M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 0.

Exercice 1. Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\,1)$. Soit $x > 0$.

(i) Montrer que $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\,(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \le \mathbb{P}(\xi > x) \le \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\xi > x) \le \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Exercice 2. Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\,1)$.

(i) Calculer $\mathbb{E}(\xi^4)$ et $\mathbb{E}(|\xi|)$.

(ii) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi})$, $\mathbb{E}(\xi \mathrm{e}^{a\xi})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi^2})$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel.

(iii) Soit $b \ge 0$ et $\eta \sim \mathscr{N}(0,\,1)$ indépendante de ξ. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{b\xi^2}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda\xi\eta})$, où $\lambda = (2b)^{1/2}$.

Exercice 3. Soient $\xi,\,\xi_1,\,\xi_2,\,\cdots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n, ξ_n suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu_n,\,\sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \ge 0$, et que ξ_n converge en loi vers ξ. Montrer que ξ suit une loi gaussienne.

Exercice 4. Soient $\xi,\,\xi_1,\,\xi_2,\,\cdots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n, ξ_n suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu_n,\,\sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \ge 0$, et que ξ_n converge en probabilité vers ξ. Montrer que ξ_n converge dans L^p, pour tout $p \in [1,\,\infty[$.

Exercice 5. Soit $(\xi,\,\eta,\,\theta)$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) = 0$, $\mathbb{E}(\xi^2) > 0$ et $\mathbb{E}(\eta^2) > 0$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi,\,\eta) = \mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) + \mathbb{E}(\theta \,|\, \eta) - \mathbb{E}(\theta)$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \xi\eta) = 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi\eta) = \mathbb{E}(\theta)$.

Exercice 6. Soient ξ et η deux variables aléatoires intégrables et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) \ge 0$ p.s. si et seulement si $\mathbb{E}(\xi\,\mathbf{1}_A) \ge 0\ \forall A \in \mathscr{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) \ge \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathscr{G})$ p.s. si et seulement si $\mathbb{E}(\xi\,\mathbf{1}_A) \ge \mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_A)\ \forall A \in \mathscr{G}$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathscr{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi\,\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_A)\ \forall A \in \mathscr{G}$.

Exercice 7. Soit $(X_\alpha,\,\alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle Y telle que $\sup_{\alpha\in A}|X_\alpha| \le Y$ p.s. Montrer que $(X_\alpha,\,\alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Exercice 8. Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble non vide A quelconque. Montrer que $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|\, \mathbf{1}_B) < \varepsilon$.

Exercice 9. Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles intégrables. Montrer qu'elle est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = \infty$ telle que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}[h(|X_\alpha|)] < \infty$.

Montrer qu'on peut de plus choisir h continue, convexe, croissante, avec $h(0) = 0$.

Exercice 10. Soit ξ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Montrer que $(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}),\, \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sous-tribu) est uniformément intégrable.

Exercice 11. Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|^p) < \infty$. Montrer que $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Exercice 12. Soient $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ et $(Y_\beta,\, \beta \in B)$ deux familles de variables aléatoires réelles uniformément intégrables. Montrer que $(X_\alpha + Y_\beta,\, (\alpha, \beta) \in A \times B)$ est uniformément intégrable.

Exercice 13. Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{R}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. On suppose que $X_t \to X_\infty$ en probabilité (quand $t \to \infty$), et que $(X_t,\, t \geq 0)$ est uniformément intégrable. Montrer que $X_t \to X_\infty$ dans L^1.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 1.

Exercice 1. Soit $(\xi_{k,n},\, k \geq 0,\, n \geq 0)$ une famille de variables aléatoires i.i.d. suivant toutes la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$. On définit pour tout $n \geq 0$, le processus continu $(X_n(t),\, t \in [0,\, 1])$ tel que $t \mapsto X_n(t)$ est affine sur chacun des intervalles $[\frac{i}{2^n},\, \frac{i+1}{2^n}]$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$, de la façon suivante : $X_0(0) = 0$, $X_0(1) = \xi_{0,0}$, et par récurrence, pour $n \geq 0$ et $i = 0, \ldots, 2^{n+1}$

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\frac{i}{2^{n+1}}) &= X_n(\frac{i}{2^{n+1}}) \qquad \text{si } i \text{ est pair,} \\ X_{n+1}(\frac{i}{2^{n+1}}) &= \frac{1}{2} X_n(\frac{i-1}{2^{n+1}}) + \frac{1}{2} X_n(\frac{i+1}{2^{n+1}}) + \frac{1}{2} \frac{\xi_{i,n+1}}{2^{n/2}} \qquad \text{si } i \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $(X_n(\frac{k}{2^n}),\, 0 \leq k \leq 2^n)$ est un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}[X_n(\frac{k}{2^n}) X_n(\frac{\ell}{2^n})] = \frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}$, pour $0 \leq k,\, \ell \leq 2^n$.

Exercice 2. Soit $(B^m_t,\, t \in [0,\, 1])$, pour $m \geq 0$, une suite de mouvements browniens indépendants définis sur $[0,\, 1]$. On pose

$$B_t = B^{\lfloor t \rfloor}_{t - \lfloor t \rfloor} + \sum_{0 \leq m < \lfloor t \rfloor} B^m_1, \qquad t \geq 0.$$

Montrer que $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 3. Montrer que $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\, \mathbb{R})$, la tribu borélienne de $C(\mathbb{R}_+,\, \mathbb{R})$, n'est autre que $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$, la tribu engendrée par le processus des coordonnées $(X_t,\, t \geq 0)$.

