M1 Mathématiques, 2020-2021

MM036 - processus à sauts

Examen de première session du 7 mai

Exercice 1. L'unité de temps est l'heure. Des autobus passent, à une station donnée, aux instants de saut $T_1 < T_2 < \ldots$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$. Il passe en moyenne 4 autobus par heure.

1. (a) Quel est le paramètre de ce processus de Poisson ?
(b) Quelle est la probabilité qu'aucun autobus ne passe entre 14h et 15h ?
(c) Sachant qu'il n'est passé aucun autobus entre 14h et 15h, quelle est la probabilité qu'il en passe au moins 2 entre 15h et 16h ?
(d) Quelle est la probabilité qu'aucun autobus ne passe entre 14h et 15h sachant qu'il en passe 5 entre 14h et 17h ?

2. Un usager se présente à la station à l'instant $t_0 > 0$. On note τ son temps d'attente.
(a) Exprimer τ en fonction de $(N_t)_{t\geq 0}$ et des $(T_k)_{k\geq 1}$.
(b) En utilisant la propriété de Markov, calculer la loi de τ.

Exercice 2. Des clients arrivent aux instants de sauts $T_1 < T_2 < \ldots$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\alpha > 0$. Chaque client est immédiatement pris en charge. La durée de service du i-ème client est notée Y_i. Les Y_i sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et sont indépendants de $(N_t)_{t\geq 0}$.

(a) Que peut-on dire la famille $(T_i, Y_i)_{i\geq 1}$?
(b) Rappeler la définition de sa fonction de comptage M.
(c) Soit X_t le nombre de clients présents à l'instant $t \geq 0$. Calculer la loi de X_t (à $t \geq 0$ fixé).
(d) Soit Z le nombre de clients arrivés après l'instant 2 et partis avant l'instant 3. Calculer sa loi.

Exercice 3. On considère une chaîne de Markov irréductible $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un ensemble dénombrable E. On note P sa matrice de transition. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et un état $i_0 \in E$ tel que $P(i, i_0) \geq \alpha$ pour tout $i \in E$.

1. (a) Soit $R_{i_0} = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = i_0\}$. Montrer que R_{i_0} est un temps d'arrêt.
(b) Montrer par récurrence, que pour tout $i \in E$, tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}_i(R_{i_0} > n) \leq (1-\alpha)^n$.
(c) En déduire que la chaîne est récurrente positive.

2. On introduit $S_{i_0} = \inf\{n \geq R_{i_0} + 1 \,:\, X_n = i_0\}$.
(a) Montrer que S_{i_0} est un temps d'arrêt.
(b) Montrer que sous $\mathbb{P}_{i_0}$, les v.a. R_{i_0} et $S_{i_0} - R_{i_0}$ sont i.i.d.

Exercice 4. On considère une population composée de 10 individus. Chaque individu est caractérisé par son type (A ou B). Chaque individu de type A (resp. B) a une durée de vie de loi exponentielle de paramètre $\mu_A > 0$ (resp. $\mu_B > 0$), et est remplacé, à l'instant de sa mort, par un individu de type B (resp. A). On note X_t^A (resp. X_t^B) le nombre d'individus de type A (resp. B) présents (vivants) à l'instant $t \geq 0$.

1. Expliquer littéralement pourquoi $X_t = (X_t^A, X_t^B)$ est un processus markovien de sauts, d'espace d'états $E = \{i = (i_A, i_B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, i_A + i_B = 10\}$.
2. Calculer ses taux d'évenements $\lambda(i)$ et sa matrice de transition $Q(i, j)$ pour i et j dans E.
3. Écrire les équations de Kolmogorov forward de ce processus.
4 (Difficile). On pose $a_i(t) = \mathbb{E}_i(X_t^A)$ et $b_i(t) = \mathbb{E}_i(X_t^B)$. Montrer que

$$a_i'(t) = \mu_B b_i(t) - \mu_A a_i(t) \quad \text{et} \quad b_i'(t) = \mu_A a_i(t) - \mu_B b_i(t).$$

5. En remarquant que $a_i(t) + b_i(t) = 10$ (justifier), calculer $\lim_{t\to\infty} a_i(t)$.

Exercice 5. Sans aucune justification, donner l'espace d'états E, les taux d'évenement $(\lambda(i))_{i\in E}$ et la matrice transition $(Q(i,j))_{i,j\in E}$ du PMS $(X_t)_{t\geq 0}$ suivant : X_t est le nombre d'individus présents (et vivants) à l'instant t dans une population où :
• chaque individu a une durée de vie de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ et est remplacé à l'instant de sa mort par 0 ou 2 individus avec probabilités respectives $p_0 > 0$ et $p_2 > 0$ (avec bien sûr $p_0 + p_2 = 1$),
• des individus immigrent dans le système suivant un processus de Poisson de paramètre $\beta > 0$.