M1 sauts, 2022-23, Session 1

Ex1 :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0,\ X_{t_1} = i_1,\ X_{t_2} = i_2) = \sum_{m_1 \in \mathbb{N},\, m_2 \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N_{t_1} = m_1,\ N_{t_2} - N_{t_1} = m_2,\ X_0 = i_0,\ X_{t_1} = i_1,\ X_{t_2} = i_2)$$

$$= \sum_{m_1 \in \mathbb{N},\, m_2 \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N_{t_1} = m_1,\ N_{t_2} - N_{t_1} = m_2,\ Z_0 = i_0,\ Z_{m_1} = i_1,\ Z_{m_1+m_2} = i_2)$$

$$= \sum_{m_1 \in \mathbb{N},\, m_2 \in \mathbb{N}} e^{-\alpha t_1} \frac{(\alpha t_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \frac{(\alpha(t_2 - t_1))^{m_2}}{m_2!} \nu(i_0)\, Q^{m_1}(i_0, i_1)\, Q^{m_2}(i_1, i_2)$$

$$= \nu(i_0) \sum_{m_1 \in \mathbb{N}} e^{-\alpha t_1} \frac{(\alpha t_1)^{m_1}}{m_1!} Q^{m_1}(i_0, i_1) \sum_{m_2 \in \mathbb{N}} e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \frac{(\alpha(t_2 - t_1))^{m_2}}{m_2!} Q^{m_2}(i_1, i_2)$$

$$= \nu(i_0)\, P_{t_1}(i_0, i_1)\, P_{t_2 - t_1}(i_1, i_2),$$

où $\quad P_t(i,j) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} Q^n(i,j)$

Ex2 :

(a) La famille $(T_i, R_i)_{i \geq 1}$ est un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité
$\mu(dt, dr) = \lambda \, dt \, \nu(dr)$.

(b) $X_t = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t < T_i + R_i\}}$.

(c) Si on note M la fct de comptage du PPP, on a
$X_t = M(A_t)$, où $A_t = \{(s,r) \in \mathbb{R}_+^2 : s \leq t < s+r\}$.

Donc $X_t \sim \mathcal{P}(\mu(A_t))$. De plus,

$$\mu(A_t) = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{s \leq t < s+r\}} \nu(dr) \, ds = \lambda \int_0^\infty \nu(dr) \int_{(t-r) \vee 0}^{t} ds$$

$$= \lambda \int_0^\infty [t - (t-r) \vee 0] \, \nu(dr) = \lambda \int_0^\infty (r \wedge t) \, \nu(dr).$$

(d) On a donc $\mathbb{E}[X_t] = \lambda \int_0^\infty (r \wedge t) \, \nu(dr) \xrightarrow{t \to \infty} \lambda \int_0^\infty r \, \nu(dr)$
par CV monotone.

(e) On sait que $N_t \xrightarrow{t \to \infty} \infty$ p.s., et que $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\lambda}$ p.s. par la LGN.

Or $T_{N_t} \leq t \leq T_{N_t + 1}$, donc

$$\underbrace{\frac{T_{N_t}}{N_t}}_{\downarrow \text{ p.s. } 1/\lambda} \leq \frac{t}{N_t} \leq \underbrace{\frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}}_{\downarrow \text{ p.s. } 1/\lambda} \times \underbrace{\frac{N_t+1}{N_t}}_{\downarrow \text{ p.s. } 1}$$

Donc $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{\text{p.s.}} \lambda$ quand $t \to \infty$.

(f) On a $\frac{1}{n} \sum_{i \geq 1}^{n} R_i \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}[R_1]$ p.s. par la LGN, donc

$$\frac{U_t}{t} = \frac{N_t}{t} \times \frac{1}{N_t} \sum_{i \geq 1}^{N_t} R_i \xrightarrow{\text{p.s.}} \lambda \, \mathbb{E}[R_1] \text{ qd } t \to \infty.$$

Ex 3 :

. Déjà, τ_j est un t.a., car c'est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{\tau_j = n\} = \{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\} \in \mathcal{F}_n$ (et $\{\tau_j = 0\} = \emptyset$).

. $\mathbb{P}_1(X_n = j) = \mathbb{P}_1(\tau_j \le n, X_n = j)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_1(\tau_j = k, X_n = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_1\Big[\mathbb{1}_{\tau_j = k}\, \underbrace{\mathbb{P}_1(X_n = j \mid \mathcal{F}_k)}\Big]$$ car $\{\tau_j = k\} \in \mathcal{F}_k$.

