Table des matières

1 Introduction **2**
- 1.1 Objets étudiés 2
- 1.2 Thèmes abordés 4
- 1.3 Plan 7

2 Existence et positivité de densités pour des processus à sauts **8**
- 2.1 Introduction d'une dérivée intrinsèque 9
  - 2.1.1 E.D.S. 9
  - 2.1.2 E.D.P.S. 10
- 2.2 Utilisation de dérivées directionnelles 11
  - 2.2.1 Dérivation presque sûre 12
  - 2.2.2 Utilisation de forte monotonie 13
  - 2.2.3 Positivité de la densité: un critère brutal 14
  - 2.2.4 Caractérisation des points de positivité 14
- 2.3 Existence de densités: une méthode "élémentaire" 15
- 2.4 Perspectives 16

3 Equations de type Boltzmann spatialement homogènes **18**
- 3.1 Régularité et positivité 19
  - 3.1.1 Régularité 19
  - 3.1.2 Positivité 20
- 3.2 Résolution numérique 21
- 3.3 Perspectives 22

4 Equations de coagulation-fragmentation **23**
- 4.1 Interprétation probabiliste 24
  - 4.1.1 Conservation de la masse et gel 24
  - 4.1.2 Coagulation seule 24
  - 4.1.3 Coagulation et fragmentation explosive 25
- 4.2 Simulation et limites hydrodynamiques 27
  - 4.2.1 Un algorithme de simulation exacte 27
  - 4.2.2 Sur le processus de Marcus-Lushnikov 28
  - 4.2.3 Méthode particulaire dans le cas homogène 28
  - 4.2.4 Méthode particulaire dans le cas inhomogène 29
- 4.3 Comportement en temps grand 30
  - 4.3.1 Coagulation-fragmentation discrète: convergence à l'équilibre 30
  - 4.3.2 Coagulation continue: sur les solutions auto-similaires 31
  - 4.3.3 Sur un modèle inhomogène 32
- 4.4 Perspectives 33

5 Collisions élastiques, inélastiques, et coalescentes **34**
- 5.1 Existence, unicité, temps long 34
- 5.2 Perspectives 36

6 Processus de type branchement **38**
- 6.1 Comportement asymptotique de processus de branchement-diffusion 38
- 6.2 Sur une population de plantes en compétition 39
- 6.3 Perspectives 40

Bibliographie **42**

Chapitre 1

Introduction

Ce manuscrit résume six années de travail. Les travaux décrits ci-dessous ont étés menés avec Madalina Deaconu, Jean-Sébastien Giet, Philippe Laurençot, Sylvie Méléard, Stéphane Mischler, Bernard Roynette, et Etienne Tanré.
Les thèmes abordés paraissent relativement divers, mais ils sont tous reliés: les modèles étudiés, qu'ils soient déterministes ou stochastiques, concernent l'évolution temporelle de quantités subissant des changements d'états instantanés (dus par exemple à des impulsions éléctriques, des collisions, des coalescences, des fragmentations, des naissances ou des morts, des mutations...). En d'autres termes, les phénomènes que nous étudions sont discontinus.
Ce travail concerne des équations différentielles stochastiques (E.D.S.) et des équations aux dérivées partielles stochastiques (E.D.P.S.) à sauts (calcul des variations stochastiques et théorèmes de support), des équations de Boltzmann (existence, régularité, approximations numériques), des équations de coagulation-fragmentation (existence, unicité, approximations numériques, étude qualitative, comportement en temps long) et des processus de type branchement (approximation par des objets déterministes et comportement en temps long).

Dans cette introduction, nous essaierons dans un premier temps de décrire brièvement les objets que nous avons étudié. Nous exprimerons ensuite nos préocupations de manière générale, et le lien entre les différents objets. Enfin, nous présenterons le plan de ce travail de synthèse.

1.1 Objets étudiés

Nous présentons ici rapidement les différents objets étudiés.

E.D.S. à sauts. Les équations différentielles stochastiques avec sauts modélisent l'évolution au cours du temps d'une quantité aléatoire Markovienne $\{X_t\}_{t\geq 0}$, soumise à des changements *immédiats* d'états. Le processus $\{X_t\}_{t\geq 0}$ peut représenter, par exemple, la taille d'une population discrète, le nombre de personnes en attente dans une file d'attente, la vitesse d'une particule soumise à des collisions instantanées, la masse d'une particule subissant des coalescences ou des fragmentations, etc... Le cas le plus simple est

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_E h(s, X_{s-}, z) N(ds, dz), \tag{1.1}$$

où E est un espace mesuré, où N est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$, et où X_{s-} (la limite à gauche de X en s) représente l'état de X juste avant un saut éventuel à l'instant s. La fonction $h(s, x, z)$ représente la taille du saut de X à l'instant s si $X_{s-} = x$ et si la mesure de Poisson a *choisi* le couple (s, z).
On peut bien sûr ajouter des termes de dérive et de diffusion à la dynamique de $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Nous renvoyons par exemple à Ikeda-Watanabe [56] pour des résultats d'existence et d'unicité pour de telles équations, et à Jacod-Shiryaev [60] pour tout renseignement sur les processus à sauts. Tous les travaux présentés ici étudient ou utilisent plus ou moins explicitement de telles équations.

E.D.P.S. à sauts. Les équations aux dérivées partielles stochastiques que nous étudions ont été introduites par Walsh [111, 112]. Dans [111], Walsh tente de modéliser le potentiel éléctrique $V(x,t)$ au point x à l'instant $t \geq 0$, dans une membrane nerveuse. La membrane étant supposée cylindrique, des arguments d'échelle et de symétrie permettent de se ramener au cas où $x \in [0,1]$. Walsh affirme que V satisfait une E.D.P.S. Poissonnienne de type

$$\partial_t V(x,t) = \partial_{x^2} V(x,t) + g(V(x,t)) + F(x,t), \tag{1.2}$$

où F est un processus ponctuel de Poisson représentant les *stimuli*. Walsh montre ensuite que, les *stimuli* étant nombreux et petits, on peut approcher F par un bruit blanc Gaussien, et donc V par un processus continu. Une étude approfondie de l'équation obtenue (sensiblement généralisée) est menée dans [112], et a été developpée par beaucoup d'auteurs, citons par exemple [12, 13, 91]. Comme dans [3, 97], nous tentons ici d'obtenir des résultats sur le modèle avec sauts initialement introduit dans [111].
Outre l'aspect physique, les E.D.P.S. sont intéressantes car elles ne possédent pas la propriété de Markov, les solutions ne sont pas limitées à gauche en t, etc... Ceci oblige à approfondir considérablement les techniques d'E.D.S. La notion de solution, par exemple, n'est pas facile à définir. Nous étudions ce type d'objet dans [114, 118].

Equations de Boltzmann. L'équation de Boltzmann décrit la densité $f(t,x,v) \geq 0$ de particules de position $x \in D \subset \mathbb{R}^3$ et vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \geq 0$, dans un gaz raréfié (à haute altitude). Elle s'écrit

$$\partial_t f(t,x,v) + v.\nabla_x f(t,x,v) = Q(f(t,.))(x,v), \tag{1.3}$$

où Q est un opérateur de collisions binaires agissant sur les vitesses,

$$Q(f)(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{S^2} d\nu B(v,v_*,\nu)[f(x,v')f(x,v'_*) - f(x,v)f(x,v_*)]. \tag{1.4}$$

Les vitesses *pré-collisionelles* v' et v'_* sont des fonctions explicites de v, v_* et du paramètre d'impact ν. Quand deux particules de vitesses v' et v'_* se choquent, avec un *paramètre d'impact* ν, leurs vitesses *post-collisionnelles* sont v et v_*. Finalement, la *section efficace* $B(v,v_*,\nu) = B(v',v'_*,\nu)$ représente le taux auquel deux particules de vitesses v et v_* se choquent avec un paramètre d'impact ν. L'équation est donc relativement simple: le terme Q *compte* les collisions, et le terme de transport $v.\nabla_x f$ exprime le fait que la vitesse d'une particule est donnée par la dérivée de sa position. Nous renvoyons aux livres de Cercignani-Illner-Pulvirenti [25], Villani [108], et à l'article de revue de Desvillettes [34] pour d'amples détails. Cette équation est depuis bien longtemps un centre d'intérêt pour les mathématiciens, citons les travaux fondateurs d'Arkeryd [7] et de Di Perna-Lions [37], et les avancées récentes de Villani [106, 107].
Du point de vue mathématique, l'équation de Boltzmann générale est extrêmement compliquée. Nous considérerons ici le cas homogène en espace, i.e. où la solution f ne dépend pas de la variable d'espace x. Nous étudierons aussi le plus souvent les cas de la dimension 1 (modèle de Kac) et 2. Enfin, nous supposerons souvent que les particules sont *Maxwelliennes*, c'est à dire que la section efficace ne dépend pas des vitesses. Nous nous concentrerons essentiellement sur le problème *sans cutoff angulaire* où la section efficace est autorisée à exploser pour les collisions engendrant de petites déviations (collisions *rasantes*). Ceci occasionne une différence considérable de comportement des solutions, puisque dans le cas sans cutoff (resp. avec cutoff), chaque particule subit une infinité (resp. un nombre fini) de collisions sur chaque intervalle de temps borné.
Nous étudions ce type d'équations dans [115, 117, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 127].

