Feuille 7 Séance 15/11.

Exo 3 Rappel $(E_x(b,\sigma))$:

$$\forall t \geq 0 \quad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b(X_s)\,ds$$

(H : b, σ globalement Lipschitz)

X l'unique solution de $E_x(b,\sigma)$
Y ——— de $E_y(b,\sigma)$ avec H $x < y$

$$U_t = \int_0^t \frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s - Y_s} \mathbb{1}_{\{X_s \neq Y_s\}}\,dB_r + \int_0^t \frac{b(X_s)-b(Y_s)}{X_s - Y_s} \mathbb{1}_{\{X_s \neq Y_s\}}\,ds$$

On a vu (1) U bien défini

(2) $X_t - Y_t \overset{*}{=} (x-y) \exp\left[U_t - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s - Y_s}\right)^2 \mathbb{1}_{\{X_s \neq Y_s\}}\,ds\right]$

on a montré $*$ en vérifiant que les 2 processus étaient solutions de $dL_t = L_t\,dU_t$, $L_0 = x-y$

qui possède une unique solution forte.

(3) immédiat grâce au fait que $\exp(\cdots) > 0$ p.s. $\forall t \geq 0$.

et donc $\mathrm{sgn}(X_t - Y_t) = \mathrm{sgn}(x-y)$ $\forall t \geq 0$ p.s,

$\left(\text{avec } \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \right)$

(4) H $\exists\, y_1 < y_2$ avec $\sigma(y_1) = \sigma(y_2) = 0$, $\sigma(y) > 0$ $\forall y \in]y_1, y_2[$; $b(y) = 0$ $\forall y \in [y_1, y_2]$

Rque 1 : $Y_t^1 \equiv y_1$ $\forall t \geq 0$ est la solution de $E_{y_1}(b,\sigma)$
$Y_t^2 = y_2$ $\forall t \geq 0$ ——— $E_{y_2}(b,\sigma)$.

donc d'après (3) si X est solution de $E_x(b,\sigma)$ avec $x \in]y_1, y_2[$

alors $Y_t^1 < X_t < Y_t^2$ $\forall t \geq 0$, p.s.

$\varphi(X_t) = (X_t - y_1)(y_2 - X_t)$, $dX_t = \sigma(X_t)\,dB_t$ cf $b(X_t) = 0$ $\forall t \geq 0$.

Itô : $d\varphi(X_t) = \underbrace{\sigma(X_t)\left[y_1 + y_2 - 2X_t\right]}_{()_t \in M^2 \text{ car } X \text{ reste ds le compact } [y_1,y_2], \text{ et } \sigma \text{ est } C^0}\,dB_t - \sigma^2(X_t)\,dt$

Donc $\int_0^t \sigma(X_s)(y_1+y_2-2X_s)\,dB_s$ est une (vraie) martingale

et on obtient $\mathbb{E}_x[\varphi(X_t)] = \varphi(x) - \mathbb{E}_x\left[\int_0^t \sigma^2(X_s)\,ds\right]$.

donc $\mathbb{E}_x[\varphi(X_t)]$ est $\searrow$, et ≥ 0 car $\varphi(X_t) > 0$ $\forall t \geq 0$ p.s.

Cl $\left(\mathbb{E}_x(\varphi(X_t))\right)_{t\geq 0}$ converge.

(4) $\sigma^2(\cdot)$ est minorée par $c_\varepsilon > 0$ sur $[y_1+\varepsilon, y_2-\varepsilon]$

et est majorée par C sur $[y_1, y_2]$.

Le fait que σ soit majorée garantit que X met un certain tps, en partant de $x_0 \in [y_1+2\varepsilon, y_2-2\varepsilon]$

à atteindre $[y_1, y_1+\varepsilon] \cup [y_2-\varepsilon, y_2]$ (disons en τ_ε)

Preuve : $\left((X_t - x_0)^2 - \int_0^t \sigma^2(X_s)\,ds\right)_{t\geq 0}$ est une mart

ce qui entraîne

$$\forall x_0 \in [y_1+2\varepsilon, y_2-2\varepsilon] \quad \mathbb{E}_{x_0}(\tau_\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^2}{C} > 0$$

on a donc (e.g.) $\inf_{x_0 \in [y_1+2\varepsilon, y_2-2\varepsilon]} \mathbb{P}_{x_0}\left(X_u \in (y_1+\varepsilon, y_2-\varepsilon) \ \forall u \leq \varepsilon^4\right) =: \delta(\varepsilon) > 0$.

