Exercice 1

1. Soient k et $\ell \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}[\Pi(A)=k, \Pi(B)=\ell] = \sum_{n\geq k+\ell} \mathbb{P}\left[\begin{array}{l} N=n, \ k \text{ indices } i\in\{1,\dots,n\} \text{ vérifient } X_i\in A \\ \text{et } \ell \text{ indices } i\in\{1,\dots,n\} \text{ vérifient } X_i\in B \end{array}\right]$$

$$= \sum_{n\geq k+\ell} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} C_n^k \mu(A)^k C_{n-k}^{\ell} \mu(B)^{\ell} \left(1-\mu(A)-\mu(B)\right)^{n-k-\ell}$$

$$= e^{-\lambda}(\lambda\mu(A))^k(\lambda\mu(B))^{\ell} \sum_{n\geq k+\ell} \left(\lambda(1-\mu(A)-\mu(B))\right)^{n-k-\ell} \frac{1}{n!}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{(n-k)!}{(n-k-\ell)!\,\ell!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda\mu(A))^k}{k!}\frac{(\lambda\mu(B))^{\ell}}{\ell!} \underbrace{\sum_{n\geq k+\ell}\frac{[\lambda(1-\mu(A)-\mu(B))]^{n-k-\ell}}{(n-k-\ell)!}}_{=e^{\lambda(1-\mu(A)-\mu(B))}}$$

$$= e^{-\lambda\mu(A)}\frac{(\lambda\mu(A))^k}{k!}\, e^{-\lambda\mu(B)}\frac{(\lambda\mu(B))^{\ell}}{\ell!}$$

Ainsi, $\Pi(A) \perp\!\!\!\perp \Pi(B)$, $\Pi(A)\sim\mathcal{P}(\lambda\mu(A))$

et $\Pi(B)\sim\mathcal{P}(\lambda\mu(B))$.

Exercice 2

[redacted] ① $(T_i, R_i, U_i)_{i\geq 1}$ est un PP de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\lambda\, dt\; e^{-r} dr\; 2e^{-2u} du$.

② le i-ème client arrive à l'instant T_i, part à l'instant $T_i + R_i$, et est satisfait si $U_i > R_i$.

Donc $X_t = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{T_i + R_i < t}\, \mathbb{1}_{U_i > R_i}$

③ Donc $X_t = M(A_t)$, où $A_t = \{(s,r,u) \in \mathbb{R}_+^3 \,/\, s+r<t \text{ et } u>r\}$

④ Ainsi, $X_t \sim \mathcal{P}(\alpha_t)$, où

$$\alpha_t = \iiint_{A_t} \lambda\, ds\, e^{-r} dr\, 2e^{-2u} du$$

$$= \int_0^t \lambda\, ds \int_0^{t-s} e^{-r} dr \int_r^{\infty} 2\, e^{-2u} du \;=\; \frac{\lambda t}{3} - \frac{\lambda}{9}\left(1-e^{-3t}\right)$$

Ex3 :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "1"] & 1 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & 2 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & 3 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, "p"] & {} \end{tikzcd}$$

1. La CdM est irréductible car 0 communique avec i pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$Q^i(0,i) \geq Q(0,1)\,Q(1,2) \cdots Q(i-1,i) = p^{i-1} > 0$$

et $Q^i(i,0) \geq Q(i,i-1)\,Q(i-1,i-2) \cdots Q(1,0) = (1-p)^i > 0$.

2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ iid avec $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1-p$.

(avec $(Y_n)_{n\geq 1} \perp\!\!\!\perp X_0$ une v.a. à val dans $\mathbb{N}$).

Soit $X_{n+1} = X_n + \mathbb{1}_{\{X_n = 0\}} + \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} Y_{n+1} = \Phi(X_n, Y_{n+1})$,

où $\Phi(i,y) = i + \mathbb{1}_{\{i=0\}} + \mathbb{1}_{\{i \geq 1\}}\, y$.

Par le cours, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une CdM de transit° $P(i,j) = \mathbb{P}(\Phi(i,Y_1) = j)$

→ si $i = 0$, on a $P(i,j) = \mathbb{P}(i+1 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = Q(i,j)$

→ si $i \geq 1$, on a $P(i,j) = \mathbb{P}(i + Y_1 = j) = \mathbb{P}(Y_1 = j-i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = Q(i,j)$

3. Si $p > \frac{1}{2}$, on écrit

$$X_{n+1} \geq X_n + Y_{n+1}, \quad \text{donc} \quad X_n \geq X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k) \geq X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} Y_k \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}[Y_1] = 2p - 1 > 0$ par la LGN,

donc $\sum_{1}^{n} Y_k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ p.s., puis $X_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ p.s.,

et la CdM est transitoire.

④ On cherche une probabilité π sur $\mathbb{N}$ t.q.