Equations de coagulation-fragmentation. Considérons un système infini de particules caractérisées par leur masse $i \in \mathbb{N}_*$. Supposons que deux particules de masses i et j s'aggrègent avec taux $a_{i,j}$, pour donner une particule de masse $i+j$, et qu'une particule de masse $i+j$ se fragmente au taux $b_{i,j}$ pour donner deux particules de masses i et j. Notons $c_i(t) \geq 0$ la concentration (nombre par unité de masse) de particules de masse i à l'instant $t \geq 0$. Les équations de coagulation-fragmentation s'écrivent

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_*, \quad \partial_t c_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}(a_{j,i-j}c_j c_{i-j} - b_{j,i-j}c_i) - \sum_{j=1}^{\infty}(a_{i,j}c_i c_j - b_{i,j}c_{i+j}). \tag{1.5}$$

Par exemple, le terme $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i-j}c_j c_{i-j}$ représente l'apparition de particules de masse i par coalescence de particules plus petites, le facteur $1/2$ évitant de compter deux fois chaque paire $\{j, i-j\}$. Le terme $\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}c_{i+j}$ exprime l'apparition de particules par fragmentation de particules plus grosses. Les autres termes ont des significations similaires.
Plusieurs variantes de ces équations sont possibles: on peut considérer le cas où les masses sont *continues*, c'est à dire peuvent prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+$. On peut aussi s'intéresser à des équations non spatialement homogènes, qui prennent en compte les positions des particules et leurs mouvements (le plus souvent de type *diffusion*).
L'équation de coagulation pure ($b_{i,j} \equiv 0$) a été introduite par Smoluchowski [99]. Les applications sont diverses: physique (formations de gouttelettes, fumée,...), chimie (polymérisation,...), astrophysique (formation des galaxies), biologie (hématologie, regroupement d'animaux). On renvoie à Drake [38], Aldous [5], Laurençot-Mischler [69] pour des articles de revue sur le sujet. Voir aussi Bertoin [15, 16] pour des modèles aléatoires de fragmentation pure. L'étude de ces équations connaît un essor relativement récent. Nous nous intéressons à ce sujet dans [125, 126, 129, 130, 132, 133, 136, 137, 140, 142].

Equations de coagulation-collision. La *combinaison* des équations de Boltzmann et de coagulation s'avère fondamentale dans l'étude des brouillards de gouttelettes (par exemple dans un carburateur), voir O'Rourke [90], Villedieu-Simonin [109]. Nous étudions, dans [135, 138], la concentration $f(t, m, v)$ de particules de masse $m \in \mathbb{N}_*$ et de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \geq 0$, dans un système où les particules sont soumises à des collisions (élastiques ou inélastiques) et à des coalescences. Ce modèle a été abondamment étudié par les physiciens (voir les nombreuses références dans [109]), mais il n'existe manifestement aucun traitement rigoureux général. Bien sûr, coupler les équations de Boltzman et de coalescence n'est pas simple, puisque les quantités conservées ne sont pas les mêmes, les fonctionnelles de Lyapunov de l'une ne s'appliquent pas à l'autre, etc...

Processus de type branchement avec dépendance spatiale. Considérons une population d'individus caractérisés par un paramètre $x \in \mathcal{X}$, par exemple par leur position, un caractère génétique plus ou moins héréditaire, ... On suppose que la population suit une dynamique aléatoire Markovienne. Dynkin définit dans [41] ce type de processus stochastiques.
Dans [131], nous considérons le cas où chaque individu se déplace suivant une diffusion, meurt avec un taux λ et donne naissance à un nombre aléatoire d'individus (suivant une loi binaire dépendant de la position), situés au même endroit.
Dans [134] (voir aussi [139]), nous étudions un modèle plus compliqué, introduit par les biologistes Bolker-Pacala [21] et Dieckman-Law [36]. Dans ce modèle, chaque individu est immobile, mais sa progéniture se disperse au moment de la naissance. D'autre part, les individus se gênent, ce qui conduit à un phénomène d'*auto-régulation* par compétition.

1.2 Thèmes abordés

Nous expliquons ici rapidement les propriétés que nous étudions.

Existence et unicité. Tous les objets présentés ci-dessus ne sont pas clairement bien définis. Il faut donner une notion de solution, en utilisant leurs propriétés *a priori*, puis démontrer qu'une telle solution existe, et, si possible, est unique. Nous étudions de manière approfondie l'existence de solutions de certaines E.D.P.S. [114], de l'équation de Boltzmann spatialement homogène tri-dimensionnelle sans cutoff [120], de l'équation de coagulation fragmentation avec un taux de fragmentation *explosif* [130], et de l'équation de coagulation-collision [138].

Interprétation probabiliste d'équations déterministes. Considérons par exemple l'équation de Boltzmann homogène. La solution éventuelle $f(t, v)$ est naturellement, pour chaque $t \geq 0$, une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^3$. En effet, $Q_t(dv) = f(t, v)dv$ représente la distribution des vitesses des particules à l'instant

$t \geq 0$. On peut donc essayer de construire un processus stochastique $\{V_t\}_{t\geq 0}$, tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{L}(V_t) = Q_t$. On souhaite naturellement que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ représente l'évolution des vitesses d'une particule *typique*. Donc $\{V_t\}_{t\geq 0}$ doit être Markovien, à trajectoires càdlàg, et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Nous construirons $\{V_t\}_{t\geq 0}$ comme la solution d'une E.D.S. à sauts. Cette E.D.S. sera relativement compliquée: la distribution des vitesses des autres particules (i.e. la densité f, soit encore la loi de V_t) intervient dans la dynamique du processus $\{V_t\}_{t\geq 0}$. On parle alors d'E.D.S. *non linéaires*.
Les travaux fondateurs concernant ce sujet sont dus à Tanaka, [103] et Sznitman [101], voir aussi Graham-Méléard [53]. Nous étendons ou utilisons ces travaux concernant l'équation de Boltzmann dans [125, 126, 129, 130, 132, 133, 135, 136, 137, 138]. Nous tenterons aussi d'adapter la méthode aux équations de coagulation-fragmentation, en définissant un processus $\{M_t\}_{t\geq 0}$, représentant l'évolution de la masse d'une particule typique, aussi solution d'une E.D.S. à sauts, dans [125, 126, 129, 130, 133, 136]. Jourdain [62] a aussi travaillé à ce sujet. Enfin, nous appliquerons cette technique aux équations de coagulation-collision dans [135, 138].
Les intérêts de telles représentations probabilistes d'équations déterministes sont multiples. Tout d'abord, on peut espérer améliorer la compréhension de l'équation étudiée. De plus, le processus $\{V_t\}_{t\geq 0}$ contient plus d'information que la solution $f(t,v)$ de l'équation de Boltzmann: en plus de la distribution à tout instant, il décrit l'historique des particules. Ceci peut permettre d'obtenir des résultats sur la régularité et sur le comportement en temps long de $f(t,v)$ (voir les paragraphes ci-dessous). Enfin, on déduit de la représentation probabiliste une méthode *particulaire stochastique* de résolution numérique de l'équation (voir le paragraphe ci-dessous).

