M2 probabilités et applications, 2023-2024
Calcul stochastique et processus de diffusion
Examen de janvier 2024

Calculettes et téléphones interdits.
Documents autorisés : une copie double manuscrite.
Durée 3 heures.

Question de cours. Soit $b > a > 0$, $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale et H une variable aléatoire $\mathcal{F}_a$-mesurable **bornée**. Montrer que $N_t = H(M_{t\wedge b} - M_{t\wedge a})$ est une martingale locale. *On pourra commencer par le cas où $(M_t)_{t\geq 0}$ est une vraie martingale.*

Exercice 1. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de 0, et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien indépendant de $(M_t)_{t\geq 0}$. On suppose que $\langle M\rangle_t = \int_0^t A_s \mathrm{d}s$, où $A_t \geq 0$ est progressivement mesurable. Montrer que

$$B_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{A_s>0\}} \frac{\mathrm{d}M_s}{\sqrt{A_s}} + \int_0^t \mathbf{1}_{\{A_s=0\}} \mathrm{d}W_s$$

est bien défini, et que c'est un mouvement brownien.

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^1, B_t^2)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension 2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^2 vérifiant (on note $F(x) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) = -\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, F peut être vue comme holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $X_t^1 = F_1(B_t)$ et $X_t^2 = F_2(B_t)$ sont deux martingales locales, que $\langle X^1, X^2\rangle = 0$ et que $\langle X^1\rangle = \langle X^2\rangle$.

Exercice 3. On a montré l'inégalité de BDG quand $p \geq 2$: il existe des constantes $C_p, C_p' > 0$ telles que pour tout martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$, tout temps d'arrêt τ, en notant $M_t^* = \sup_{[0,t]} |M_s|$,

$$(*) \qquad \mathbb{E}[(M_\tau^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M\rangle_\tau^{p/2}] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[\langle M\rangle_\tau^{p/2}] \leq C_p' \mathbb{E}[(M_\tau^*)^p].$$

On désire montrer que c'est encore vrai si $p \in]0, 2[$.

(a) Soient $(A_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ deux processus croissants (continus, adaptés, issus de 0) tels que $\mathbb{E}[A_\sigma] \leq \mathbb{E}[B_\sigma]$ pour tout temps d'arrêt σ. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(A_\infty > x, B_\infty \leq x) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[B_\infty \wedge x].$$

On pourra introduire $\rho = \inf\{t > 0 : A_t > x\}$ et $\tau = \inf\{t > 0 : B_t > x\}$.

(b) Sous les hypothèses du (a), montrer que pour tout $q \in]0, 1[$, $\mathbb{E}[A_\infty^q] \leq \frac{2-q}{1-q}\mathbb{E}[B_\infty^q]$.
Noter que $\mathbb{E}[A_\infty^q] = q \int_0^\infty \mathbb{P}(A_\infty > x) x^{q-1} \mathrm{d}x$.

(c) Soit $p \in]0, 2[$. Trouver une constante C_p telle que pour toute martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$,

$$\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{p/2}].$$

On utilisera (b) avec $q = p/2$, $A_t = (M_t^*)^2$ et $B_t = C_2\langle M\rangle_t$, en justifiant à l'aide de $(*)$ (cas $p = 2$),

(d) Soit $p \in]0, 2[$. Trouver une constante C_p' telle que pour toute martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$,

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{p/2}] \leq C_p' \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p].$$

Exercice 4. Soient $d \geq 2$ et $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mesurable et bornée, soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathbb{R}_+$. Montrer que l'E.D.S. d-dimensionnelle (avec $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension d issu de 0)

$$X_t = x_0 + B_t + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s, \qquad \text{i.e} \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\}, \quad X_t^i = x_0^i + B_t^i + \int_0^t b_i(X_s)\mathrm{d}s.$$

admet une solution (faible) sur $[0, T]$. *On pourra partir d'un mouvement brownien $(X_t)_{t\geq 0}$ de dimension d issu de x_0 et utiliser le théorème de Girsanov avec $L_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t b_i(X_s)\mathrm{d}X_s^i$.*

Problème. Soient $\sigma, b, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes et bornées : il existe $L > 0$ tel que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)| + |b(x)| + |F(x)| \le L \qquad \text{et} \qquad |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| + |F(x) - F(y)| \le L|x - y|.$$

A. Soit $(B_t)_{t\ge 0}$ un mouvement brownien et $x_0 \in \mathbb{R}$. On fixe $T > 0$. On considère l'EDS *non-linéaire*

$$(EDSNL) \qquad \bar{X}_t = x_0 + \int_0^t \sigma(\bar{X}_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(\bar{X}_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbb{E}[F(\bar{X}_s)]\mathrm{d}s.$$

Une solution $(\bar{X}_t)_{t\ge 0}$ doit être bien sûr être continue et adaptée.

