M2 probabilités et applications, 2024-2025
Calcul stochastique et processus de diffusion
Examen du 22 janvier 2025

Calculettes et téléphones interdits.
Documents autorisés : une copie double manuscrite.
Durée 3 heures.

Question de cours. Soit $b > a > 0$, M une martingale locale et H une v.a. $\mathcal{F}_a$-mesurable **bornée**. Montrer que $N_t = H(M_{t\wedge b} - M_{t\wedge a})$ est une martingale locale. *On pourra commencer par le cas où M est une vraie martingale.*

Exercice 1. Soit M une martingale locale issue de 0 telle que $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s. Montrer que $\sigma_x = \inf\{t \geq 0 : M_t = x\}$ est fini p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\mathbb{P}(\sigma_a < \sigma_b) = \frac{b}{b-a}$ pour $a < 0 < b$.

Exercice 2. Soit $B = (B^1, \dots, B^d)$ un mouvement brownien de dimension $d \geq 2$ issu de $x_0 \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. On sait que p.s., pour tout $t \geq 0$, $B_t \neq 0$. On pose $X_t = ||B_t||^2$ et $R_t = ||B_t||$. Montrer qu'il existe un mouvement brownien β de dimension 1 tel que

$$X_t = ||x_0||^2 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}\beta_s + dt \quad \text{et} \quad R_t = ||x_0|| + \beta_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{R_s}.$$

Exercice 3. Soit $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mesurable et bornée, soient $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $T \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que l'E.D.S. bidimensionnelle (avec B un mouvement brownien de dimension 2 issu de 0)

$$X_t = x_0 + B_t + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

admet une solution (faible) sur $[0, T]$. *On pourra partir d'un mouvement brownien $X = (X^1, X^2)$ de dimension 2 issu de x_0, introduire la martingale $L_t = \int_0^t b_1(X_s)\mathrm{d}X_s^1 + \int_0^t b_2(X_s)\mathrm{d}X_s^2$ et utiliser le théorème de Girsanov pour montrer soigneusement que sous une certaine probabilité, $X_t - x_0 - \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$ est un mouvement brownien de dimension 2.*

(b) Montrer que si $x_0 \neq 0$, cette solution ne touche p.s. pas 0. *On rappelle qu'un mouvement brownien de dimension 2 non issu de 0 ne touche p.s. jamais 0.*

Exercice 4. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un brownien de dimension 1 issu de 0. Pour $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sg}(y) = \mathbf{1}_{\{y>0\}} - \mathbf{1}_{\{y<0\}}$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi_\varepsilon(y) = \sqrt{\varepsilon^2 + y^2}$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\varepsilon(B_t - x) = \varphi_\varepsilon(x) + M_t^{x,\varepsilon} + L_t^{x,\varepsilon},$$

où $(M_t^{x,\varepsilon})_{t\geq 0}$ est une martingale et $(L_t^{x,\varepsilon})_{t\geq 0}$ est un processus croissant, continu, adapté.

(b) Soit $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{[0,T]} |\varphi_\varepsilon(B_t - x) - |B_t - x|| \to 0$ p.s. *Rappelons que si $a, b \geq 0$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.*

(c) Soit $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{[0,T]} |M_t^{x,\varepsilon} - \int_0^t \mathrm{sg}(B_s - x)\mathrm{d}B_s| \to 0$ dans L^2.

(d) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $L_t^x = |B_t - x| - |x| - \int_0^t \mathrm{sg}(B_s - x)\mathrm{d}B_s$ est croissant, continu, adapté.

Les questions (e), (f) et (g) sont indépendantes.

(e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $t \geq 0$, $\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s\neq x\}}\mathrm{d}L_s^x = 0$ p.s. *On pourra utiliser pour calculer $(B_t - x)^2$ et $|B_t - x|^2$.*

(f) Montrer que pour tout $x > 0$, tout $t \geq 0$, $\max\{B_t, x\} = x + \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > x\}} \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2} L_t^x$.

(g) On souhaite montrer que pour $f \in C_c(\mathbb{R})$, tout $t \geq 0$, p.s.,

$$\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} f(x) L_t^x \mathrm{d}x.$$

(g1) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |y - x| f(x)\mathrm{d}x$. Montrer, sans se préoccuper des éventuels problèmes techniques, que $F'(y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sg}(y - x) f(x)\mathrm{d}x$ et que $F''(y) = f(y)$.