Dans les exercices suivants, $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 4. Soit $T = \inf\{t \geq 0 :\, B_t = 1\}$ (avec $\inf \varnothing = \infty$). Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 5. Soit $\xi = \int_0^1 B_t \, \mathrm{d}t$. Quelle est la loi de ξ ?

Exercice 6. Soit $\eta = \int_0^2 B_t \, \mathrm{d}t$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(B_1 \,|\, \eta)$.

Exercice 7. Montrer que $B_7 - B_2$ est indépendante de $\sigma(B_s,\, s \in [0,\, 1])$.

Exercice 8. Soit $\mathscr{F}_1 = \sigma(B_s,\, s \in [0,\, 1])$. Calculer $\mathbb{E}(B_5 \,|\, \mathscr{F}_1)$ et $\mathbb{E}(B_5^2 \,|\, \mathscr{F}_1)$.

Exercice 9. Montrer que

(i) pour tout $t > 0$, $\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s$ a la même loi que $t^2 \int_0^1 B_s^2\,\mathrm{d}s$,

(ii) mais les processus $(\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s,\, t \geq 0)$ et $(t^2 \int_0^1 B_s^2\,\mathrm{d}s,\, t \geq 0)$ n'ont pas la même loi.

Exercice 10. Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de B. Quelle est la loi de B_T ?

Exercice 11. Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$ est bien définie p.s.

Exercice 12. Soit $\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$. Montrer que $(\beta_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 13. Montrer que $\int_0^\infty |B_s|\,\mathrm{d}s = \infty$ p.s.

Exercice 14. Soit $B = (B_t,\, t \in [0,\, 1])$ un mouvement brownien standard indexé par $[0,\, 1]$. Pour tout $t \in [0,\, 1]$, on pose

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_t &= \sigma(B_s,\ s \in [0,\, t]), \\ \mathscr{G}_t &= \mathscr{F}_t \vee \sigma(B_1) \end{aligned}$$

(i) Soient $0 \leq s < t \leq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)\,|\,\mathscr{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s).$$

(ii) Considérons le processus $\beta = (\beta_t,\, t \in [0,\, 1])$ défini par

$$\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

Montrer que pour $0 \leq s < t \leq 1$, $\mathbb{E}(\beta_t\,|\,\mathscr{G}_s) = \beta_s$ p.s.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 2.

Dans tous les exercices, $B = (B_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 1 On définit $d_1 := \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$ et $g_1 := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$.

(i) La variable aléatoire d_1 est-elle un temps d'arrêt ?

(ii) Calculer la loi de d_1 et celle de g_1 (indication : utiliser la propriété de Markov simple et une formule obtenue dans le cours pour la loi de τ_x, $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 2 On pose $\tau_1 := \inf\{t > 0 : B_t = 1\}$ et $\tau := \inf\{t \geq \tau_1 : B_t = 0\}$.

(i) La variable aléatoire τ est-elle un temps d'arrêt ?

(ii) Calculer la loi de τ.

Exercice 3 Étudier la convergence en loi, en probabilité et p.s. de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ (quand $t \to \infty$).

Exercice 4 (i) Soient $0 < a < b < c < d$. Montrer que presque sûrement, $\sup_{t\in[a,b]} B_s \neq \sup_{t\in[c,d]} B_s$.

(ii) En déduire que p.s., chaque maximum local de B est un maximum local au sens strict.

Exercice 5 En utilisant la propriété de scaling, montrer que $(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\, \mathrm{d}s)^{1/t^{1/2}} \to \mathrm{e}^{|G|}$ en loi lorsque $t \to \infty$, où G suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 6 (i) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Rappelons que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_a}] = \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\lambda}}$, $\forall \lambda \geq 0$. Montrer que $\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp(-\frac{a^2}{2t})$, pour tout $t > 0$.

(ii) Montrer que si G est une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$, alors $\mathbb{P}(G \geq x) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$, $\forall x > 0$ (à comparer avec l'exercice 1 de la feuille 0).

Exercice 7 Soit $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|G| - |\widetilde{G}|, 0\}$, où G et $\widetilde{G}$ désignent deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 8 Montrer, sans utiliser la propriété d'inversion du temps, mais avec la loi des grands nombres et le principe de réflexion, que $\frac{B_t}{t} \to 0$ p.s. lorsque $t \to \infty$.

Exercice 9 Prouver que $\tau < \infty$ p.s., où $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = \sqrt{1+t}\}$ ($\inf \varnothing := \infty$).

Pierre dit : Puisque τ est $\mathscr{F}_{0+}$-mesurable, on sait d'après la loi 0–1 de Blumenthal que $\mathbb{P}\{\tau < \infty\}$ est 0 ou 1. Or, $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} \geq \mathbb{P}\{B_1 \geq \sqrt{2}\,\} > 0$, on a $\tau < \infty$ p.s.

Que pensez-vous de l'argument de Pierre ?

Exercice 10 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$.

Exercice 11 (i) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall\, t \geq 1$, $\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,t]} |B_s| \leq 2) \geq e^{-ct}$.

(ii) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0,\, 1]$, $\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,1]} |B_s| \leq \varepsilon) \geq \mathrm{e}^{-c/\varepsilon^2}$.

(iii) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$, $\mathbb{P}\{\sup_{s\in[0,\,t]} |B_s| \geq x\} > 0$.

Exercice 12 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t \log\log t}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \geq (1+\varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1+\varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{S_t}{h(t)} \leq 1$, p.s.

(ii) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} |B_s|}{h(t)} \leq 1, \qquad \text{p.s.}$$

(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}\,[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha\, h(s_n)\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

(iv) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1,\, 2$, ou 3 ?

(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}}$?

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 3.