Calcul des variations stochastiques pour les processus à sauts: existence, régularité de densités. Considérons une mesure de Poisson $N(dt,dz)$ sur $\mathbb{R}_+ \times E$, où E est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, d'intensité régulière. Considérons une fonctionnelle Z de cette mesure de Poisson, par exemple $Z = X_t$, où $t > 0$ est fixé et où X est la solution de l'E.D.S. (1.1). On se demande quelles conditions sur Z (ou sur les paramètres de (1.1)) suffisent pour assurer que la loi de Z a une densité, éventuellement régulière. Dans le cas de fonctionnelles du mouvement Brownien, Malliavin [77] a introduit le fameux calcul des variations stochastiques. Bismut [19] a adapté la méthode aux fonctionnelles de mesures de Poisson, ce qui a été approfondi par Bichteler-Gravereaux-Jacod [17], voir aussi [23, 92, 31] pour des méthodes alternatives.
Dans [114], nous approfondissons les méthodes de [17] afin d'obtenir l'existence d'une densité pour la loi de la solution d'une E.D.P.S. à sauts.
Dans [115], nous adaptons les méthodes de [17] afin de démontrer que sous l'hypothèse d'une section efficace Maxwellienne, la solution de l'équation de Boltzmann 2D (qui peut être vue comme la loi de la solution d'une E.D.S. à sauts) est C^∞ pour tout $t > 0$, même si la condition initiale est irrégulière. Cette propriété de régularisation a été d'abord découverte par Desvillettes [33], et ses résultats ont été améliorés, dans le cadre de la dimension 1, par Graham-Méléard [54], qui utilisent le calcul des variations stochastiques.
Des tentatives de méthodes alternatives, ne concernant que l'existence de densité, sont proposées dans [127] (avec une application à une équation de Boltzmann non Maxwellienne) et dans [128, 141] (avec une application dans [130] à une équation de fragmentation).

Théorème de support et positivité de densités pour des processus à sauts. Considérons comme précédemment une mesure de Poisson $N(dt,dz)$ d'intensité régulière, et une fonctionnelle Z de cette mesure de Poisson, par exemple $Z = X_t$, où $t > 0$ est fixé et où X est la solution de l'E.D.S. (1.1). On se demande maintenant sous quelles conditions sur Z (ou sur les paramètres de (1.1)) la loi de Z est minorée par une mesure admettant une densité continue et strictement positive. Plus précisément, dans le cas où la loi de Z possède une densité f, peut-on caractériser l'ensemble des points de positivité de f. Dans le cas de fonctionnelles Browniennes, les travaux de Ben Arous-Léandre [14] répondent à cette question, et Bally-Pardoux [13] étendent la méthode aux E.D.P.S. continues. D'autre part, Léandre donne un début de réponse pour les processus à sauts dans [73]. Enfin, la positivité de la densité (et même le comportement asymptotique de la densité) en temps petit a été étudiée dans [72, 57, 93].
a) Forte non-dégénerescence. Dans [116], nous démontrons que la loi de X_t est minorée par une mesure

à densité positive partout, pour tout temps $t > 0$, sous une hypothèse de forte non-dégénérescence sur les coefficients de (1.1), dans le cas de la dimension 1. Nous utilisons pour cela le calcul des variations stochastiques de Bismut, [19], Bichteler-Gravereaux-Jacod [17]. Nous appliquons la méthode aux E.D.S. non linéaires associées aux équations de Boltzmann 1D et 2D Maxwelliennes sans cutoff dans [117, 119]. L'hypothèse de forte non-dégénerescence se traduit, dans le cadre de l'équation de Boltzmann, par un caractère suffisamment explosif de la section efficace au voisinage des collisions rasantes. Ces résultats concernant l'équation de Boltzmann semblent faibles (dans le cas avec cutoff, Pulvirenti-Wennberg [95] obtiennent des minorations explicites par des gaussiennes), mais sont les premiers dans cette direction. Notons que Villani s'est interessé à la question depuis, et il semble être capable de généraliser et simplifier nos résultats.
b) Théorèmes de support. La caractérisation du support de la loi de $\{X_t\}_{t\geq 0}$, en tant que processus, a d'abord été étudiée dans le cas d'E.D.S. Browniennes. Le fameux résultat de Stroock-Varadhan [100] explique que le support de la loi de la solution d'une E.D.S. Brownienne est la fermeture d'un ensemble bien choisi d'E.D.O. Leur preuve a été simplifiée par Millet-Sanz [82], et de nombreux auteurs ont raffiné et étendu ce résultat. Léandre [73] traîte le cas d'E.D.S. à sauts particulièrement simples, mais le premier résultat général est dû à Simon [98].
Nous tentons d'appliquer la méthode de Simon aux E.D.P.S. à sauts dans [118].
c) Caractérisation de la positivité de la densité. Dans le cas de la solution $\{X_t\}_{t\geq 0}$ d'une E.D.S. Brownienne, Ben Arous-Léandre [14] utilisent à la fois le calcul des variations stochastiques et les outils des théorèmes de support pour caractériser l'ensemble des points de positivité de la densité de X_t, à t fixé, voir aussi Aida-Kusuoka-Stroock [1]. C'est bien sûr (*a posteriori*) relativement naturel. Léandre [73] donne encore des pistes d'extension aux processus à sauts. Dans [121], nous donnons un résultat relativement satisfaisant concernant les E.D.S. à sauts. Puis nous l'appliquons pour montrer que la solution $f(t, v)$ de Boltzmann 1D Maxwellienne ne s'annule jamais, dès que $t > 0$, si la section efficace est sans cutoff mais pas trop explosive (le résultat est complémentaire de celui de [116]).

Approximation numérique, simulation, limites "hydrodynamiques". Dans le cadre des équations de Boltzmann et de coagulation-fragmentation, les interprétations probabilistes en termes d'E.D.S. non linéaires fournissent, une fois les E.D.S. *linearisées*, des méthodes particulaires stochastiques de résolution numérique. Au delà de l'intérêt numérique, on peut espérer, bien sûr, que la justification des méthodes numériques est liée à la validation des équations déterministes. En effet, ces équations décrivent l'évolution de distributions (de vitesses par exemple) d'un système de particules aléatoires en interaction.
a) Equation de Boltzmann. Citons tout d'abord Nanbu [85], Sznitman [101], Babovski-Illner [9], Wagner [110], Graham-Méléard [53] sur la convergence de systèmes particulaires stochastiques vers la solution de l'équation de Boltzmann. Nous tentons d'obtenir ces convergences sous des hypothèses affaiblies dans [120, 123, 124]. Nous nous intéressons ensuite à un *théorème de la limite centrale* associé dans [122], basé sur les travaux de Ferland-Fernique-Giroux [51] et Méléard [80]. Ce résultat donne une vitesse de convergence de l'algorithme de simulation, dans un cadre relativement restreint.
b) Equation de coagulation-fragmentation. L'algorithme de Marcus-Lushnikov [78, 76] est un système de particules stochastiques en interaction (ces particules s'aggrègent), qui approche la solution de l'équation de coagulation quand le nombre de particules tend vers l'infini. Ce système est physiquement très raisonnable, et des preuves de convergence ont été données par Jéon [61] et Norris [86]. Nous démontrons, dans [132], que si le noyau de coagulation est trop *explosif*, alors le système de Marcus-Lushnikov converge vers une équation de coagulation modifiée, qui prend en compte l'interaction entre une particule de masse *infinie* avec le reste du système (modèle de Flory [52], voir aussi [45]). Ceci étend un résultat de Norris [87], qui traitait de noyaux particuliers.
Récemment, Babovski [8] puis Eibeck-Wagner [42] ont introduit un nouveau système de particules, moins *physique* mais numériquement plus efficace. Nous réobtenons ce système de particules à l'aide de l'interpretation probabiliste de [125] et étudions sa vitesse de convergence dans [126], et nous étendons la technique à un cadre non spatialement homogène dans [129].
Enfin, nous obtenons une méthode alternative dans [133]. Cette méthode est basée sur un nouvel algorithme: nous simulons, de manière parfaitement exacte (c'est à dire sans approximation d'aucune

sorte), un processus stochastique dont la loi est solution de l'équation de coagulation. L'intérêt de cette méthode est surtout théorique: elle fournit une preuve d'existence immédiate et constructive. Il est de plus intéressant d'obtenir une méthode de simulation (exacte) d'un processus non linéaire. Enfin, bien que globalement moins puissante que les techniques particulaires, cette méthode offre quelques avantages du point de vue de la résolution numérique.
c) Processus de Branchements. Enfin, nous considérons, dans [134], une population d'individus en compétition se reproduisant et décédant aléatoirement. Nous montrons que cette population peut être approchée, dans un certain sens, par une fonction déterministe $f(t,x)$, la *densité de nombre*, solution d'une équation d'évolution intégrale. Cette équation intégrale, bien qu'assez délicate, est plus simple que le système stochastique.