Supposons alors par l'absurde qu'il existe, pour X issu de x une suite de tps (p.ê aléatoires) $(\tau_n)_{n\geq 0}$

avec
- $\tau_n \leq \tau_{n+1} - \varepsilon^4$
- $X_{\tau_n} \in [y_1+2\varepsilon, y_2-2\varepsilon]$

Alors $\mathbb{E}_x\left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+\varepsilon^4} \sigma^2(X_s)\,ds\right] \geq c_\varepsilon \delta(\varepsilon)\varepsilon^4 = \delta'(\varepsilon) > 0$

et donc $\mathbb{E}_x\left[\int_0^t \sigma^2(X_s)\,ds\right]$ diverge lorsque $t \to \infty$.

Impossible d'après (3).

Cl : $X_\infty \in \{y_1, y_2\}$ et $\hat{c}$ X_t martingale, $\mathbb{P}_x(X_\infty = y_1) = \frac{y_2 - x}{y_2 - y_1}$ $\mathbb{P}_x(X_\infty = y_2) = \frac{x - y_1}{y_2 - y_1}$.

Exo 8 : $R_t = a + \int_0^t \frac{\alpha}{2R_s}\, ds + B_t$ $\quad \big(E_a(\alpha)\big)$

(1) $v_t = \sum_{i=1}^n (B_t^i)^2 \qquad r_t = \sqrt{v_t}$.

$db_t = \underbrace{\frac{1}{r_t} B_t}_{\text{bornée donc } \in M^2} \cdot dB_t \qquad (b_t)_{t\geq 0}$ martingale C^0

$d\langle b\rangle_t = \frac{1}{r_t^2}\left(\sum_{i=1}^n (B_t^i)^2\right) dt = dt$.

d'après Lévy, $(b_t)_{t\geq 0}$ est un MB unidimensionel.

$dv_t \overset{(\text{Itô})}{=} 2\sum_{i=1}^n B_t^i\, dB_t^i + n\, dt = 2 r_t\, db_t + n\, dt$
$= 2\sqrt{v_t}\, db_t + n\, dt$

$dr_t = d\sqrt{v_t} \overset{(\text{Itô})}{=} \frac{1}{2\sqrt{v_t}} dv_t - \frac{1}{8\sqrt{v_t^3}} d\langle v\rangle_t$

$= \frac{1}{2r_t}\left[2\sqrt{v_t}\, db_t + n\, dt\right] - \frac{1}{8 r_t^3} 4 . r_t^2\, dt$

$= db_t + \frac{n-1}{2r_t} dt$

i.e $(r_t)_{t\geq 0}$ est solution de $E_x(n-1)$.

(2) $\zeta = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$, X_t solution de $E_a(\alpha)$

(pour $t < \zeta$ pour qu'on puisse déf $X_t^{-\alpha}, X_t^{-\alpha-1}$) : $d(X_t^{1-\alpha}) = (1-\alpha) X_t^{-\alpha} dX_t + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2} X_t^{-\alpha-1} d\langle X\rangle_t$

$= (1-\alpha) X_t^{-\alpha} dB_t + \frac{(1-\alpha)\alpha}{2\cancel{X_t}} \cancel{X_t^{-\alpha}} dt - \frac{(1-\alpha)\alpha}{\cancel{2}} \cancel{X_t^{-\alpha-1}} dt$

et donc $(X_{t\wedge\zeta}^{1-\alpha})_{t\geq 0}$ est une martingale locale

si on l'arrête en τ_ε elle est bornée, donc c'est une vraie martingale UI.

$\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}_a\left[X_{t\wedge\tau_\varepsilon}^{1-\alpha}\right] = a^{1-\alpha}$ donc $\underset{a^{1-\alpha}}{\underset{\|}{\mathbb{E}_a(X_{t\wedge\tau_\varepsilon}^{1-\alpha})}} \geq \varepsilon^{1-\alpha} \underbrace{\mathbb{P}_a(\tau_\varepsilon \leq t)}_{\nearrow \mathbb{P}_a(\tau_\varepsilon < \infty)}$

<u>cl</u> : $\mathbb{P}_a(\tau_\varepsilon < \infty) \leq \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{\alpha-1}$

donc si $\alpha > 1$ $\quad \zeta = \infty$ p.s. (le proc. n'atteint jamais 0, p.s.)