Exercice 1 Dans cet exercice $(\mathscr{F}_t)$ est une filtration et τ, σ sont des $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. On rappelle les définitions

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \, \forall\, t \geq 0,\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

$$\mathscr{F}_{\tau+} := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \, \forall\, t \geq 0,\, A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

$$\mathscr{F}_{\tau-} := \sigma(\{A \cap \{\tau > t\} : \, t \geq 0, A \in \mathscr{F}_t\}).$$

(i) Si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

(ii) $\sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont des temps d'arrêt, et on a $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$. En plus, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ et $\{\sigma = \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ (et donc $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$).

(iii) Si σ et τ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma + \tau$ est un temps d'arrêt.

(iv) Si (τ_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \uparrow \tau_n$ est aussi un temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{\tau_n-}.$$

(v) Si (τ_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \downarrow \tau_n$ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}.$$

(vi) Si $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ est un temps d'arrêt.

(vii) Si $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+}$ alors $\mathscr{G}_\tau = \mathscr{F}_{\tau+}$.

Exercice 2 Soit $M = (M_t,\ t \geq 0)$ une sous-martingale. Soit $(\mathscr{G}_t)$ une sous-filtration de $(\mathscr{F}_t)$. Montrer que $N_t := \mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{G}_t)$, $t \geq 0$, est une $(\mathscr{G}_t)$-sous-martingale.

Exercice 3 Soit $M = (M_t,\ t \geq 0)$ une martingale telle que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

(i) Soit $t \geq 0$ fixé et $\xi_n := \mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$, $n \geq t \geq 0$. Montrer que si $n \geq m \geq t$ alors p.s. $\xi_n \geq \xi_m$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$ converge (lorsque $n \to \infty$) p.s. vers une variable aléatoire réelle, notée X_t.

(ii) Montrer que $(X_t,\, t \geq 0)$ est une martingale.

(iii) Montrer que M s'écrit comme différence de deux martingales positives.

Exercice 4 Soit $M := (M_t,\, t \in [0,\, 1])$ une sous-martingale telle que $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_1)$. Montrer que M est une martingale.

Exercice 5 Soit M une martingale continue à droite. Soit $t \geq 0$. Montrer que $M_{t+\varepsilon} \to M_t$ (lorsque $\varepsilon \downarrow 0$) dans L^1.

Exercice 6 (Dans cet exercice, on ne met pas les "conditions habituelles" sur la filtration.) Montrer que toute martingale continue à droite est également une $(\mathscr{F}_{t+})$-martingale.

Exercice 7 Soit ξ une variable aléatoire réelle. Soit $M_t := \mathbb{P}(\xi \leq t \,|\, \mathscr{F}_t)$. Montrer que $(M_t,\, t \geq 0)$ est une sous-martingale.

Exercice 8 Soit τ un temps d'arrêt et $(M_t,\ t \geq 0)$ une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Montrer que $(M_{\tau\wedge t},\ t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

Exercice 9 (i) Soit (M_t) une martingale continue et positive, telle que $M_t \to 0$, p.s. ($t \to \infty$). Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq x \,|\, \mathscr{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$, p.s.

(ii) Soit B un mouvement brownien. Calculer la loi de $\sup_{t\geq 0}(B_t - t)$.

(ii) Soit B un mouvement brownien issu de $x > 0$. Calculer la loi de $\sup_{t\leq \tau_0} B_t$, où $\tau_0 := \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$.

Dans les exercices suivants, B est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien.

Exercice 10 Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt bornés. Montrer que $\mathbb{E}[(B_\tau - B_\sigma)^2] = \mathbb{E}(B_\tau^2) - \mathbb{E}(B_\sigma^2) = \mathbb{E}(\tau - \sigma)$.

Exercice 11 Soient $a > 0$ et $b > 0$.

(i) Soit $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = -a \text{ ou } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$. En étudiant $M_t := \mathrm{sh}(\theta(B_t + a)) \exp(-\frac{\theta^2}{2} t)$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_{a,b}}\right] = \frac{\mathrm{ch}(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}{\mathrm{ch}(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}, \qquad \lambda \geq 0.$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$.

(iii) Quelle est la loi de $\sup_{0\leq t\leq \tau_{-1}} B_t$?

Exercice 12 Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 :\ B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou b. Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b)$.

Indication : on pourra considérer la martingale $\exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires. Calcul stochastique.

Feuille 4.

Exercice 1. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n, $M^{\tau_n} - M_0$ soit une martingale continue bornée.

Exercice 2. Soit M un processus continu et adapté. On suppose qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n, M^{τ_n} est une martingale locale. Montrer que M est une martingale locale.

Exercice 3. Soit M une martingale locale continue. Montrer que M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $(M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}},\ \tau$ temps d'arrêt$)$ est uniformément intégrable.

Exercice 4. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s. Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt finis qui réduit M.

(i) Soit τ un temps d'arrêt fini. Montrer que pour tout n, $\mathbb{E}(|M_{\tau\wedge\tau_n}|) \le \mathbb{E}(|M_{\tau_n}|)$.

(ii) Montrer que $\sup_n \mathbb{E}(|M_{\tau_n}|) = \sup\{\mathbb{E}(|M_\tau|),\ \tau$ temps d'arrêt fini$\}$.

Exercice 5. Soit Y une variable aléatoire réelle bornée, et soit A un processus croissant borné (c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que $A_\infty \le K$ p.s.). Montrer que $\mathbb{E}(YA_\infty) = \mathbb{E}[\int_0^\infty \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}_t)\, \mathrm{d}A_t]$. On admettra que $M_t = \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}_t)$ est continue à droite.