(a) Montrer que $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} \bar{X}_t^2] < \infty$ pour toute solution $\bar{X}$, tout $T > 0$.

(b) Montrer l'unicité trajectorielle.
Pour deux solutions $\bar{X}, \tilde{X}$, majorer $\mathbb{E}[(\bar{X}_t - \tilde{X}_t)^2]$ et invoquer Gronwall en justifiant bien.

On admet, cf partie **E**, qu'il existe une solution forte $(\bar{X}_t)_{t\ge 0}$ à $(EDSNL)$. On rappelle que l'unicité trajectorielle implique l'unicité en loi.

B. Soit $N \ge 2$ et $(B_t^1)_{t\ge 0}, \dots, (B_t^N)_{t\ge 0}$ des browniens indépendants. On considère le système

$$(SP) \qquad X_t^{N,i} = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s^{N,i})\mathrm{d}B_s^i + \int_0^t b(X_s^{N,i})\mathrm{d}s + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^t F(X_s^{N,j})\mathrm{d}s, \qquad i = 1, \dots, N.$$

(a) Montrer qu'il existe une solution forte $(X_t^N)_{t\ge 0} = (X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,N})_{t\ge 0}$ et qu'il y a unicité trajectorielle pour (SP).
C'est une EDS de dimension N dont on précisera bien les coefficients.

(b) Montrer que $(X_t^N)_{t\ge 0}$ est *échangeable*, i.e. que pour toute permutation θ de $\{1, \dots, N\}$, les processus $(X_t^{N,\theta_1}, \dots, X_t^{N,\theta_N})_{t\ge 0}$ et $(X_t^N)_{t\ge 0}$ ont la même loi.
Utiliser l'unicité en loi pour (SP).

C. On considère, pour chaque $i = 1, \dots, N$, l'unique solution forte $(\bar{X}_t^i)_{t\ge 0}$ à $(EDSNL)$ dirigée par le mouvement brownien B^i.

(a) Montrer que pour tout $t \ge 0$, les v.a. $\bar{X}_t^1, \dots, \bar{X}_t^N$ sont i.i.d.

(b) En déduire que pour tout $t \ge 0$, tout $N \ge 2$,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(\bar{X}_t^j) - \mathbb{E}[F(\bar{X}_t^1)]\Big)^2\Big] \le \frac{L^2}{N}.$$

(c) Montrer que $((X_t^{N,\theta_1}, \bar{X}_t^{\theta_1}), \dots, (X_t^{N,\theta_N}, \bar{X}_t^{\theta_N}))_{t\ge 0}$ et $((X_t^{N,1}, \bar{X}_t^1), \dots, (X_t^{N,N}, \bar{X}_t^N))_{t\ge 0}$ ont même loi, pour toute permutation θ de $\{1, \dots, N\}$.
En déduire que pour tout $t \ge 0$, tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $(X_t^{N,i}, \bar{X}_t^i)$ a même loi que $(X_t^{N,1}, \bar{X}_t^1)$.

(d) Montrer que pour tout $t \ge 0$, tout $N \ge 2$,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(X_t^{N,j}) - \mathbb{E}[F(\bar{X}_t^1)]\Big)^2\Big] \le 2L^2\mathbb{E}[|X_t^{N,1} - \bar{X}_t^1|^2] + \frac{2L^2}{N}.$$

(e) Montrer que pour tout $T > 0$, il existe une constante C_T (ne dépendant pas de N) telle que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big[|X_t^{N,1} - \bar{X}_t^1|^2\Big] \le \frac{C_T}{N}.$$

On s'autorisera à utiliser Gronwall sans justifier que la fonction est bornée.

D. Pour $N \ge 0$ et $t \ge 0$, on pose $\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{N,i}}$, où δ_x est la masse de Dirac en x. Montrer que μ_t^N converge vers la loi de $\bar{X}_t$, au sens où pour tout $t \ge 0$, toute $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mu_t^N(\mathrm{d}x) - \mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_t)]\Big|\Big] = 0.$$

E. Montrer l'existence d'une solution forte $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T]}$ à $(EDSNL)$ sur $[0, T]$, en utilisant par exemple une itération de Picard.