Note si $\alpha = 1$ $\quad X_t$ est $\|B_t\|$ où B est de dimension 2 | Cas critique
et $\mathbb{P}(\tau_\varepsilon < \infty) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$!
mais $\zeta = \infty$ p.s

(3) $\exists!$ solution forte de l'EDS
les 2 solutions coïncident jusqu'à ρ^ε, et ensuite ne bougent plus !

(4) enfin $\zeta^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$ p.s d'après (2)
et les solutions coïncident jusque là

∘ Précisément, si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ $\quad U^{\varepsilon_1}$ et U^{ε_2} coïncident jusqu'à ζ^{ε_1}

• $\zeta^\varepsilon \searrow$ avec ε

donc $R_t = \lim_{\varepsilon \to 0} U_t^\varepsilon$ est bien définie $\forall t \geq 0$.
et est solution de $E_\alpha(\alpha)$.

Exo 7 : (1) $dX_t = -\frac{1}{2} X_s ds - Y_s dB_s$
$dY_t = -\frac{1}{2} Y_s ds + X_s dB_s$

i.e. $d\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} dB_t + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} dt$

et on est bien ss les hyp du thm d'$\exists!$

(2) $d(X_t^2 + Y_t^2) = 2X_t dX_t + 2Y_t dY_t + d\langle X \rangle_t + d\langle Y \rangle_t$
$= -X_t^2 dt - Y_t^2 dt + Y_t^2 dt + X_t^2 dt = 0.$
i.e $X_t^2 + Y_t^2 = x_0^2 + y_0^2 = 1$ par hyp.

(3) $dX_t = d\cos(\theta_t) = -Y_t \, d\theta_t - \frac{1}{2} X_t \, dt$
$dY_t = d\sin(\theta_t) = X_t \, d\theta_t - \frac{1}{2} Y_t \, dt$

d'où $d\theta_t = dB_t \quad \theta_0 = 0$
et donc $\theta_t = B_t$.

Pb 2011 1. a) L'équation est de la forme $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$

avec $\sigma(t,x) = 1 \quad \forall (t,x)$

$b(t,x) = -a(t)x$

Puisque $a(\cdot)$ est C^0 et que $\lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha$

$\exists M = \sup_{t\geq 0} |a(t)|$.

et donc $|b(t,x) - b(t,y)| \leq M|x-y|$.

Donc $b(\cdot,\cdot)$ et $\sigma(\cdot,\cdot)$ sont globalement Lipschitz $/_1$ 2^e var. et on conclut d'après le thm d'$\exists !$ que :

il existe une unique solution forte de l'équation
$X_0 = x_0 \quad dX_t = dB_t - a(t)X_t\,dt$

Lorsque $a(t) = \alpha \quad \forall t\geq 0$ on reconnaît Ornstein-Uhlenbeck.

b) $d(e^{A(t)}X_t) = \cancel{a(t)e^{A(t)}X_t\,dt} + e^{A(t)}dB_t - \cancel{a(t)X_te^{A(t)}dt}$

i.e $e^{A(t)}X_t = x_0 + \int_0^t e^{A(s)}dB_s$.

$X_t = x_0 e^{-A(t)} + \int_0^t e^{A(s)-A(t)}dB_s$

- Par ailleurs, $e^{A(s)-A(t)}X_s + \int_s^t e^{A(r)-A(t)}dB_r$

$= e^{A(s)-A(t)}\left[x_0e^{-A(s)} + \int_0^s e^{A(r)-A(s)}dB_r\right] + \int_s^t e^{A(r)-A(t)}dB_r$

$= X_t$.

- ou (+ simple) $e^{A(t)}X_t = e^{A(s)}X_s + \int_s^t e^{A(r)}dB_r$. $\left(\text{car } d e^{A(t)}X_t = e^{A(t)}dB_t\right)$

d'où l'expression de X_t.

c) $\left(e^{A(s)-A(t)}\right)_{0\leq s\leq t}$ est déterministe.