Exercice 6. Donner un exemple de martingale locale M bornée (i.e. $\sup_{t,\omega} |M_t(\omega)| < \infty$) telle que $\langle M\rangle$ ne soit pas borné (i.e. $\sup_{t,\omega} \langle M\rangle_t(\omega) = \infty$). Montrer que le contraire est aussi possible.

Exercice 7. Soit M une martingale locale continue, et soit A un processus à variation finie tel que $M^2 - A$ est une martingale locale. Montrer que A est indistinguable de $\langle M\rangle$.

Exercice 8. Soit M, N des martingales locales continues, et soit τ un temps d'arrêt. Montrer que $\langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau$, $\langle N, M^\tau\rangle = \langle N^\tau, M^\tau\rangle = \langle N, M\rangle^\tau$ et $\langle M - M^\tau\rangle = \langle M\rangle - \langle M\rangle^\tau$.

Exercice 9. (i) Soient M et N deux martingales locales continues. Montrer que si M et N sont indépendantes, alors elles sont orthogonales (c'est-à-dire, $\langle M, N\rangle = 0$).

(ii) Montrer que la réciproque est fausse. (On pourra, par exemple, considérer M^τ et $M - M^\tau$.)

Exercice 10. Soient M et N des martingales locales et continues, et soit H un processus mesurable tel que pour tout t, $\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty$ et $\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle N\rangle_s < \infty$ p.s. Montrer que pour tout t, $\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle M + N\rangle_s < \infty$ p.s.

Exercice 11. Soit M une martingale locale continue, et soit T un temps d'arrêt fini. Soit $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+T}$, $t \ge 0$.

(i) Montrer que si τ est un temps d'arrêt, alors $(\tau - T)^+$ est un $(\mathscr{G}_t)$-temps d'arrêt.

(ii) Montrer que $(M_{t+T},\, t \ge 0)$ est une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale, et calculer sa variation quadratique.

Exercice 12. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{F}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$ et tous $s < t$,

$\langle M \rangle_s(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega) \;\Leftrightarrow\; M_u(\omega) = M_s(\omega)$, $\forall u \in [s,\, t]$.

Exercice 13. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Montrer que pour tout temps d'arrêt p.s. fini τ, on a $\mathbb{E}(M_\tau^2) \le \mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau)$.

(ii) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \ge 0 :\, |M_t| \ge a\}$. Montrer que $\mathbb{E}(\langle M \rangle_{\tau_a \wedge t}) \ge a^2\, \mathbb{P}(\tau_a \le t)$, $\forall t > 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{s \in [0,\, t]} |M_s| \ge a) \le a^{-2} \mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.

Exercice 14. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Soit $a > 0$ et soit $\sigma_a := \inf\{t \ge 0 :\, \langle M \rangle_t \ge a^2\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s \in [0,\, \sigma_a]} |M_s| > a \Big) \le \frac{1}{a^2} \mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M \rangle_\infty).$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{t \ge 0} |M_t| > a) \le \mathbb{P}(\langle M \rangle_\infty \ge a^2) + a^{-2} \mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M \rangle_\infty)$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{t \ge 0} |M_t|) \le 3\, \mathbb{E}(\sqrt{\langle M \rangle_\infty}\,)$.

(iv) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M \rangle_\infty}\,) < \infty$, alors M est une (vraie) martingale uniformément intégrable.

(v) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M \rangle_t}\,) < \infty$ pour tout t, alors M est une (vraie) martingale.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 5.

Exercice 0 (Intégrale de Wiener) Soit H un espace d'Hilbert séparable, $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H et $(\xi_k)_k$ une suite i.i.d. $\mathscr{N}(0,1)$ définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour $h \in H$

$$W^n(h) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \, \langle e_k, h \rangle_H, \qquad n \geq 1.$$

(i) Montrer que $W^n(h)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a. $W(h)$ quand $n \to +\infty$.

(ii) Montrer que $W(h) \sim \mathscr{N}(0, \|h\|_H^2)$ et $\mathbb{E}(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2 \rangle_H$.

(iii) Montrer que $h \mapsto W(h)$ est une application linéaire isométrique de H dans un s.e.v. gaussien de $L^2(\Omega)$.

(iv) Montrer que si $h_k \to h$ dans H, alors $W(h_k) \to W(h)$ dans $L^2(\Omega)$.

(v) On suppose $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On rappelle que $B_t = W(1_{[0,t]})$ est un mouvement brownien. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout $h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$, on a

$$\int_0^t h(s) \, \mathrm{d}B_s = W(h\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

Exercice 1. Soit M une martingale locale continue issue de 0, et soit H un processus progressif localement borné. Montrer que p.s., pour tous réels $t > s \geq 0$, la fonction $u \mapsto (H \cdot M)_u(\omega)$ est constante sur $[s,\, t]$ si $H_u(\omega) = 0$ $\forall u \in [s,\, t]$, ou si $M_u(\omega) = M_s(\omega)$ $\forall u \in [s,\, t]$.

On note $\mathscr{M}^2_\infty$ l'ensemble des martingales continues issues de 0 bornées dans L^2, et pour $M \in \mathscr{M}^2_\infty$, on dit que $H \in L^2_\infty(M)$ si H est progressif et vérifie $\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s] < \infty$.

Exercice 2. Soit M une martingale locale continue nulle en 0, et soit H un processus progressif localement borné. Montrer que $H \cdot M \in \mathscr{M}^2_\infty$ si et seulement si $\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s] < \infty$.