Comportement en temps long. Enfin, le comportement en temps long de tous les phénomènes décrits précédemment est particulièrement intéressant. Nous n'avons travaillé que récemment à la question. Nous étudions, dans [136], un modèle de coagulation spatial où les particules sont attirées par l'origine. Nous montrons, sous de multiples hypothèses qu'en temps grand, toutes les particules forment un unique amas situé à l'origine.
Nous obtenons dans [137] un résultat de convergence à l'équilibre pour des équations discrètes de coagulation-fragmentation sans hypothèse d'équilibre en détail ou réversibilité). Il semble que ce résultat soit le premier dans cette direction: les travaux précédents supposaient l'existence d'un équilibre en détail, voir par exemple [2, 10, 24, 40, 58].
Dans [140], nous démontrons l'existence de solutions *auto-similaires* de l'équation de coagulation. Une solution auto-similaire est en quelque sorte un *équilibre dynamique*, puisque qu'elle est caractérisée par une *vitesse* de croissance et par un *profil*. Ceci confirme en partie une célèbre conjecture, voir par exemple [5, 74, 69]. Nous démontrons rigoureusement dans [142] certaines propriétés fines de cette solution auto-similaire, dans un cas particulier. Ceci confirme des résultats intuitifs obtenus par les physiciens, voir par exemple [74, 39].
Nous n'utilisons pas, dans [137, 140, 142], les probabilités pour parvenir à nos fins.
Dans [138] (voir [135] pour une version simplifiée), nous donnons plusieurs comportement asymptotiques de la solution de l'équation de collisons élastiques, inélastiques, et coalescentes. Suivant la positivité ou nullité des taux des diverses collisions, nous démontrons que la solution tend vers une Maxwellienne, une masse de Dirac en 0 (en vitesse), ou que toute la masse part à l'infini. Ces résultats étendent de manière conséquente ceux de Laurençot-Mischler [69], et reposent en partie sur l'utilisation du processus stochastique associé à l'équation.

Dans [131], nous considérons un processus de branchement-diffusion. Sous des hypothèses adéquates, nous démontrons que si la population ne s'éteint pas, alors elle explose avec une vitesse exponentielle explicite. Nous obtenons le *profil*, i.e. la *distribution* asymptotique de la population.
Enfin, nous étudions succintement le comportement en temps long d'une population auto-régulée dans [134]: exemples d'extinction, de survie, et d'états d'équilibre pour le modèle stochastique, exemples de convergence à l'équilibre pour son approximation déterministe.

1.3 Plan

Nous commençons au Chapitre 2 avec les E.D.S. et E.D.P.S. à sauts. Nous poursuivons dans le Chapitre 3 avec les équations de Boltzmann. Nous étudions ensuite les équations de coagulation-fragmentation au Chapitre 4, puis de coagulation-collision au Chapitre 5. Nous concluons avec les processus de type branchement spatial au Chapitre 6.

Chapitre 2

Existence et positivité de densités pour des processus à sauts

Nous nous proposons ici de présenter les résultats des articles [114, 116, 119, 121, 127, 128, 141]. Tous ces travaux portent sur le calcul des variations stochastiques et les théorèmes de support pour des processus à sauts, et sont largement inspirés de Bismut [19] et Bichteler-Gravereaux-Jacod [17].
Les motivations essentielles des travaux exposés ci-dessous sont l'application aux équations de Boltzmann, et, marginalement, aux équations de coagulation-fragmentation.
Nous n'avons pas travaillé dans les directions intéressantes développées par Carlen-Pardoux [23], Denis [31] (voir aussi Picard [92]), qui ne semblent pas s'appliquer aux équations de Boltzmann et de coagulation-fragmentation.

Exposons tout d'abord la principale préoccupation de ce chapitre. Considérons un processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$, homogène en temps, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$), de générateur infinitésimal

$$\mathcal{K}\phi(x) = b(x)\phi'(x) + \int_O \{\phi(x + h(x,z)) - \phi(x)\}\, \varphi(z)dz, \tag{2.1}$$

pour toute fonction ϕ suffisamment régulière, tout x dans $\mathbb{R}$. On suppose que O est un ouvert de $\mathbb{R}$, que $h : \mathbb{R}\times O \mapsto \mathbb{R}$ et $\varphi : O \mapsto \mathbb{R}_+$ sont des fonctions données. On suppose aussi que $X_0 = x_0$ est déterministe. Ceci signifie que le processus X part de x_0, et saute, quand sa position est x, d'une amplitude $h(x, z)$ avec un taux $\varphi(z)$. On se demande si la loi de X_t admet une densité pour tout temps $t > 0$, et si cette densité est positive partout. Autrement dit, l'opérateur $\mathcal{K}$ est-il régularisant?

L'idée intuitive est la suivante: si $\int_O \varphi(z)dz = \infty$, alors X saute infiniment souvent: pour tout $0 < s < t$, X a presque sûrement une infinité de sauts entre s et t. Les sauts de X sont d'autre part de la forme $h(X_{t-}, Z)$, avec Z une variable aléatoire indépendante de X_{t-} à densité (en gros de densité $\varphi(z)$). Si $h'_z(x, z)$ est souvent non nulle, ceci implique que les sauts $h(X_{t-}, Z)$ sont souvent à densité, ce qui procure une densité à X après le saut, puisque, en gros, $X_t = X_{t-} + h(X_{t-}, Z)$, avec Z indépendante de X_{t-}. Comme X saute instantanément après 0, X_t a donc une densité dès que $t > 0$. Cette idée intuitive est particulièrement délicate à mettre en oeuvre.

Un résultat important est dû à Bichteler-Jacod [18]. Considérons l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_{s-})ds + \int_0^t \sigma(X_{s-})dB_s + \int_0^t \int_O h(X_{s-}, z)\tilde{N}(ds, dz), \tag{2.2}$$

où $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, et $\tilde{N}$ est la mesure *compensée* d'une mesure de Poisson N sur $[0, T] \times O$, d'intensité $\varphi(z)dzds$, avec O un ouvert de $\mathbb{R}$. Le générateur du processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est donné par $\mathcal{L}\phi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x) + \mathcal{K}\phi(x)$ (sous une forme *compensée*). Le théorème principal de [18] est le suivant.

Théorème 1 (Bichteler-Jacod [18]) *Supposons que $\varphi \equiv 1$. Suppons que $b, \sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions deux fois dérivables à dérivées bornées. Supposons que $h : \mathbb{R} \times O \mapsto \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\times O$, que h'_z, h''_{zx}, h''_{zz} sont bornées et qu'il existe une fonction $\eta \in L^2 \cap L^4(O, dz)$ telle que $|h(0, z)|+$*

$|h'_x(x,z)| + |h''_{xx}(x,z)| \leq \eta(z)$. *Considérons l'unique solution* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *de (2.2). Alors, si l'hypothèse de non dégénerescence*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) > 0 \quad ou \quad \int_O 1\!\!1_{\{h'_z(x,z)\neq 0\}} dz = \infty \tag{2.3}$$

est satisfaite, la loi de X_t *admet une densité sur* $\mathbb{R}$ *dès que* $t > 0$.

En fait, le résultat de [18] est plus général, puisqu'ils ajoutent un second terme Poissonnien à (2.2), éventuellement irrégulier en z.
Notons que Bichteler-Gravereaux-Jacod [17] ont aussi travaillé à la régularité des densités. Les travaux [18, 17] reposent sur l'utilisation de formules d'intégration par parties: il existe des variables aléatoires $G_t \geq 0$ et $DX_t \geq 0$ telles que pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $E[\phi(X_t)G_t] = -E[\phi'(X_t)DX_t]$. Ceci permet d'obtenir, si $DX_t > 0$ p.s., l'existence d'une densité pour la loi de X_t. Les techniques développées de la sorte permettent aussi de démontrer que la densité obtenue est régulière. Nous présentons ci-dessous des méthodes alternatives, permettant de se passer de formules d'intégration par parties, ce qui conduit à des affaiblissements d'hypothèses concernant l'existence de densités. Le défaut de telles méthodes est qu'on n'espère pas les utiliser pour démontrer la régularité des densités.
Pour traiter le cas des E.D.S. non linéaires associées aux équations de Boltzmann, les méthodes développées dans [18, 17] sont satisfaisantes dans le cas de sections efficaces Maxwelliennes, où le taux de collision de dépend pas des vitesses. Pour traiter le cas général, il faudrait pouvoir remplacer la fonction *taux* $\varphi(z)$ par une fonction des deux variables x et z.

Nous découpons le chapitre en quatre sections. Nous exposerons d'abord une nouvelle notion de dérivation des fonctionnelles de mesures de Poisson. Cette notion n'est pas vraiment *nouvelle*, car elle est sous-jacente dans [17]. Nous étendons ensuite les méthodes de Bichteler-Jacod [18], basées sur une méthode de perturbations, afin d'affaiblir leurs hypothèses ou de démontrer des résultats de positivité. Nous donnons ensuite une méthode alternative, qui ne repose pas sur un calcul des variations stochastiques, et qui conduit à des résultats nouveaux concernant l'existence de densités. Enfin, nous exposons quelques perspectives.