D'après la déf de l'intégrale de Wiener, $(X_t)_{t\geq 0}$ est donc un proc. gaussien.

$$m(t) = e^{-A(t)} x_0 \,,\quad \Gamma(t,t) = \int_0^t e^{2(A(s)-A(t))}\, ds \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{prop.}\\ \text{isométrie}\end{smallmatrix}\right)$$

Pour $s \le t$: $\Gamma(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t) \overset{(b)}{=} e^{A(s)-A(t)}\,\Gamma(s,s)$

$$= e^{A(s)-A(t)} \int_0^s e^{2(A(r)-A(s))}\, dr$$

d'où $\Gamma(s,t) = \int_0^{s\wedge t} e^{2A(r) - A(s) - A(t)}\, dr$

Notons que $A(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \alpha t$ avec $\alpha > 0$ donc $e^{-A(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

i.e $m(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

D'autre part, $\int_0^{t/2} e^{2(A(s)-A(t))}\, ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

et donc $\int_0^t e^{2(A(s)-A(t))}\, ds \underset{t\to\infty}{\sim} \int_0^t e^{2\alpha(t-s)} ds$

$$\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\alpha}.$$

(2.)(a) $M_t(s) = \mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s]$

f étant bornée, $f(X_t) \in \mathbb{L}^2$

et donc on a affaire à une martingale fermée, UI.

$$M_t(0) = \mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

car $\mathcal{F}_0$ est triviale

(b) $P_{s,t}(g)(x) = E\left[g\left(e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right]$

où $K(s,t) = \int_s^t e^{2(A(r)-A(t))}\, dr.$

$$M_t(s) = \mathbb{E}\Big[f\Big(\underbrace{e^{-A(t)}x_0 + \int_0^s e^{A(r)-A(t)} dB_r}_{=:\,Y_s,\ \mathcal{F}_s\text{-}(m)} + \underbrace{\int_s^t e^{A(r)-A(t)} dB_r}_{\perp\!\!\!\perp\, \mathcal{F}_s}\Big) \Big| \mathcal{F}_s\Big]$$

$$= \varphi(Y_s) \quad \text{où } \varphi(y) = \mathbb{E}\Big[f\Big(y + \underbrace{\int_s^t e^{A(r)-A(t)} dB_r}_{\overset{(\text{loi})}{=}\, K(s,t)^{1/2}\xi}\Big)\Big]$$

Or $Y_s = e^{A(s)-A(t)} X_s$ d'où $\varphi(Y_s) = \varphi\left(e^{A(s)-A(t)} X_s\right).$

Mais $\varphi\left(e^{A(s)-A(t)}y\right) = E\left[f\left(e^{A(s)-A(t)}y + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right]$

$$= P_{s,t}(f)(y)$$

Finalement $M_t(s) = P_{s,t}(f)(X_s)$.

(3) $d_s M_t(s) = d_s\left(P_{s,t}(f)(X_s)\right)$

on est dans la situation suivante :

$$u(s,x) = P_{s,t}(f)(x)$$

et on cherche $d_s u(s,X_s)$

Par Itô $d_s u(s,X_s) = \frac{\partial u}{\partial s}(s,X_s)\,ds + \frac{\partial u}{\partial x}(s,X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,X_s)\,d\langle X\rangle_s$

Or • $\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) = x a(s)\, e^{A(s)-A(t)}\, E\left[f'\left(e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right]$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial K(s,t)}{\partial s}\frac{1}{K(s,t)^{1/2}}\, E\left[f'\left(e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right]$$

i.e $\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) = \left(x a(s)\, e^{A(s)-A(t)} - \frac{1}{2}\frac{e^{2(A(s)-A(t))}}{K(s,t)^{1/2}}\right) E\left[f'\left(e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right]$

• $\frac{\partial u}{\partial x}(s,x) = e^{A(s)-A(t)}\, E\left[f'\left(e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right]$

• $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x) = e^{2(A(s)-A(t))}\, E\left[f''\left[e^{A(s)-A(t)}x + K(s,t)^{1/2}\xi\right]\right]$.