Exercice 3. Soient $M \in \mathscr{M}^2_\infty$ et $N \in \mathscr{M}^2_\infty$. Soient $H \in L^2_\infty(M)$ et $K \in L^2_\infty(N)$. Soient S et T des temps d'arrêt. Montrer que $\mathbb{E}[(\int_0^S H_s \, \mathrm{d}M_s)(\int_0^T K_s \, \mathrm{d}N_s)] = \mathbb{E}[\int_0^{S \wedge T} H_s K_s \, \mathrm{d}\langle M,\, N \rangle_s]$.

Exercice 4 (Convergence dominée). Soit X une semimartingale continue. Soit (H^n) une suite de processus progressifs localement bornés telle que p.s., pour tout $t \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} H^n_t = 0$. On suppose qu'il existe un processus progressif H localement borné tel que $|H^n_t| \leq H_t$ pour tout t et tout n. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s \in [0,\, t]} \Big| \int_0^s H^n_u \, \mathrm{d}X_u \Big| = 0, \qquad \text{en probabilité.}$$

Exercice 5 (Fubini). Soit M une martingale locale continue. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(H(s,\omega,x),\, s \geq 0,\, \omega \in \Omega,\, x \in E)$ un processus borné tel que $H : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E \to \mathbb{R}$ soit mesurable par rapport à $\mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ (où $\mathscr{P}$ est la tribu progressive). Montrer que p.s.,

$$\int_E \Big(\int_0^t H(s,\omega,x)\, \mathrm{d}M_s(\omega) \Big)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^t \Big(\int_E H(s,\omega,x)\, \mu(\mathrm{d}x) \Big)\, \mathrm{d}M_s(\omega), \qquad \forall t \geq 0.$$

Exercice 6. Construire un exemple de semimartingale continue bornée X et de processus continu adapté borné H tel que $H \cdot X$ ne soit pas borné.

Exercice 7. Soient M et N des martingales locales continues nulles en 0.

(i) Soit $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s=0\}}\, \mathrm{d}s$. Montrer que $M_t X_t$ est une martingale locale.

(ii) Soient $C \subset \mathbb{R}$ et $D \subset \mathbb{R}$ des parties boréliennes telles que $C \cap D = \varnothing$. On pose $U_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s \in C\}}\, \mathrm{d}M_s$ et $V_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s \in D\}}\, \mathrm{d}M_s$. Montrer que U et V sont des martingales locales orthogonales.

Exercice 8. Soit M une martingale continue bornée dans L^2. Montrer que $M \cdot M$ est une martingale uniformément intégrable.

Exercice 9. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit H un processus progressif et borné, continu au point 0. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{B_\varepsilon} \int_0^\varepsilon H_s\, \mathrm{d}B_s = H_0\,, \qquad \text{en probabilité.}$$

Exercice 10. Soit M une martingale locale continue. Soit $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, c'est-à-dire, H est un processus progressif tel que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle M \rangle_s < \infty$ p.s.

(i) Montrer que pour tous réels $t \geq 0$, $a > 0$ et $b > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big| \int_0^t H_s\, \mathrm{d}M_s \Big| \geq a \Big) \leq \mathbb{P}\Big(\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle M \rangle_s \geq b \Big) + \frac{b}{a^2}.$$

On pourra considérer la martingale locale $H \cdot M$ arrêtée à un temps d'arrêt convenablement choisi.

(ii) Soit (H^n) une suite d'éléments de $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\, \mathrm{d}\langle M \rangle_s \to 0$ en probabilité. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t H_s^n\, \mathrm{d}M_s \to \int_0^t H_s\, \mathrm{d}M_s, \qquad \text{en probabilité.}$$

Exercice 11. Soit B un mouvement brownien et $H, K \in L_1^2(B)$. On suppose que $\int_0^1 H_s\, \mathrm{d}B_s = \int_0^1 K_s\, \mathrm{d}B_s$ p.s. Montrer que $H = K$ au sens où $\int_0^1 (H_s - K_s)^2\, \mathrm{d}s = 0$ p.s.

Exercice 12. On veut montrer que l'hypothèse $H, K \in L^2_1(B)$ n'est pas anodine dans l'exercice 11. On cherche à construire $H \in L^2_{loc}(B)$ tel que $\int_0^1 H_s^2 \,\mathrm{d}s > 0$ p.s. mais pourtant $\int_0^1 H_s \,\mathrm{d}B_s = 0$ p.s.

(i) Soit W un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. Pour $t \in [0,1[$, on pose $M_t = W_{t/(1-t)}$ et $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t/(1-t)}$. Montrer que $(M_t)_{t\in[0,1[}$ est une $\mathscr{G}_t$-martingale de crochet $t/(1-t)$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}[\int_0^1 (1-s)^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s] < \infty$. On peut donc définir $B_t = \int_0^t (1-s)\,\mathrm{d}M_s$ pour $t \in [0,1[$. Montrer que c'est un $\mathscr{G}_t$-brownien.

(iii) Montrer que $M_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} \,\mathrm{d}B_s$ pour tout $t \in [0,1[$.

(iv) Soit $\sigma = \inf\{t \geq 1 : W_t = 0\}$ et $\tau = \inf\{s \geq 1/2 : M_s = 0\}$. Montrer que $\tau = \sigma/(\sigma+1) \in [1/2, 1[$ p.s.

(v) Montrer que $H_t = \frac{1}{1-t}\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}$ est dans $L^2_{loc}(B)$ et que $\int_0^1 H_s \,\mathrm{d}B_s = M_\tau = 0$ p.s.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 6.

Exercice 1. Soient X et Y deux $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens réels indépendants, et soit H un processus progressif. On pose

$$\begin{aligned} \beta_t &= \int_0^t \cos(H_s)\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t \sin(H_s)\,\mathrm{d}Y_s, \\ \gamma_t &= \int_0^t \sin(H_s)\,\mathrm{d}X_s - \int_0^t \cos(H_s)\,\mathrm{d}Y_s\,. \end{aligned}$$

Montrer que β et γ sont des $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens indépendants.