Remarquons enfin que nos résultats récents [141] concernant l'existence de densités pour des processus à sauts (voir Section 2.3 ci-dessous) rendent caduques certains de nos anciens résultats, au moins dans le cadre strict de ce chapitre ([113] Chapitre 2 et [127, 128], voir Théorèmes 2, 5, et 7 ci-dessous). Nous résumons néanmoins tous ces articles: les méthodes utilisées restent intéressantes.

2.1 Introduction d'une dérivée intrinsèque

Nous résumons ici [114] (voir aussi [113], Chapitre 1) et [113], Chapitre 2. Bien que l'intérêt de la méthode porte surtout sur ses applications à des objets plus compliqués, comme les solutions d'E.D.P.S., nous considérerons dans un premier temps le cas des E.D.S.

2.1.1 E.D.S.

Nous démontrons ([113], Chapitre 2, Theorem 1.2) un résultat qui généralise un peu le Théorème 1.

Théorème 2 *Supposons que* φ *est* C^1 *et strictement positive sur* O, *que les fonctions* $b, \sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *sont* C^1 *à dérivées bornées, et que la fonction* $h : \mathbb{R} \times O \mapsto \mathbb{R}$ *admet les dérivées continues* $h'_x, h'_z, h''_{zx} = h''_{xz}$. *Supposons que* h'_z *et* h''_{zx} *sont bornées, et que il existe une fonction* $\eta \in L^2(O, \varphi(z)dz)$ *telle que* $|h(0,z)| + |h'_x(x,z)| \leq \eta(z)$. *Considérons l'unique solution* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *de (2.2). Alors, sous l'hypothèse de non dégénerescence*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) \neq 0 \quad ou \quad \int_O 1\!\!1_{\{h'_z(x,z)\neq 0\}} \varphi(z) dz = \infty \tag{2.4}$$

la loi de X_t *admet une densité sur* $\mathbb{R}$ *dès que* $t > 0$.

Afin de démontrer un tel résultat, on prouve que pour $t > 0$, l'application $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est suffisamment injective (i.e. C^1 dans un certain sens, à dérivée presque partout non nulle). Ceci implique que deux réalisations de X_t seront presque sûrement différentes, puis que la loi de X_t possède une densité. Pour cela, il faut définir une notion de dérivation de X_t par rapport à ω, c'est à dire par rapport au mouvement brownien et/ou à la mesure de Poisson. Dans [113], Chapitre 2 et [114], nous construisons un calcul de Malliavin pour les fonctionnelles de la mesure de Poisson, et nous utilisons le calcul de Malliavin classique sur l'espace de Wiener associé au mouvement Brownien (voir par exemple Nualart [89]). Nous définissons donc deux opérateurs de dérivation, sur l'espace canonique produit. Le premier, $\mathcal{D}^W_\tau$, associé au bruit blanc, est standard. Le second, $\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta}$, lié à la mesure de Poisson, tente de définir "proprement" la dérivée suivante : si X est une variable sur l'espace canonique Ω associé à N, si $\omega \in \Omega$, et si $(\tau, \zeta) \in \operatorname{supp} \omega$ (rappelons que tout $\omega \in \Omega$ est une mesure de comptage sur $[0, T] \times O$ et que O est ouvert) :

$$\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} X(\omega) = \frac{\partial}{\partial \lambda} X(\omega - \delta_{(\tau,\zeta)} + \delta_{(\tau,\zeta+\lambda)})\Big|_{\lambda=0}. \tag{2.5}$$

Notons que cette notion de dérivée n'est pas extrêmement pratique, puisqu'elle n'est bien définie que $P(d\omega)N(\omega, d\tau, d\zeta)$-presque partout. Cette notion de dérivée est sous-jacente dans [18, 17], mais pas explicitement introduite: Bichteler-Gravereaux-Jacod s'intéressent à l'opérateur *carré du champ* défini, pour deux variables X et Y, par $\Gamma^N(X, Y) = \int_0^T \int_0 \mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} X \mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} Y \rho(\zeta) N(d\tau, d\zeta)$, où ρ est un *poids* déterministe bien choisi. Nous prouvons alors possible le critère suivant : soit X une variable aléatoire qu'on peut *dériver* et telle que p.s.,

$$\int_0^T \left(\mathcal{D}^W_\tau X\right)^2 d\tau + \int_0^T \int_O \left(\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} X\right)^2 \rho(\zeta) N(d\tau, d\zeta) > 0, \tag{2.6}$$

alors la loi de X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela, nous utilisons une méthode du type Bouleau-Hirsch, dont la preuve a été simplifiée par Nualart [89].

Nous étudions les opérateurs $\mathcal{D}^W_\tau$ et $\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta}$ en détail, afin d'en exploiter les principales propriétés, pour pouvoir vérifier que X_t est *dérivable*. Ceci est très technique. Une fois calculées les dérivées de la solution, il reste à vérifier que p.s., $\xi(t) > 0$, où

$$\xi(t) \quad = \quad \int_0^T \left(\mathcal{D}^W_\tau X_t\right)^2 d\alpha d\tau + \int_0^T \int_O \left(\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} X_t\right)^2 \rho(\zeta) N(d\tau, d\alpha, d\zeta). \tag{2.7}$$

Ceci n'est pas très dur, car $\mathcal{D}^W_\tau X_t$ et $\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} X_t$ satisfont des E.D.S. linéaires.

La principale nouveauté par rapport au travail de Bichteler-Gravereaux-Jacod [17] est que nous définissons les opérateurs $\mathcal{D}^W_\tau$ et $\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta}$ sur un domaine $\mathcal{D}$ où on n'a pas de formule d'intégration par parties: $\mathcal{D}$ est trop *gros*. C'est ceci qui nous permet d'affaiblir les hypothèses d'intégrabilité et de régularité en vue d'obtenir l'existence de densités.

2.1.2 E.D.P.S.

Nous résumons ici l'article [114]. Nous considérons l'E.D.P.S. sur $[0, T] \times [0, 1]$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(V) + f(V)\dot{W} + h(V, .)\dot{\tilde{N}} \tag{2.8}$$

où W est un bruit blanc gaussien, et $\tilde{N}$ est la mesure compensée d'une mesure de Poisson sur $[0, T] \times [0, 1] \times O$, indépendante de W, d'intensité $dsdy\varphi(z)dz$, où O est un ouvert de $\mathbb{R}$ et où φ est une fonction C^1 de O dans $(0, \infty)$. L'inconnue V est une fonction (aléatoire) de $[0, T] \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Cette E.D.P.S.

généralise celles introduites par Walsh, [111, 112]. L'équation d'évolution associée s'écrit :

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \int_0^1 G_t(x,y)\mathcal{V}_0(y)dy + \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)g(V(y,s))dyds \qquad (2.9)\\ &+ \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(V(y,s))W(dy,ds) + \int_0^t\int_0^1\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x,y)h(V(y,s),z)\tilde{N}(ds,dy,dz). \end{aligned}$$

La condition initiale $\mathcal{V}_0$ est supposée déterministe, mesurable, et bornée sur $[0,1]$. Le noyau de Green G est celui associé à l'E.D.P. $\partial_t V = \partial_{x^2} V$, avec des conditions de Neumann au bord. Nous supposons que f, g et h sont Lipschitziennes, dans un certain sens. Nous prouvons dans une première partie l'existence d'une unique solution faible $V(x,t)$ pour (2.8). Ce résultat est énoncé dans [114] Théorème 1.4. Ce théorème d'existence et d'unicité est très simple à prouver, en utilisant les méthodes de Walsh, une fois que la notion de solution faible est énoncée, et que la validité des intégrales stochastiques a été établie. Les problèmes majeurs sot que p.s., l'application $t \mapsto V(\omega,x,t)$ n'a pas de limites à gauche pour tout x, et que manifestement, $V(x,t)$ n'appartient pas à un espace $L^p(\Omega)$ avec $p > 2$.