$= \mathbb{P}_1(\tilde{X}_{n-k} = j \mid \mathcal{F}_k)$ où $\tilde{X}_\ell = X_{k+\ell}$

$= \mathbb{P}_{X_k}(X_{n-k} = j)$ par MS.

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_1\Big[\mathbb{1}_{\tau_j = k}\, \mathbb{P}_{X_k}(X_{n-k} = j)\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_1\Big[\mathbb{1}_{\tau_j = k}\, \mathbb{P}_j(X_{n-k} = j)\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_1[\tau_j = k]\, P^{n-k}(j,j)$$

Ex 4 :

(a) $(X_t)_{t\geq 0}$ est un PMS, car les lois en jeu sont exponentielles.

Si on connaît $(X_s)_{s\in[0,t]}$ et qu'on sait que $X_t = i$, alors le futur après t ne dépend que du fait que $X_t = i$:

→ un client est en train d'arriver, et on sait depuis combien de tps on l'attend, mais comme les inter-arrivées sont $\mathcal{E}(\alpha)$, le tps résiduel d'attente est encore $\mathcal{E}(\alpha)$.

→ $i \wedge s$ clients sont au service, et on sait depuis quand, mais comme les tps de service st $\mathcal{E}(\mu)$, les tps résiduels de service sont encore $\mathcal{E}(\mu)$.

(b) On suppose $X_0 = i$, on sait que $\lambda(i) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_i[T_1]}$ et $Q(i,j) = \mathbb{P}_i(X_{T_1} = j)$.

Soit S le tps d'arrivée du prochain client, on a $S \sim \mathcal{E}(\alpha)$.

Soit $U_1, \dots, U_{s\wedge i}$ les tps de service des $(i\wedge s)$ clients en train de se faire servir, on a $U_1, \dots, U_{s\wedge i} \sim \mathcal{E}(\mu)$ (iid).

Alors $T_1 = S \wedge U_1 \wedge \dots \wedge U_{s\wedge i}$, et

$$X_{T_1} = \begin{cases} i+1 & \text{si } T_1 = S \\ i-1 & \text{si } T_1 = U_1 \wedge \dots \wedge U_{s\wedge i} \end{cases}$$

Par le lemme des $i\wedge s + 1$ réveils, on a donc

$$\lambda(i) = \alpha + (i\wedge s)\mu \quad \text{et} \quad Q(i, i+1) = \frac{\alpha}{\lambda(i)},$$

$$Q(i, i-1) = \frac{(i\wedge s)\mu}{\lambda(i)} \quad (= 0 \text{ si } i = 0)$$

(c) Il est irréd ssi la CdMT de transit° Q l'est.

Or $Q(i,i+1) > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, et $Q(i,i-1) > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}^*$.

Donc c'est OK.

(d) Il est récurrent ssi la CdMT de trans° Q l'est.

Il suffit donc de Mq la CdMT de trans° Q est rec >0, i.e. qu'elle admet une mesure invariante. On cherche $\tilde{\pi}$ réversible, i.e. telle que.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\pi}_i \frac{\alpha}{d(i)} = \tilde{\pi}_{i+1} \frac{[(i+1)\wedge s]\mu}{d(i+1)},$$

$$\text{i.e.} \quad \tilde{\pi}_{i+1} = \frac{d(i+1)}{d(i)} \, \frac{\alpha}{\mu[(i+1)\wedge s]} \, \tilde{\pi}_i = \underbrace{\frac{\alpha + [(i+1)\wedge s]\mu}{\alpha + (i\wedge s)\mu} \, \frac{\alpha}{[(i+1)\wedge s]\mu}}_{\gamma_i} \, \tilde{\pi}_i .$$

~~Avec $\tilde{\pi}_0 = a$~~

Avec $\tilde{\pi}_0 = a$, on trouve $\tilde{\pi}_i = \left(\prod_{k=0}^{i-1} \gamma_k \right) a \quad \forall i \geq 1$

Donc on peut trouver a de sorte que π soit une proba si et seulement si $\sum_{i \geq 1} \prod_{k=0}^{i-1} \gamma_k < \infty$.

Or $\forall i \geq s+1$, on a $\prod_{k=0}^{i-1} \gamma_k = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{s-1} \gamma_k \right)}_{cte} \times \left(\frac{\alpha}{s\mu} \right)^{i-s}$,

Qui est bien sommable puisque $\alpha < s\mu$ par hypothèse.