Exercice 2 (Intégrale de Stratonovich). Soient X et Y deux semimartingales continues. L'intégrale de Stratonovich $\int_0^\cdot Y \circ \mathrm{d}X$ est définie par

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s := \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\,\langle X,\, Y\rangle_t\,.$$

(i) Montrer que pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0,\, t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{Y_{t_{i+1}^n} + Y_{t_i^n}}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s \qquad \text{en probabilité.}$$

(ii) Montrer que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3, alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ \mathrm{d}X_s.$$

Exercice 3. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien. Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s=0\}}\,\mathrm{d}B_s = 0$.

Exercice 4. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $x_0 \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. On pose $M_t := \|B_t\|^{-1}$.

(i) Montrer que M est une martingale locale.

(ii) Montrer que M est uniformément intégrable. Plus précisément, montrer que pour tout $\gamma \in (0, 3)$, il existe une constante C_γ telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[M_t^\gamma] \leq C_\gamma \min\{1, t^{-\gamma/2}\}$.

(iii) Montrer que M n'est pas une martingale.

Exercice 5. On considère un mouvement brownien $(B_t,\ t \geq 0)$ issu de $x > 0$, et on pose $T := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = 0\}$. Soit $f :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue à support compact. Calculer $\mathbb{E}(\int_0^T f(B_s)\,\mathrm{d}s)$.

Exercice 6. Soit M une martingale locale continue issue de 0 telle que $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s. Montrer que $\mathscr{E}(M)$ (martingale locale exponentielle) ne peut être une martingale uniformément intégrable.

Exercice 7. Soit M une martingale locale bornée. Montrer que p.s., $\langle M\rangle_\infty < \infty$ p.s.

Exercice 8. Soit $X = X_0 + M + V$ une semimartingale continue. On suppose qu'il existe une constante K telle que $\int_0^\infty |\mathrm{d}V_t| \le K$ et que $\sup_{t\ge 0} |M_t| \le K$. On pose

$$Y(x) := \int_0^\infty \mathrm{sgn}(X_s - x)\,\mathrm{d}M_s, \qquad x \in \mathbb{R},$$

où $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $= -1$ sinon. Soit $p > 0$ un nombre réel, et soient $x < y$.

(i) Pourquoi $Y(x)$ est-elle bien définie ?

(ii) Montrer que

$$\mathbb{E}[\,|Y(x) - Y(y)|^p\,] \le C_p\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x<X_s\le y\}}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\Big)^{p/2}\Big],$$

où C_p est une constante ne dépendant que de p.

(iii) Soit $g:\ \mathbb{R} \to [0,2]$ une fonction de classe C^1 telle que $g'(u) \ge \mathbf{1}_{]0,1]}(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$. On pose $G(u) := \int_0^u g(v)\,\mathrm{d}v$, et $\varphi(u) := G(\frac{u-x}{y-x})$, $u \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x<X_s\le y\}}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$ est majorée par

$$2(y-x)^2\Big[\,|\varphi(X_\infty) - \varphi(X_0)| + \Big|\int_0^\infty \varphi'(X_s)\,\mathrm{d}M_s\Big| + \int_0^\infty |\varphi'(X_s)|\,\cdot\,|\mathrm{d}V_s)|\,\Big].$$

(iv) Montrer que $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x<X_s\le y\}}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \le 12K(y-x) + 2(y-x)|\int_0^\infty g(\frac{X_s-x}{y-x})\,\mathrm{d}M_s|$.

(v) Montrer que pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}[\,|Y(x) - Y(y)|^p\,] \le C_{K,p}\,(y-x)^{p/2}$, où $C_{K,p}$ est une constante ne dépendant que de (K,p).

(vi) Le processus $(Y(x),\ x \in \mathbb{R})$ admet-il une version continue ?

Exercice 9. (i) Soit $g:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Soit $f:\mathbb{R}_+ \to]0,\infty[$ une fonction de classe C^2 telle que $f'' = 2gf$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$. On pose

$$u(t) := \frac{f'(t)}{2f(t)}, \qquad t \ge 0.$$

Montrer que $u' + 2u^2 = g$ sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit β un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel standard. Soient $x_0 \ge 0$ et $a \ge 0$ des réels positifs. Soit $(X_t,\ t \ge 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, tel que

$$X_t = x_0 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\,\mathrm{d}\beta_s + at.$$

Montrer que $u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,\mathrm{d}s = u(0)x_0 + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}X_s - 2\int_0^t u(s)^2 X_s\,\mathrm{d}s$, $t \geq 0$.

(iii) Posons $M_t := u(0)x_0 + 2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}\beta_s$, $t \geq 0$. Montrer que

$$f(t)^{-a/2} \exp\Big(u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,\mathrm{d}s \Big) = \mathscr{E}(M)_t.$$

(iv) Montrer que f est décroissante sur $[0,\, 1]$. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\int_0^1 g(s)X_s\,\mathrm{d}s \Big) \Big] = f(1)^{a/2} \mathrm{e}^{x_0 f'(0)/2}.$$

(v) Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 X_s\,\mathrm{d}s \Big) \Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{a/2}} \exp\Big(-\frac{x_0}{2}\, \theta \mathrm{th}\theta \Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vi) Soit B un mouvement brownien réel standard. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 (B_s + x)^2\,\mathrm{d}s \Big) \Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{1/2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\, \theta \mathrm{th}\theta \Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Soit $(B_t,\ t \in [0,1])$ un mouvement brownien issu de 0, et soit $(\mathscr{F}_t,\ t \in [0,1])$ (l'augmentation habituelle de) la tribu canonique de B. On se donne $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, et on pose $M_t := \mathbb{E}[\, f(B_1) \,|\, \mathscr{F}_t]$, $t \in [0,1]$. Écrire explicitement c et H tels que $M_t = c + \int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s$.

