\phi'_\lambda(t)f_\lambda(t,x),$$

   de sorte qu'on a bien $Qf + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ lorsque ϕ_λ satisfait (E_2). Le fait que λ soit > 0 garantit que f_λ est bornée, et la question C.1 permet de garantir, avec $G_T(x) = C_T x$ que $P(s)G_T(x), P(s)QG_T(x)$ restent finis, donc les conditions d'intégrabilité sont satisfaites et on conclut grâce à A.3.

2. Puisque $\lambda > 0$, la condition initiale est strictement comprise entre 0 et 1. D'après l'annexe, la solution est alors définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est monotone et prend ses valeurs dans $(0,1)$.
   Remarquons que $\psi_\lambda(0) = \exp(-\lambda)$ équivaut à $\phi_\lambda(T) = 1$. Et, puisque ψ_λ est solution de (E),

$$\begin{aligned} \lambda\phi'_\lambda(t) &= \frac{\psi'_\lambda(T-t)}{\psi_\lambda(T-t)} \\ &= \frac{1}{\psi_\lambda(T-t)}\left[p\psi_\lambda^2(T-t) - \psi_\lambda(T-t) + (1-p)\right] \\ &= p\psi_\lambda(T-t) - 1 + \frac{1-p}{\psi_\lambda(T-t)} \end{aligned}$$

Mais $\psi_\lambda(T-t) = \exp(-\lambda\phi_\lambda(t))$ et donc

$$\lambda\phi'_\lambda(t) = p\exp(-\lambda\phi_\lambda(t)) - 1 + (1-p)\exp(\lambda\phi_\lambda(t))$$

On conclut que ϕ_λ est la solution de (E_λ) sur $[0,T]$ telle que $\phi_\lambda(T) = 1$.
Notons alors, comme plus haut, $f_\lambda(t,x) = \exp(-\lambda x\phi_\lambda(t))$, de sorte que d'après 1., $(f_\lambda(t,X_t), t \geq 0)$ est une martingale. En particulier $\mathbb{E}_1[f(T,X_T] = f(0,1)$, ce qui s'écrit

$$\mathbb{E}_1[\exp(-\lambda X_T\phi_\lambda(T))] = \exp(-\lambda\phi_\lambda(0)).$$

Comme $\phi_\lambda(T) = 1$, et $\exp(-\lambda\phi_\lambda(0)) = \psi_\lambda(T)$, on a bien

$$\mathbb{E}_1[\exp(-\lambda X_T)] = \psi_\lambda(T),$$

comme souhaité.

3. Comme dans la question 4(a), la loi de X_t sous $\mathbb{P}_k$ est égale à celle de $\sum_{i=1}^k X_t^{(i)}$ où les $X^{(i)}$ sont i.i.d et ont même loi que X sous $\mathbb{P}_1$. Donc d'après la question précédente,

$$\mathbb{E}_k[\exp(-\lambda X_T)] = \mathbb{E}_k\left[\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^k X_T^{(i)}\right)\right] = \psi_\lambda(T)^k.$$

4. Si $p = 3/4 > 1/2$, notons que $(1-p)/p = 1/3$.
   (a) Si $\lambda = \log(2)$, $\exp(-\lambda) = 1/2 > (1-p)/p$ et $\exp(-\lambda X_T) = 2^{-X_T}$. D'après l'annexe, $\kappa = \frac{1/2-1/3}{1/2-1} = -1/3$

   $$\psi_\lambda(T) = \frac{1/4(1-(-1/3)\times(3/4)\times\exp(-T/2))}{3/4-(-1/3)\times(3/4)\times\exp(-T/2))},$$

   conduisant à la formule souhaitée.
   (b) Si $\lambda = \log(3)$, $\exp(-\lambda) = (1-p)/p$ de sorte que ψ_λ est la fonction constante égale à $(1-p)/p = 1/3$. Mais alors ϕ_λ est la fonction constante égale à 1, et $(f(t,X_t) = \exp(-\lambda X_t) = 3^{-X_t}, t \geq 0)$ est une martingale, d'espérance sous $\mathbb{P}_1$ (constante) 1/3.
   (c) Si $\lambda = \log(6)$, $\exp(-\lambda) = 1/6 < (1-p)/p$ et $\exp(-\lambda X_T) = 6^{-X_T}$. D'après l'annexe, on a alors $\kappa = \frac{1/6-1/3}{1/6-1} = \frac{1}{5}$, et alors

   $$\psi_\lambda(T) = \frac{1/4-(1/5)\times(3/4)\times\exp(-T/2)}{3/4-(1/5)\times(3/4)\times\exp(-T/2)},$$

   conduisant à la formule de l'énoncé.
   (d) Pour $\lambda \in 0$ quelconque, quitte à poser

   $$\kappa_\lambda = \frac{\exp(-\lambda)-\frac{1}{3}}{\exp(-\lambda)-1}$$

   $$\mathbb{E}[\exp(-\lambda X_T)] = \psi_\lambda(T) = \frac{1-3\kappa_\lambda\exp(-T/2)}{3-3\kappa_\lambda\exp(-T/2)},$$

   ou encore

   $$\mathbb{E}[\exp(-\lambda X_T)] = \frac{1-\exp(-\lambda)-\exp(-T/2)(1-3\exp(-\lambda))}{3(1-\exp(-\lambda))-\exp(-T/2)(1-3\exp(-\lambda))}.$$