(2) Comme $(X_t)_{t\geq 0}$ est récurrent, il suffit de montrer qu'il existe une probabilité π t.q. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\pi_i \lambda(i) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \pi_j \lambda(j) Q(j,i)$,

i.e. ici $\forall i\in\mathbb{N}$, $\pi_i \alpha = \pi_{i+1} [(i+1)\wedge s]\mu$,

i.e. $\pi_{i+1} = \underbrace{\frac{\alpha}{[(i+1)\wedge s]\mu}}_{\theta_i} \pi_i$.

avec $\pi_0 = a$, on trouve $\pi_i = \left(\prod_{k=0}^{i-1}\theta_k\right) a \quad \forall i\geq 1$.

Donc on peut trouver a de sorte que π soit une proba si et seulement si $\sum_{i\geq 1}\left(\prod_{k=0}^{i-1}\theta_k\right) < \infty$.

Or $\forall i \geq s$, on a $\prod_{k=0}^{i-1}\theta_k = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{s-1}\theta_k\right)}_{cte} \left(\frac{\alpha}{s\mu}\right)^{i-s}$,

qui est sommable car $\alpha < s\mu$ par hypothèse.

f) $\forall j \geq 1, \quad P_t'(i,j) = -\left[\alpha + [j \wedge s]\mu\right] P_t(i,j)$

$$+ \alpha P_t(i, j-1) + [(j+1) \wedge s]\mu P_t(i, j+1).$$

et $P_t'(i,0) = -\alpha P_t(i,0) + \mu P_t(i,1)$.

g) si $s = \infty$, $\forall j \geq 1$, $P_t'(i,j) = -(\alpha + j\mu) P_t(i,j)$

$$+ \alpha P_t(i, j-1) + (j+1)\mu P_t(i, j+1).$$

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}_i[X_t] = \sum_{j \geq 1} j P_t'(i,j)$$

$$= -\sum_{j \geq 1} j(\alpha + j\mu) P_t(i,j) + \alpha \sum_{j \geq 1} j P_t(i,j-1)$$

$$+ \mu \sum_{j \geq 1} j(j+1) P_t(i,j+1)$$

$$= -\mathbb{E}_i\left[X_t(\alpha + \mu X_t)\right] + \alpha \sum_{\ell \geq 0} (\ell+1) P_t(i,\ell)$$

$$+ \mu \sum_{\ell \geq 2 \to 0} (\ell-1)\ell P_t(i,\ell)$$

$$= -\mathbb{E}_i\left[X_t(\alpha + \mu X_t)\right] + \alpha \mathbb{E}_i[X_t + 1] + \mu \mathbb{E}_i\left[(X_t - 1) X_t\right]$$

$$= \alpha - \mu \mathbb{E}_i[X_t].$$

(h) On résout l'equa diff (avec $\mathbb{E}_i[X_0] = i$),

et on trouve $\mathbb{E}_i[X_t] = \frac{\alpha}{\mu} + \left(i - \frac{\alpha}{\mu}\right)e^{-\mu t}$.

Donc $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbb{E}_i[X_t] = \frac{\alpha}{\mu}$.

(i) Par le thm ergodique, on a $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^t X_s \, ds = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} i \Pi_i$,

où Π est la proba invariante du PMS.

On reprend le calcul du (e) qd $s = \infty$:

$\Pi_0 = a$, et $\Pi_{i+1} = \frac{\alpha}{(i+1)\mu} \Pi_i \quad \forall i \geq 1$.

Ça donne $\Pi_i = a \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i \times \frac{1}{i!}$, puis $a = e^{-\alpha/\mu}$,

et $\Pi_i = e^{-\alpha/\mu} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}$, c'est la loi $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)$.

Donc $\sum\limits_{i \geq 0} i \Pi_i = \frac{\alpha}{\mu}$.

ex 5 :

- Quand $X_t = (i_1, i_2)$, il y a i_1 indiv M et i_2 indiv F, donc il y a $i_1 i_2$ paires d'individus M et F possibles.

- $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\lambda(i_1, i_2) = i_1 \mu_M + i_2 \mu_F + \alpha_M + \alpha_F + i_1 i_2 \theta.$$

$$Q\big((i_1, i_2), (i_1 - 1, i_2)\big) = \frac{i_1 \mu_M}{\lambda(i_1, i_2)} \qquad (= 0 \text{ si } i_1 = 0)$$

$$Q\big((i_1, i_2), (i_1, i_2 - 1)\big) = \frac{i_2 \mu_F}{\lambda(i_1, i_2)} \qquad (= 0 \text{ si } i_2 = 0)$$

$$Q\big((i_1, i_2), (i_1 + 1, i_2)\big) = \frac{\alpha_M + i_1 i_2 \theta p}{\lambda(i_1, i_2)}$$

$$Q\big((i_1, i_2), (i_1, i_2 + 1)\big) = \frac{\alpha_F + i_1 i_2 \theta (1 - p)}{\lambda(i_1, i_2)}$$