Exercice 11 (Troisième identité de Wald). Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard, et soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{T/2}) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\exp(B_T - \frac{T}{2})] = 1$.

Exercice 12. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit $S_t := \sup_{s\in[0,\,t]} B_s$. On pose $X_t := S_t - B_t$.

(i) Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_u \neq 0\}}\,\mathrm{d}S_u = 0$.

(ii) Montrer que $Y_t := X_t^2 - t$ est une (vraie) martingale.

(iii) Soit $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ X_t = 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(\tau)$.

Exercice 13. Soit B un mouvement brownien issu de 0 et, pour $a > 0$ et $\gamma > 0$, soit $T_a^\gamma = \inf\{t \geq 0 :\ B_t + \gamma t = a\}$.

(i) Montrer que $T_a^\gamma < \infty$ p.s.

(ii) En utilisant Girsanov, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda T_a^\gamma}] = \mathrm{e}^{\gamma a - \sqrt{(\gamma^2 + 2\lambda)a^2}}$.

Exercice 14. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard, et soit H un processus progressif. On suppose qu'il existe des constantes $0 < c \leq C < \infty$ telles que $c \leq H_t(\omega) \leq C$

pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, on a

$$\exp\Big(\frac{c^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big) \le \mathbb{E}\Big\{\exp\Big(\int_0^\infty f(t)H_t\,\mathrm{d}B_t\Big)\Big\} \le \exp\Big(\frac{C^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Exercice 15. Soit B un mouvement brownien issu de 0. Pour $\gamma \ge 0$, on pose $\tau_\gamma := \inf\{t \ge 0 : |B_t + \gamma t| = 1\}$. Montrer que $B_{\tau_\gamma} + \gamma\tau_\gamma$ et τ_γ sont indépendantes. Commencer par le cas $\gamma = 0$.

Exercice 16. Soit B un mouvement brownien standard, et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $b := \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |B_t + f(t)| \le x\Big) \le \mathrm{e}^{ax-(b/2)}\,\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |B_t| \le x\Big),$$

où $a := |f'(1)| + \int_0^1 |f''(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel standard. Soit U une variable aléatoire réelle $\mathscr{F}_1$-mesurable indépendante de B telle que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{aU^2}) < \infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$. On pose $f(t,x) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{xU - tU^2/2})$, $g(t,x) := \mathbb{E}(U\mathrm{e}^{xU-tU^2/2})$ et $h(t,x) := \frac{g(t,x)}{f(t,x)}$.

(i) Soit $L_t = \int_0^t h(s, B_s)\,\mathrm{d}B_s$. Montrer que $\mathscr{E}(L)_t = f(t, B_t)$.

(ii) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_1$ définie par $\mathbb{Q} := f(1, B_1)\cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_1}$. Montrer que $B_t - \int_0^t h(s, B_s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

(iii) On pose $\xi_t := B_t + tU$, $t \in [0,1]$. Montrer que pour toute fonctionnelle $F : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}\Big\{F(\xi_t,\ t\in[0,1])\Big\} = \mathbb{E}\Big\{f(1,B_1)F(B_t,\ t\in[0,1])\Big\}.$$

En déduire que $\xi_t - \int_0^t h(s,\xi_s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, est un $\mathbb{P}$-mouvement brownien.

(iv) Soit $\mathscr{G} := \sigma(\xi_t,\ t \in [0,1])$. Montrer que $\mathbb{E}(U\,|\,\mathscr{G}) = h(1, \xi_1)$.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 7.

Exercice 1. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. Résoudre l'EDS $\mathrm{d}X_t = |X_t|\,\mathrm{d}B_t + \frac{X_t}{2}\,\mathrm{d}t$ avec $X_0 = 0$.

Exercice 2. Considérons l'EDS $E_x(\sigma,\, b)$ en dimension 1.

(i) Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\frac{1}{2}s''\sigma^2 + s'\,b = 0$. Montrer que $(s(X_t),\, t \ge 0)$ est une martingale locale continue. One dit que s est la **fonction d'échelle** de X.

(ii) On suppose que σ est continue et que s' et σ ne s'annulent pas. Soient $a < x < b$ des réels, et soit $T_{a,b} := \inf\{t \ge 0 :\ X_t \notin]a,\, b[\,\}$ (avec $\inf \varnothing := \infty$). Montrer que $T_{a,b} < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s., et que $\mathbb{P}\{X_{T_{a,b}} = a\} = \frac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)}$.

Exercice 3. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. Résoudre l'EDS $\mathrm{d}X_t = \sqrt{1+X_t^2}\,\mathrm{d}B_t + \frac{X_t}{2}\,\mathrm{d}t$ avec $X_0 = x_0$.

Exercice 4. (i) Soit $X := (X_t,\, t \ge 0)$ solution de $E(\sigma,\, b)$ à valeurs dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Soit $f : D \subset \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\mathscr{L} f = \lambda f$, où $(\mathscr{L} f)(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Montrer que $(f(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t},\, t \ge 0)$ est une martingale locale continue.

(ii) Soit $B := (B^1,\, B^2,\, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $B_0 := a \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Soit $X := |B|^2$, où $|B|$ désigne la norme euclidienne de B. Montrer que X est solution d'une EDS $E(\sigma,\, b)$ dont on précisera les coefficients σ et b.