Nous nous intéressons ensuite à l'absolue continuité de la loi de notre solution $V(x,t)$, pour $x \in [0,1]$ et $t > 0$. En utilisant la technique de dérivation décrite ci-dessus, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 3 *Supposons que φ est C^1. Supposons que $f,g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont C^1 à dérivées bornées, que $h : \mathbb{R} \times O \mapsto \mathbb{R}$ admet les dérivées continues $h'_x, h'_z, h''_{zx} = h''_{xz}$. Supposons que h'_z et h''_{zx} sont bornées, et qu'il existe une fonction $\eta \in L^2(O, \varphi(z)dz)$ telle que $|h(0,z)| + |h'_x(x,z)| \leq \eta(z)$. Nous émettons ensuite une hypothèse de non-dégénerescence relativement technique (voir hypothèses (S) et $(EP2)$ dans [114]): soit $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit l'ensemble $\mathcal{H} = \{z \in O/\forall x,\ h'_z(x,z) \neq 0\}$ est suffisamment gros au sens où $\int_{\mathcal{H}} \varphi(z)dz$ diverge suffisamment. Considérons l'unique solution $\{V(x,t)\}_{x\in[0,1],t\geq 0}$ de (2.9). Alors pour tout $t > 0$, $x \in [0,1]$, la loi de $V(x,t)$ admet une densité sur $\mathbb{R}$.*

Autant la technique développée à la sous-section précédente n'était qu'anecdotique pour les E.D.S., autant elle permet de démontrer le théorème ci dessus. En utilisant directement les méthodes de [18, 17], il parait très difficile d'obtenir un tel résultat. Par exemple, Saint Loubert Bié [97] parvenait à démontrer le résultat sous des hypothèses bien plus restrictives, qui supposaient essentiellement que soit h ne dépend pas de x, soit $f = 0$ et h est croissante en x.
Nous tirons avantage ici du fait que (voir les notations de la sous-section précédente) la connaissance de $\mathcal{D}^W_\tau V(x,t)$ et $\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} V(x,t)$ est bien plus instructive que celle de $\Gamma^N V(x,t)$. Nous sommes contraints de mener des calculs précis. En effet, aucune majoration grossière n'est permise, puique par exemple, la solution est très peu intégrable (il semble que $E[|V(x,t)|^3] = \infty$).

L'avantage de cette méthode est claire : elle permet de traiter le cas d'un grand nombre de fonctionnelles de Poisson, sous des hypothèses assez faibles. L'inconvénient majeur est qu'on ne peut pas, avec cette méthode, étudier la régularité des densités, faute d'intégration par parties.

2.2 Utilisation de dérivées directionnelles

Afin de démontrer le Théorème 1, Bichteler-Jacod introduisent des *dérivées directionnelles* de X_t par rapport à N et B, où X est la solution de (2.2), puis utilisent une formule d'intégration par parties. Résumons grossièrement la technique du point de vue de la mesure de Poisson. Tout d'abord, ils définissent une classe $\mathcal{V}$ de *directions*: $v(\omega,s,z) \in \mathcal{V}$ si v est prévisible et suffisamment intégrable, bornée, et régulière par rapport à z. Ils *perturbent* ensuite la mesure de Poisson: pour ω fixé et λ petit (dans un voisinage de 0), ils posent, si $N(\omega) = \sum_i \delta_{(T_i,Z_i)}$, $N^\lambda(ds,dz) = \sum_i \delta_{(T_i,Z_i+\lambda v(T_i,Z_i))}$. Ils utilisent le Théorème de Girsanov pour les mesures aléatoires (voir Jacod-Shiryaev [60]) afin de montrer que N^λ est encore une mesure de Poisson, de même loi que N, sous la probabilité $P^\lambda = G^\lambda.P$. La densité de Radon-Nykodym G^λ est la valeur terminale de la solution d'une E.D.S. linéaire. Ils considèrent ensuite la solution $\{X^\lambda_t\}_{t\geq 0}$ de (2.2), où N est remplacée par N^λ. Par construction, la loi de X^λ sous P^λ est la même que celle de X sous P (sur un intervalle de temps compact). Autrement dit, $E[\phi(X_t^\lambda)G^\lambda] = E[\phi(X_t)]$ pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bornée et pour tout $t \geq 0$. Ils montrent ensuite qu'on peut dériver cette formule dans L^2 (si ϕ est assez régulière), en $\lambda = 0$, et obtenir la formule d'intégration par parties $E[\phi'(X_t)DX_t] = -E[\phi(X_t)DG_t]$. Ceci permet de conclure, si $E[|DG_t|] < \infty$ et si $DX_t > 0$ p.s., que la loi de X_t a une densité. Ces conditions sont satisfaites dès que $t > 0$, pour un bon choix de la direction $v \in \mathcal{V}$.

Remarquons que le lien avec la section précedente est simple: on a $DX_t = \int_0^t \int_O \mathcal{D}^N_{\tau,\zeta} X_t v(\tau,\zeta) N(d\tau, d\zeta)$. La définition de $\mathcal{D}^N_{\tau,\zeta}$ (voir la section précédente) est donc unificatrice.

Nous montrons dans les sous-sections ci dessous que la notion de dérivée directionnelle peut d'une part être exploitée sans formule d'intégration par parties (donc sous des hypothèses plus faibles), et peut d'autre part permettre d'étudier la positivité de la densité.

2.2.1 Dérivation presque sûre

Nous résumons ici une partie de [127], dont l'objectif principal est l'application aux équations de Boltzmann. Cet article repose sur le critère d'absolue continuité ci dessous, dont la preuve est extrêmement simple (voir Lemme 1.1 dans [127]).

Lemme 4 *Soit $d \in \mathbb{N}_*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit Λ un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe une famille de variables aléatoires $\{X^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que:*
(i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la loi de X^λ est absolument continue par rapport à celle de X. De plus, si $G^\lambda = dX/dX^\lambda$, $\sup_\lambda E\left(|G^\lambda|^2\right) < \infty$.
(ii) Pour presque tout ω, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\omega)$ de $0 \in \mathbb{R}^d$ sur lequel l'application $\lambda \mapsto X^\lambda(\omega)$ est de classe C^1.
(iii) Pour presque tout ω, $\left.\dfrac{\partial}{\partial\lambda} X^\lambda\right|_{\lambda=0}$ est inversible.
Alors la loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Ce critère permet de traiter des cas où la dérivée directionnelle DX_t précédemment décrite n'est pas dans $L^1(\Omega)$. Nous affaiblissons donc encore certaines hypothèses de Bichteler-Jacod [18]. Néanmoins, nous considérons une mesure de Poisson non compensée et une E.D.S. sans mouvement Brownien, ce qui simplifie sensiblement les preuves. Nous obtenons le résultat suivant (voir [127] Theorem 1.2). Ceci n'est qu'un exemple d'application du critère ci-dessus, bien adapté à l'étude des équations de Boltzmann.

Théorème 5 *Considérons l'E.D.S. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$*

$$X_t = x + \int_0^t b(X_{s-})ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(X_{s-}, z) N(ds, dz), \tag{2.10}$$

où N est une mesure de Poisson sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ d'intensité $dsdz$. Supposons que $b = \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est C^2, à croissance au plus linéaire, avec b', b'' à croissance au plus polynomiale, et que $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ est C^2. Supposons qu'il existe une fonction $\eta \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\bar{\eta}(z) = \sup_{|u-z|\leq|z|/2\wedge 1/|z|} \eta(u) \in L^1(\mathbb{R}, dz)$ et telle que, pour un certain $p \in \mathbb{N}_*$, $|h(x,z)| \leq (1+|x|)\,\eta(z)$, $|h'_x(x,z)| + |h''_{xx}(x,z)| \leq (1+|x|^p)\,\eta(z)$, et $|h'_z(x,z)| + |h''_{zz}(x,z)| + |h''_{xz}(x,z)| \leq K\,(1+|x|^p)$.
Si la condition de non-dégénérescence: pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d/\{0\}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{y^t h'_z(x,z)(h'_z(x,z))^t y \neq 0\}}(z) dz = \infty, \tag{2.11}$$

alors il existe une unique solution $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ à (2.10), et pour tout $t > 0$ la loi de X_t admet une densité sur $\mathbb{R}^d$.

Comme dans [114], ce critère s'applique à plus de fonctionnelles de N, (il requiert en particulier moins d'intégrabilité) car il ne nécessite pas de formule d'intégration par parties, mais ne peut pas permettre d'obtenir la régularité de la densité. Il est clair que le théorème 5 peut être obtenu directement à partir du Théorème 1 par localisation. Néanmoins, l'E.D.S. associée à l'équation de Boltzmann n'est pas localisable (car non linéaire), et on doit donc développer de nouvelles techniques qui permettent d'utiliser directement le critère du Lemme 4.

2.2.2 Utilisation de forte monotonie

Nous nous intéressons enfin, dans [128], à une dernière approche. On s'intéresse aux cas des processus de Markov de générateurs (2.1), où la fonction $\varphi(z)$ est remplacée par une fonction $\delta(x,z)$. Autrement dit, on souhaite autoriser le taux de saut à dépendre de la position. Ceci semble particulièrement difficile, et pourtant très utile: dans l'équation de Boltzmann par exemple, le taux de collision dépend en général des vitesses; dans l'équation de fragmentation, le taux de fragmentation dépend des masses, etc...