$\forall i,j \in \mathbb{N}, \quad \pi(i)\,Q(i,j) = \pi(j)\,Q(j,i),$

i.e. $\begin{cases} \pi(0)\,Q(0,1) = \pi(1)\,Q(1,0) \\ \text{et, } i \geq 1, \quad \pi(i)\,Q(i,i+1) = \pi(i+1)\,Q(i+1,i) \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} \pi(0) = \pi(1)(1-p) \\ i \geq 1 : \quad \pi(i)\,p = \pi(i+1)(1-p). \end{cases}$

Avec $\pi_0 = a$, ça donne $(\forall i \geq 1)$ $\pi_i = \frac{a}{(1-p)^i}\, p^{i-1}$

et on veut $1 = \sum_{i\geq 0} \pi_0 = a + \sum_{i\geq 1} a \frac{p^{i-1}}{(1-p)^i} = a + \frac{a}{1-p} \sum_{i \geq 0} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i$

donc $1 = a + \frac{a}{1-p} \times \frac{1}{1-\frac{p}{1-p}}$. $\quad$ (car $\frac{p}{1-p} < 1$ car $p < \frac{1}{2}$)

$= a\left(1 + \frac{1}{1-2p}\right) = a\,\frac{2-2p}{1-2p}.$

et $a = \frac{1-2p}{2-2p}.$

Dc $\pi_0 = \frac{1-2p}{2-2p}$ et $\forall i \geq 1, \; \pi_i = \frac{1-2p}{2-2p} \; \frac{p^{i-1}}{(1-p)^i}$

Dc qd $p < 1/2$, la CdM admet une proba réversible dc invariante, elle est dc récurrente positive.

5) On a $\{\tau_0 = n\} = \begin{cases} \phi & \text{si } n = 0 \\ \{X_1 \neq 0, \dots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0\} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

$$\in \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

pour tout $n \geq 0$. Donc τ_0 est un t.a.

(Noter que τ_0 est bien à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Par le cours, qd la CdM est rec positive, ce qui est le cas quand $p < 1/2$,

$$E_0[\tau_0] = \frac{1}{\pi(0)} = \frac{2-2p}{1-2p}.$$

Ex 4 :

1) L'espace d'état est bien $\mathbb{N}$. (ou $\mathbb{N}^*$)

$(X_t)_{t\geq 0}$ est un PTS car les lois en jeu sont exponentielles.

Si on connaît $(X_s)_{s\in[0,t]}$ et qu'on sait que $X_t = i$,

alors on a i bactéries à l'instant t, et on sait (pour chacune) depuis combien de temps elles ne se sont pas divisées, mais comme le temps d'attente avant chaque division est $\mathcal{E}(\alpha)$, le temps résiduel d'attente (pour chaque bactérie) avant la prochaine division est encore $\mathcal{E}(\alpha)$.

Ainsi, ce qui se passe après t ne dépend que de i.

2) Si $X_0 = i$, on appelle

$S_1, \dots, S_i$ les temps de division des bactéries nos $1, 2, \dots, i$.

Les $S_1, \dots, S_i$ sont iid $\mathcal{E}(\alpha)$.

Alors $T_1 = \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\} = \min(S_1, \dots, S_i)$

Par le lemme des i réveils, $T_1 \sim \mathcal{E}(i\alpha)$.

Donc $\lambda(i) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_i[T_1]} = i\alpha$.

De plus, on a bien $X_{T_1} = i+1$, donc

$Q(i,i+1) = \mathbb{P}_i[X_{T_1} = i+1] = 1$.

3) Les eq° de K F s'écrivent. $(j \geq 1)$

$$P_t'(i,j) = -j\alpha\, P_t(i,j) + (j-1)\alpha\, P_t(i,j-1).$$

4)
$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}_1[X_t] = \sum_{j\geq 1} j\, P_t'(1,j)$$

$$= -\alpha \sum_{j\geq 1} j^2\, P_t(1,j) + \alpha \sum_{j\geq 1} j(j-1)\, P_t(1,j-1)$$

$$= -\alpha\, \mathbb{E}_1[X_t^2] + \alpha \sum_{\ell\geq 0} (\ell+1)\ell\, P_t(1,\ell)$$

$$= -\alpha\, \mathbb{E}_1[X_t^2] + \alpha\, \mathbb{E}_1[X_t(X_t+1)]$$

$$= \alpha\, \mathbb{E}_1[X_t].$$

Comme de plus $\mathbb{E}_1[X_0] = 1$, on conclut

que $\mathbb{E}_1[X_t] = e^{\alpha t}$.

Ex 5 : $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\forall i = (i_1, i_2) \in E$, $\qquad \lambda(i) = \alpha + (i_1 \wedge 2)\mu_1 + (i_2 \wedge 1)\mu_2$

$$Q(i,j) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\lambda(i)} & \text{si} \quad j = (i_1+1, i_2) \\ \dfrac{(i_1 \wedge 2)\mu_1}{\lambda(i)} & \text{si} \quad j = (i_1-1, i_2+1) \\ \dfrac{(i_2 \wedge 1)\mu_2}{\lambda(i)} & \text{si} \quad j = (i_1, i_2-1) \end{cases}$$