(iii) On suppose désormais $\lambda \ge 0$. Montrer que $2tf''(t) + 3f'(t) = \lambda f(t)$, $t > 0$, pour $f(t) = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{2\lambda t}}{\sqrt{2\lambda t}}$.

(iv) Soit $x > |a|^2$, et soit $T_x := \inf\{t \ge 0 :\ X_t = x\}$. Montrer que pour tout $\lambda \ge 0$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x}) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda |a|^2})}{\sqrt{2\lambda |a|^2}} \frac{\sqrt{2\lambda x}}{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda x})}$.

Exercice 5 (processus d'Ornstein–Uhlenbeck). (i) Soient H, Z et X trois semi-martingales (continues) telles que $X_t = H_t + \int_0^t X_s\,\mathrm{d}Z_s$. Exprimer X en termes de H, Z et $\mathscr{E}(Z)$. On pourra commencer par le cas $H \equiv 1$ et s'inspirer de la variation de la constante.

(ii) Résoudre l'EDS $X_t = x + B_t - \beta\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s$, où $x \in \mathbb{R}$ et $\beta \ge 0$ sont des constantes ; X est appelé processus d'Ornstein–Uhlenbeck.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P}, B)$ un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien (réel issu de 0) et σ et b des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)| \le M,\ |b(x)| \le M,\ |\sigma(x) - \sigma(y)| \le K|x-y|,\ |b(x) - b(y)| \le K|x-y|.$$

Soit, x étant fixé, X la solution de l'EDS $X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s$.

On considère le processus X^n défini pour $n \ge 1$ par:

$$X_0^n = x,\ X_t^n = X_{k/n}^n + \sigma(X_{k/n}^n)(B_t - B_{k/n}) + b(X_{k/n}^n)(t - \frac{k}{n}), \qquad \frac{k}{n} \le t \le \frac{k+1}{n},\ \ k = 0, 1, \cdots$$

On pose $\tau_s^n := \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{n}\,\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\, \frac{k+1}{n}[}(s)$.

(i) Montrer que $X_t^n = x + \int_0^t \sigma(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}s$.

(ii) Montrer qu'il existe A telle que $\mathbb{E}\{(X_t^n - X^n_{\tau^n_t})^2\} \le \frac{A}{n}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \ge 1$.

(iii) Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $\forall\, t \in [0,1]$, $\forall\, n \ge 1$,

$$\mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} \le C_1 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X_s^n)^2\}\,\mathrm{d}s + \frac{C_2}{n}.$$

En déduire qu'il existe une constante C_3 telle que $\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} \le \frac{C_3}{n}$, $\forall n \ge 1$.

(iv) Montrer qu'il existe une constante C_4 telle que pour toute fonction f à dérivées continues bornées, $|\mathbb{E}\{f(X_1^n) - f(X_1)\}| \le \|f'\|_\infty \frac{C_4}{\sqrt{n}}$, $\forall n \ge 1$.

Exercice 7. On s'intéresse à l'EDS $E(\sigma, b)$ avec $\sigma(t,x) := |x|^\alpha \wedge 1$ et $b(t,x) := 0$, où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$ est une constante fixée.

(i) Soit $Y_t := \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{B_s \neq 0\}}}{|B_s|^{2\alpha}\wedge 1}\,\mathrm{d}s$. Montrer que p.s., $Y_t < \infty$, $\forall t \ge 0$.

(ii) Montrer qu'il n'y a pas d'unicité faible (indic : méthode du changement de temps).

(iii) Montrer qu'il y a unicité trajectorielle si $\alpha \ge 1$.

Exercice 8. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard.

(i) Montrer qu'il existe un processus X continu adapté tel que

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)}\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

(ii) Montrer que X est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

(iii) Soit $X_t^* := \sup_{s\in[0,t]} |X_s|$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_t^*)^2\,] < \infty$ pour tout $t \ge 0$.

(iv) Soit $Y_t := \mathrm{e}^{1/(1+t)}(1 + X_t^2)$, $t \ge 0$. Montrer que Y est une surmartingale.

(v) Montrer que $\lim_{t\to\infty} |X_t|$ existe p.s.

(vi) En considérant la partie à variation finie de Y, montrer que $\int_0^\infty X_s^2\,\mathrm{d}s < \infty$, p.s.

(vii) En déduire que $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ p.s.

Exercice 9. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard. Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, soit X^x solution de $X_t^{x,\varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x,\varepsilon})\,\mathrm{d}s$ et $y^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ solution de $y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s))\,\mathrm{d}s$, $t \ge 0$. Montrer qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}\{\sup_{t\in[0,1]} |X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t)| > \delta\} \le c_1 \exp(-\frac{c_2\delta^2}{\varepsilon^2})$.

Exercice 10. Soit $(X_t,\ t \ge 0)$ continu et adapté, à valeurs dans $]0, \infty[$, tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2)\,\mathrm{d}s.$$

(i) Soit $\gamma \in]0, 1[$ un réel, et soit $\tau := \inf\{t \ge 0 :\ X_t \ge \gamma\}$ $(\inf \varnothing := \infty)$. On considère le processus $U_t := \frac{X^2_{t\wedge\tau}}{1 - X^2_{t\wedge\tau}}$, $t \ge 0$, qui est bien défini. Calculer U_t par la formule d'Itô.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(U_t) = 1$ pour tout $t \ge 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \le \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.

(iv) Montrer que p.s.$X_t < 1$ pour tout $t \ge 0$.

(v) Montrer que $V_t := \frac{X_t^2}{1 - X_t^2}$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on précisera les coefficients.

(vi) Écrire $(X_t,\ t \ge 0)$ en fonction de $(B_t,\ t \ge 0)$.