M1 Mathématiques, 2021-2022

MM036 - processus à sauts

Examen de première session du 13 mai

Exercice 1. On considère une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de v.a. réelles i.i.d. de loi μ ainsi qu'une v.a. Z de loi de Poisson de paramètre λ (indépendante de la famille $(X_i)_{i\geq 1}$). On n'utilisera pas les résultats du cours dans cet exercice.

Soient A et B deux éléments disjoints de $\mathcal{E}$. Montrer que les v.a. $M(A) = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{1}_{\{X_i \in A\}}$ et $M(B) = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}}$ sont indépendantes, de lois respectives Poisson($\lambda\mu(A)$) et Poisson($\lambda\mu(B)$).

Exercice 2. Des clients arrivent aux instants de sauts $T_1 < T_2 < \dots$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client est immédiatement pris en charge. Le i-ème client est servi en un temps R_i et a une "patience" U_i. Quand le client est servi, il répond à une enquête de satisfaction et se dit "satisfait" si $U_i > R_i$ et "insatisfait" sinon.

On suppose que les R_i sont i.i.d. de loi Exponentielle(1) et sont indépendants des U_i qui sont i.i.d. de loi Exponentielle(2). La famille de toutes ces v.a. est supposée indépendante de $(N_t)_{t\geq 0}$.

1. Que peut-on dire la famille $(T_i, R_i, U_i)_{i\geq 1}$ (d'après le cours) ? On note M sa fonction de comptage.

2. Soit X_t le nombre de clients satisfaits partis avant l'instant $t > 0$. Exprimer X_t en fonction des v.a. de l'énoncé (commencer par exprimer le temps de départ du i-ème client).

3. Exprimer ensuite X_t en fonction de M.

4. En déduire la loi de X_t.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \mathbb{N}$ de matrice de transition Q définie par $Q(0,1) = 1$ et, si $i \geq 1$, $Q(i, i+1) = p$ et $Q(i, i-1) = 1 - p$, pour un $p \in]0,1[$.

1. La chaîne est-elle irréductible ?

2. Ecrire une formule de récurrence pour cette chaîne (on pourra introduire une famille i.i.d. $(Y_n)_{n\geq 1}$ avec $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1 - p$).

3. Montrer que la chaîne est transiente si $p > 1/2$.

4. Si $p < 1/2$, déterminer une probabilité invariante (on pourra la chercher réversible). Qu'en déduit-on sur la récurrence de la chaîne ?

5. Soit $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. Montrer que τ_0 est un temps d'arrêt. Calculer $\mathbb{E}_0[\tau_0]$ quand $p < 1/2$.

Exercice 4. Une bactérie se divise en deux bactéries identiques après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, qui se divisent elles-même de la même façon indépendamment les unes des autres, etc. Soit X_t le nombre de bactéries au temps $t > 0$.

1. Prouver informellement que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus markovien de saut, déterminer son espace d'états E.

2. Calculer rigoureusement ses taux d'évenement $(\lambda(i))_{i\in E}$ et sa matrice de transition $(Q(i,j))_{i,j\in E}$.

3. Ecrire les équations de Kolmogorov Forward.

4. Calculer $\frac{d}{dt}\mathbb{E}_1[X_t]$, sans justifier l'interversion somme-dérivation, et montrer que $\mathbb{E}_1[X_t] = e^{\alpha t}$.

Exercice 5. Des clients arrivent dans un magasin suivant un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. Ce magasin dispose de 3 employés : 2 vendeurs et 1 caissier. Quand un client arrive, il doit se faire servir par un vendeur (temps de service de loi exponentielle de paramètre $\mu_1 > 0$) puis par le caissier (temps de service de loi exponentielle de paramètre $\mu_2 > 0$). Il y a une file unique pour la vente (file numéro 1), et une file pour la caisse (file numéro 2).

Sans aucune justification, donner l'espace d'états E, les taux d'évenement $(\lambda(i))_{i\in E}$ et la matrice transition $(Q(i,j))_{i,j\in E}$ du PMS $(X_t)_{t\geq 0}$, avec $X_t = (X_t^1, X_t^2)$, où X_t^1 est le nombre de clients dans la file numéro 1 ou en train se faire servir par un vendeur, et X_t^2 est le nombre de clients dans la file numéro 2 ou en train se faire servir par le caissier.