On suppose, pour simplifier, que $h(x,z) = \sigma(x)\eta(z)$ et $\delta(x,z) = \zeta(x)\varphi(z)$. Un tel processus peut se représenter à l'aide d'une mesure de Poisson $N(ds,dz,du)$ sur $[0,T]\times O\times[0,\infty)$ d'intensité $ds\varphi(z)dzdu$, comme l'unique solution de

$$X_t = x + \int_0^t \int_O \int_0^\infty \sigma(X_{s-})\eta(z) 1\!\!1_{\{u\le\zeta(X_{s-})\}} N(ds,dz,du) + \int_0^t b(X_{s-})ds. \tag{2.12}$$

Notons que l'indicatrice permet juste de régler le *taux* de saut. Il paraît alors très difficile de construire des *perturbations* X^λ de cette E.D.S. telles que l'application $\lambda\mapsto X_t^\lambda$ soit régulière en λ. En effet, dès que $X_t^\lambda \ne X_t$, alors instantanément après, l'indicatrice de X^λ va *accepter* une infinité de sauts que X va *rejeter* (ou vice versa), ce qui conduit à des discontinuités presque partout en λ. Nous proposons donc une idée originale, basée sur le critère suivant, dont la preuve est extrêmement simple (voir Theorem 3.1 dans [128]).

Lemme 6 *Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une famille de variables aléatoires réelles $\{Y^\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ telle que:*
1. pour tout $\lambda\in\Lambda$, la loi de Y est absolument continue par rapport à celle de Y^λ,
2. l'application $\lambda\mapsto Y^\lambda$ est presque sûrement très croissante sur $[0,1]$, au sens où il existe une variable Z p.s. positive telle que pour tout $0\le\lambda<\mu\le1$, $Y^\mu - Y^\lambda \ge (\mu-\lambda)Z$.
Alors la loi de Y est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

L'originalité de ce critère est qu'il ne requiert aucune régularité en ω des fonctionnelles étudiées, mais juste un ordonnement. Nous pouvons l'appliquer à une classe restreinte d'E.D.S. (voir [128], Theorem 1.2).

Théorème 7 *Supposons que φ est C^1. Supposons que $\sigma, b, \zeta : \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ sont localement lipschitziennes, avec σ,ζ positives, et que $|b|+\sigma\zeta$ est à croissance au plus linéaire. Supposons que $\eta : O\mapsto\mathbb{R}_+$ est C^2 et que η'' est bornée. Ajoutons l'hypothèse de non-dégénérescence*

$$\int_0 1\!\!1_{\{\eta'(z)\ne0\}}\varphi(z)dz = \infty. \tag{2.13}$$

Alors il existe une unique solution $\{X_t\}_{t\ge0}$ à (2.12). Si de plus

$$\sigma>0, \zeta>0 \text{ sont croissantes et } \eta\ge0, \tag{2.14}$$

alors X_t à (2.12) admet une densité sur $\mathbb{R}$ dès que $t>0$.

Les hypothèses sont raisonnables, à part (2.14) qui est extrêmement restrictive, et qui permet d'utiliser des théorèmes de comparaisons entre les solutions perturbées X^λ, λ variant. Nous présenterons néanmoins au Chapitre 4 une application de ce résultat à des processus de fragmentation, qui vérifient par nature des hypothèses de monotonie.

2.2.3 Positivité de la densité: un critère brutal

On s'intéresse maintenant à la positivité de la densité de la solution de (2.2). Des résultats dans cette direction ont étés menés en temps petit dans [72, 57, 93]. Le seul résultat en temps quelconque est dû à Léandre, qui considère une classe assez restreinte de processus. La méthode ci-dessous est adapté du cas Brownien développé par Bally-Pardoux [13] (qui étudient une E.D.P.S. conduite par un bruit blanc Gaussien).
Pour simplifier, on supposera toujours qu'il n'y a pas de diffusion, i.e. que $\sigma \equiv 0$. Dans un premier travail [117], nous avons établi un résultat qui fournit directement la positivité de la densité partout, sous une hypothèse de forte non-dégénérescence. Le résultat est extrêmement technique. Nous verrons néanmoins que la méthode s'applique très bien à l'étude de certaines équations de Boltzmann.

Nous établissons d'abord, inspirés par [13], le critère suivant (voir [116], Théorème 3.3).

Lemme 8 *Soit X une variable aléatoire réelle, et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Supposons qu'il existe une suite de variables perturbées (dans un sens à préciser) $\{X_n^\lambda\}_{\lambda \in [-1,1], n \in \mathbb{N}}$ telle que pour chaque n, $\lambda \mapsto X_n^\lambda$ est p.s. C^2 sur $[-1,1]$. Supposons aussi qu'il existe $c > 0, \delta > 0, k < \infty$ tel que pour tout $r > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X - y_0| < r\ ,\ \left|\frac{\partial}{\partial\lambda}X^n(0)\right| \geq c\ ,\ \sup_{|\lambda|\leq\delta}\left[\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}X^n(\lambda)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}X^n(\lambda)\right|\right] \leq k\right\} > 0. \tag{2.15}$$

Alors il existe une fonction continue θ strictement positive en y_0 qui minore la loi de X.

Ce critère se déduit d'un théorème d'inversion locale uniforme. En appliquant ce critère à l'E.D.S. (2.2), utilisant toujours les dérivées directionnelles de [18], nous obtenons le résultat suivant (voir [116] Théorème 2.3). L'énoncé étant trop long, nous renvoyons à l'article original pour un énoncé rigoureux.

Théorème 9 *Supposons que φ est C^1. Considérons la solution $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de l'équation (2.2) avec $\sigma \equiv 0$. Supposons que h et b sont très régulières, intégrables, et que h'_z est uniformémement non intégrable: il existe une fonction δ sur O telle que $|h'_z(x,z)| \geq \delta(z)$ et $0 \leq \delta \notin L^1(O, \varphi(z)dz)$. Alors la loi de X_t est minorée par une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$.*

La preuve de ce résultat est très technique, beaucoup plus difficile que, par exemple, celle de [13]. Nous verrons tout de même que l'application aux équations de Boltzmann se révèle satisfaisante.

Nous ne traitons que le cas de la dimension 1 pour une raison fondamentale: le déterminant et la norme des matrices 1×1 sont de même nature, ce qui n'est pas le cas en dimension plus grande. Nous parviendrons juste à étendre la méthode au cas de la dimension 2 pour l'E.D.S. *particulière* associée à l'équation de Boltzmann 2D.

2.2.4 Caractérisation des points de positivité

Il est bien connu que la positivité d'une diffusion est liée aux résultats de type support. Ben Arous-Léandre [14] utilisent ce type d'outils. Notre but dans [122] est d'ailleurs d'adapter les idées de [14] aux processus à sauts. Nous obtenons encore un résultat relativement compliqué, mais cette fois, les hypothèses sont naturelles. Nous considérons encore une E.D.S. plus simple que (2.2). Nous renvoyons à [122] Theorem 2.3 pour un énoncé rigoureux.

Théorème 10 *Considérons l'E.D.S. à valeurs dans $\mathbb{R}$*

$$X_t = x + \int_0^t b(X_{s-})ds + \int_0^t \int_O h(X_{s-}, z)N(ds, dz), \tag{2.16}$$

où N est une mesure de Poisson sur $[0,T]\times O$ d'intensité $ds\varphi(z)dz$. Supposons que O est un ouvert de $\mathbb{R}$, que φ est C^1 et positive sur O, et que h et b sont suffisamment régulières. Considérons l'ensemble de mesures discrètes

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \delta_{(t_i,z_i)} \Big/ n \in \mathbb{N},\ 0 < t_1 < ... < t_n < T,\ z_i \in O \right\}. \tag{2.17}$$

Considérons, pour $m \in \mathcal{M}$, la solution (déterministe) $S_t(m)$ de (2.16) où on a remplacé N par m. Pour $\alpha : O \mapsto \mathbb{R}$, une direction *déterministe (satisfaisant certaines conditions), pour $\lambda \in [-1,1]$, et pour $m = \sum_{i=1}^n \delta_{(t_i,z_i)} \in \mathcal{M}$, on note $\gamma_\alpha^\lambda(m) = \sum_{i=1}^n \delta_{(t_i,z_i+\lambda\alpha(z_i))}$, qui est encore élément de $\mathcal{M}$.*
Soit $t > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés. S'il existe $m_0 \in \mathcal{M}$ et une direction *α tels que*

$$y_0 = S_t(m_0); \quad m_0(\{t\}\times O) = 0; \quad \left.\frac{\partial}{\partial\lambda} S_t(\gamma_\alpha^\lambda(m_0))\right|_{\lambda=0} \neq 0, \tag{2.18}$$

alors la loi de X_t est minorée par une fonction continue strictement positive en y_0.

