M1 Mathématiques, 2022-2023
MM036 - processus à sauts
Examen de première session

Documents, calculettes, téléphones, etc. interdits. Tout téléphone portable trouvé allumé pendant l'épreuve sera saisi.

Exercice 1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$, indépendant d'une chaîne de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E de loi initiale ν et de matrice de transition Q. Soit $X_t = Z_{N_t}$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que pour tout $t_2 > t_1 > 0$, pour tout $i_0, i_1, i_2 \in E$,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2) = \nu(i_0)P_{t_1}(i_0, i_1)P_{t_2-t_1}(i_1, i_2),$$

pour un certain $P_t(i, j)$ qu'on déterminera.

Exercice 2. Des tâches arrivent à une machine aux instants de sauts $T_1 < T_2 < \ldots$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\lambda > 0$. La i-ème tâche requiert un temps de service R_i. Chaque tâche est traitée dès son arrivée (la capacité de travail de la machine est infinie). On suppose que les R_i sont i.i.d. de loi ν (sur $]0, \infty[$) et sont indépendantes de $(N_t)_{t\geq 0}$.

(a) Que peut-on dire la famille $(T_i, R_i)_{i\geq 1}$?

(b) Soit X_t le nombre de tâches en cours de traitement à l'instant t. Exprimer X_t en fonction de la famille $(T_i, R_i)_{i\geq 1}$.

(c) En déduire la loi de X_t.

(d) Calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_t]$.

(e) Montrer que $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.s.

(f) Calculer $\lim_{t\to\infty} \frac{U_t}{t}$, où $U_t = \sum_{i=1}^{N_t} R_i$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable E, de matrice de transition P. Montrer très soigneusement que pour tout $n \geq 1$, tout i, j dans E,

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(\tau_j = k)P^{n-k}(j, j),$$

où $\tau_j = \inf\{n \geq 1 \ : \ X_n = j\}$.

Exercice 4. Des clients arrivent à dans un magasin suivant un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. Il y a $s \in \mathbb{N}^*$ serveurs. Chaque client demande un temps de service de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Les temps de service sont supposés i.i.d. et indépendants du processus de Poisson des arrivées. Soit X_t le nombre de clients présents dans le magasin à l'instant t.

(a) Expliquer informellement pourquoi $(X_t)_{t\geq 0}$ est un PMS, donner son espace d'états.

(b) Calculer rigoureusement ses caractéristiques $\lambda(i)$ et $Q(i, j)$.

(c) Montrer qu'il est irréductible (rappeler la définition).

(d) On suppose $s\mu > \alpha$. Montrer qu'il est récurrent (rappeler la définition). On pourra montrer que la chaîne induite est récurrente positive (chercher une probabilité réversible).

(e) Toujours quand $s\mu > \alpha$, montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est récurrent positif.

Les questions (f), (g) et (h) n'utilisent pas les questions (c), (d), (e).

(f) Écrire les équations de Kolmogorov forward.

(g) On suppose $s = \infty$. Trouver une équation différentielle pour $\mathbb{E}_i[X_t]$ (calcul informel autorisé).

(h) Toujours quand $s = \infty$, calculer $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_i[X_t]$.

(i) Toujours quand $s = \infty$, calculer $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_s ds$.

Exercice 5. On considère une population composée de mâles (M) et de femelles (F). Les individus M ont une durée de vie de loi exponentielle de paramètre μ_M. Les individus F ont une durée de vie de loi exponentielle de paramètre μ_F. Des individus M immigrent suivant un processus de Poisson de paramètre α_M. Des individus F immigrent suivant un processus de Poisson de paramètre α_F. Chaque paire d'individus M et F produit un individu au bout d'un temps exponentiel de paramètre θ, l'individu qui naît est M avec probabilité p et F avec probabilité $1 - p$.

Soit $X_t = (X_t^M, X_t^F)$ où X_t^M est le nombre d'individus M vivant à l'instant t et X_t^F est le nombre d'individus F vivant à l'instant t.

Quand $X_t = (i_1, i_2)$, combien y a-t-il de paires d'individus M et F possibles ?

Sans aucune justification, donner l'espace d'états, les taux d'évenement et la matrice transition du PMS $(X_t)_{t\geq 0}$.