(g2) En utilisant (d), montrer, sans se préoccuper des éventuels problèmes techniques, que

$$F(B_t) = F(0) + \int_0^t F'(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) L_t^x \mathrm{d}x.$$

(g3) Conclure.

Exercice 5. On considère $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $\sigma(y) = 1$ et $b(y) = -y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il y a existence et unicité trajectorielle pour $E_x(\sigma, b)$.

(b) Montrer que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de $E_x(\sigma, b)$ avec le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, alors $(-X_t)_{t \geq 0}$ est solution de $E_{-x}(\sigma, b)$ avec le mouvement brownien $(-B_t)_{t \geq 0}$.

(c) Montrer que $X_t = e^{-t}(x + \int_0^t e^s \mathrm{d}B_s)$ est solution de $E_x(\sigma, b)$.

(d) Donner (rapidement) la loi de X_t (à $t \geq 0$ fixé), puis montrer que X_t converge en loi, quand $t \to \infty$, vers une loi μ à déterminer.

(e) Montrer que pour $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de $E_x(\sigma, b)$ et $\rho = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$, on a $\mathbb{E}[\rho] < \infty$. *On pourra utiliser (c), Dubins-Schwarz, et se rappeler que si W est un mouvement brownien et si $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$, alors τ_a a la même loi que a^2/G^2, où $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$.*

(f) Montrer que pour $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de $E_0(\sigma, b)$ et $\theta = \inf\{t \geq 0 : |X_t| = 1/2\}$, alors $\mathbb{E}[\theta] < \infty$. *On pourra utiliser Itô pour calculer $\mathbb{E}[X_{t \wedge \theta}^2]$ et remarquer que $1 - 2x^2 \geq 1/2$ si $|x| < 1/2$.*

Dans la suite, on fixe $x \in \mathbb{R}$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de $E_x(\sigma, b)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable bornée.

On introduit la famille de temps d'arrêt $\rho_0 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ puis, pour $n \geq 0$,

$$\theta_{n+1} = \inf\{t > \rho_n : |X_t| = 1/2\} \quad \text{and} \quad \rho_{n+1} = \inf\{t \geq \theta_{n+1} : X_t = 0\}.$$

(g) En utilisant (e), (f) et Markov forte pour les E.D.S. (on admet que les hypothèses sont vérifiées), montrer que $\mathbb{E}[\rho_1 - \rho_0] < \infty$, en déduire que $Z_0 = \int_{\rho_0}^{\rho_1} f(X_s)\mathrm{d}s$ est dans L^1.

(h) En utilisant Markov forte pour les E.D.S., montrer que la famille de v.a. $(\rho_{n+1} - \rho_n)_{n \geq 0}$ est i.i.d., ainsi que la famille $(Z_n)_{n \geq 0}$, où $Z_n = \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} f(X_s)\mathrm{d}s$.

(i) Soit $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\rho_n \leq t\}}$. Montrer que $\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = a$ p.s., où $a = 1/\mathbb{E}[\rho_1 - \rho_0]$. *Observer que $\rho_{N_t} \leq t \leq \rho_{N_t + 1}$ et calculer $\lim_n \frac{\rho_n}{n}$.*

(j) Montrer que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_n = b$ p.s., où $S_n = \sum_{i=0}^n Z_i$ et $b = \mathbb{E}[Z_0]$.

(k) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t f(X_s)\mathrm{d}s \in [S_{N_t}, U + S_{N_t + 1}]$, où $U = \int_0^{\rho_0} f(X_s)\mathrm{d}s$.

(l) Montrer que $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\mathrm{d}s = ab$ p.s.

(m) En se rappelant (d), montrer qu'on a forcément $ab = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu$ si f est continue (et bornée).

Exercice 6. Considérons une v.a. $X \sim \mathrm{Ber}(1/2)$ sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Grossir l'espace de probabilités afin de construire une v.a. $U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$ telle que (avec un petit abus de notation) $X = \mathbf{1}_{\{U > 1/2\}}$.