Rque : en fait comme $(M_t(s))_{0\leq s\leq t}$ est une martingale, on doit obtenir que tous les termes en ds disparaissent, i.e. $d_s(M_t(s)) = \frac{\partial u}{\partial x}(s,X_s)\,dB_s$.

mais on va le vérifier par le calcul.

On obtient donc

$$d_s M_t(s) = e^{A(s)-A(t)}\, E\left(f'\left(e^{A(s)-A(t)} X_s + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right) dB_s$$

$$\cancel{- a(s) X_s e^{A(s)-A(t)} E\left(f'(\dots)\right) ds}$$

$$\cancel{+ a(s) X_s e^{A(s)-A(t)} E\left(f'(\dots)\right) ds}$$

$$- \frac{1}{2}\, \frac{e^{2(A(s)-A(t))}}{K(s,t)^{1/2}}\, E\left(\xi f'(\dots)\right) ds$$

$$+ \frac{1}{2}\, e^{2A(s)-A(t)}\, E\left(f''(\dots)\right) ds$$

Or $E(h'(\xi)) = E(\xi h(\xi))$. $\qquad h(\xi) = v'(\sigma\xi)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h'(\xi) = \sigma v''(\sigma\xi)$.

donc $E(\sigma v''(\sigma\xi)) = E(\xi v'(\sigma\xi))$

$$E(v''(\sigma\xi)) = \frac{1}{\sigma} E(\xi v'(\sigma\xi))$$

donc les 2 derniers termes de la somme ci-dessus se compensent et on trouve :

$$d_s M_t(s) = \underbrace{\overbrace{e^{A(s)-A(t)}}^{\text{borné}}\, \overbrace{E\left(f'\left(e^{A(s)-A(t)} X_s + K(s,t)^{1/2}\xi\right)\right)}^{\text{borné}}}_{\in M^2} dB_s.$$

d'où $M_t(t) = f(X_t) = \underbrace{M_t(0)}_{E[f(X_t)]} + \int_0^t d_s M_t(s)$ $\square$.

4. d'après 3:

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t E[f(X_s)]\,ds + \frac{1}{t}\int_0^t ds \int_0^s e^{A(r)-A(s)} P_{r,s}(f')(X_r)\,dB_r$$

Note : Fubini évident pour H en escalier puis densité.

et on conclut grâce au thm de Fubini pour $\iint H_{s,r}\,ds\,dB_r$ car f' bornée

Notons $H_r = \int_r^t e^{A(r)-A(s)} P_{r,s}(f')(X_r)\,ds$

H_r est prog(m), et borné car $e^{A(r)-A(s)}$ reste borné

cf $A(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \alpha x$

et $\|P_{r,s}(f')\|_\infty \leq K$

donc $\int_0^t H_r\,dB_r$ est une martingale de carré intégrable.

De plus $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_r\,dB_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_r^2\,dr\right] \leq \int_0^t M^2\,ds = M^2 t$

donc $\mathbb{E}\left[\frac{1}{t^2}\left(\int_0^t H_r\,dB_r\right)^2\right] \leq \frac{K}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

i.e $\int_0^t H_r\,dB_r \xrightarrow[t\to\infty]{\mathbb{L}^2} 0$

On a donc $\forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 bornée ainsi que ses dérivées,

Sous réserve d'$\exists$, $\lim\limits_{t\to\infty}^{\mathbb{L}^2} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds = \lim\limits_{t\to\infty}^{\mathbb{L}^2} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}[f(X_s)]\,ds$

Cette dernière limite existe puisque c'est $\lim\limits_{t\to\infty}^{\mathbb{L}^2} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t f\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\xi\right)ds\right]$.

et on conclut

Enfin si $g \in C_b(\mathbb{R})$ $\exists\, (f_n) \in C_b^2$ $f_n \to g$ unif sur tt compact.

et alors $\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{t}\int_0^t (f_n - g)(X_s)\,ds\right)^2\right]$

$\leq \varepsilon^2 + \mathbb{E}\left[\left(\frac{K}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \notin C\}}\,ds\right)^2\right] \leq 2\varepsilon$

cf $\mathbb{P}(X_s \notin C) \leq 2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,\frac{1}{2\alpha}) \notin C)$

et $\mathbb{P}(X_s \notin C, X_{s'} \notin C) \leq \mathbb{P}(X_s \notin C)$ pourvu que s suff gd ($\geq s_0$)