Commentons nos hypothèses. Pour $t > 0$ fixé, les points y susceptibles d'être des points de positivité pour la densité de X_t ceux qui sont à l'intérieur du support de la loi de X_t. On démontre dans [122] que le support de $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est la fermeture, dans $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R})$ muni de la topologie de Skorokhod, de $\{\{S_t(m)\}_{t\geq 0}\ ,\ m \in \mathcal{M}\}$. Ce résultat naturel s'obtient en utilisant les travaux de Simon, [98]. Mais on n'en déduit que le fait que le support de X_t contient $\{S_t(m)\ ,\ m \in \mathcal{M},\ m(\{t\}\times O) = 0\}$, car l'application $x \mapsto x(t)$ n'est continue de $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qu'aux points $x \in \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R})$ tels que $x(t) = x(t-)$. Ces arguments expliquent les deux premières conditions de (2.18).
Enfin, la dernière condition (2.18) implique, grossièrement, qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que sur un voisinage $\mathcal{V}$ de m_0, l'application $m \mapsto S_t(m)$ est une submersion de $\mathcal{V}$ dans $[y_0-\epsilon, y_0+\epsilon]$. Toujours heuristiquement, ceci implique que $\omega \mapsto X_{t_0}(\omega)$ est localement une submersion dans $[y_0-\epsilon, y_0+\epsilon]$. Donc, pour $\eta < \epsilon$, la quantité $P(|X_{t_0} - y_0| < \eta)$ est (au moins) de l'ordre de η. Ceci implique que la densité de X_t en y_0, obtenue comme la limite de $\frac{1}{\eta}P(|X_{t_0} - y_0| < \eta)$, est strictement positive.

Nous verrons une fois de plus que ce résultat s'applique bien à l'équation de Boltzmann.

Nous ne parlerons pas ici d'un travail relié où nous étudions le support (fonctionnel) de la solution d'une E.D.P.S. à sauts, [118].

2.3 Existence de densités: une méthode "élémentaire"

Nous avons tenté très récemment, dans [141], de redémontrer simplement le résultat de Bichteler-Jacod [18] (voir Théorème 1 ci dessus). Nous obtenons en fait des résultats (voir Theorem 2.2, Corollary 2.3 et Proposition 2.4 dans [141]) qui généralisent les Théorèmes 1, 2, et 5.

Considérons donc le processus de Markov $\{X_t^x\}_{t\geq 0}$ issu de x, homogène en temps, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de générateur infinitésimal $\mathcal{K}$ donné par (2.1) (sous forme éventuellement compensée, et avec éventuellement un terme de diffusion). Supposons par exemple que les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites. Notre preuve permet en fait d'affaiblir un peu ces hypothèses, et est scindée en trois étapes essentielles (voir [141], Sous-Section 2.1):

Etape 1: nous montrons qu'on peut construire un temps d'arrêt τ, arbitrairement petit, tel que X_τ^x possède une densité conditionnellement à $\mathcal{F}_{\tau-}$.
Etape 2: nous montrons que si X_0 possède une densité, alors $X_t^{X_0}$ possède une densité pour tout $t \geq 0$, à l'aide de la propriété de flot: pour tout $t \geq 0$, l'application $x \mapsto X_t^x$ est un C^1-difféomorphisme.
Etape 3: soit $t > 0$. En utilisant les Etapes 1 et 2, la propriété de Markov Forte permet de conclure que, X_t^x possède une densité conditionnellement à $t > \tau$. Le temps d'arrêt τ pouvant être choisi arbitrairement

petit, on conclut aisément.

Nous parvenons aussi à redémontrer le résultat de Bichteler-Gravereaux-Jacod [17] Theorem 2.14 concernant le cas de processus multi-dimensionnels. Nous affaiblissons en fait un peu leurs hypothèses, voir [141], Theorem 2.9, Corollary 2.10, et Proposition 2.13.

Enfin, et c'est la principale nouveauté de ce travail, nous parvenons à adapter notre méthode au cas de processus à taux de saut non constant, c'est à dire quand la fonction $\varphi(z)$ est remplacée par une fonction du type $\gamma(x)\varphi(z)$ dans $\mathcal{K}$, avec $\gamma > 0$ régulière. La difficulté est que dans ce cas, le processus $\{X_t^x\}_{t\geq 0}$ ne possède plus la propriété de flot. Nous remplaçons l'étape 2 de la preuve ci-dessus par:

Etape 2': nous montrons que si X_0 possède une densité, alors $X_t^{X_0}$ possède une densité pour tout $t \geq 0$. Nous utilisons pour cela une estimation *a priori* du type: si $X_t^{X_0}$ possède une densité $f(t,x) \in L^2(\mathbb{R})$ pour chaque $t \geq 0$, alors $\partial_t \int_{\mathbb{R}} f^2(t,x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} f^2(t,x)dx$. La boule unité de L^2 étant faiblement compacte, cette estimation *a priori* et le Lemme de Gronwall permettent de conclure.

Notre résultat est un peu long à énoncer, mais il généralise considérablement le Théorème 7 ci-dessus, et contient le Théorème suivant (voir Section 3 dans [141], plus précisement Theorem 3.2, Corollary 3.3, et Proposition 3.4).

Théorème 11 *Considérons le processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ issu de x_0, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de générateur infinitésimal $\mathcal{K}$ donné, pour $\phi \in C_b^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathcal{K}\phi(x) = b(x)\phi'(x) + \int_{\mathbb{R}} \{\phi(x + h(x,z)) - \phi(x)\} \gamma(x)\varphi(z)dz. \tag{2.19}$$

Supposons que $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est mesurable, et que $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est de classe C^1 et à croissance au plus linéaire. Supposons que $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est C^1, que $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est mesurable, et que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,z)$ est C^1. Supposons enfin qu'il existe $\eta \in L^1(\mathbb{R}, \varphi(z)dz)$ et $\zeta \in C(\mathbb{R})$ tels que $\gamma(x)|h(x,z)| \leq (1+|x|)\eta(z)$ et $|h'_x(x,z)| \leq \zeta(x)\eta(z)$. Alors, sous l'hypothèse de non-dégénerescence (que nous écrivons pour simplifier dans le cas où h est C^1 en z): pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(x) > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{h'_z(x,z)\}} \varphi(z)dz = \infty, \tag{2.20}$$

X_t admet une densité sur $\mathbb{R}$ dès que $t > 0$.

Ce résultat est relativement satisfaisant, puisqu'il semble être le premier résultat un peu général concernant les processus à taux de saut γ non constant. Il affaiblit considérablement les hypothèses de [128] (voir Théorème 7 ci-dessus).

2.4 Perspectives

Il subsiste une multitude de problèmes intéressants.

Régularité de densités. Montrer que la densité obtenue au Théorème 11 est de classe C^∞ sous certaines hypothèses.

Dériver les instants de sauts. Tous les résultats et techniques exposés ci-dessus reposent sur la perturbation en z de la mesure de Poisson $N(ds,dz)$. Inspiré par Carlen-Pardoux [23], Denis [31] perturbe les instants de saut de la mesure de Poisson $N(ds,dz)$, et utilise ensuite la propiété de *flot* de la dérive. La méthode est attractive (en particulier car elle permet de traiter le cas d'une mesure de Poisson d'intensité singulière), mais la preuve est très technique, et repose fortement sur la propriété de Markov homogène de $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Il serait intéressant d'explorer cette direction.

La méthode de Picard. Nous aimerions redémontrer, à l'aide d'une preuve analytique, les résultats de Picard [92], et les étendre au cas d'un taux de saut non constant. Picard démontre qu'en fait, le processus de saut X_t peut avoir une densité C^∞, même si sa *mesure de saut* est singulière, même s'il n'a pas de dérive, pourvu que sa mesure de saut explose suffisamment.

Autres... Bien sûr, il faudrait étendre les résultats de positivité au cadre multi-dimensionnel, avec un mouvement brownien. Les résultats de régularité de Bichteler-Gravereaux-Jacod [17] sont restreints et compliqués. On peut craindre, néanmoins, qu'il y ait peu d'espoir de les améliorer. Enfin, nous verrons dans les chapitres suivants concernant les équations de Boltzmann et de coagulation-fragmentation, divers problèmes de régularisation...

Chapitre 3

Equations de type Boltzmann spatialement homogènes

Considérons, dans un gaz à haute altitude, la densité $f(t,x,v) \geq 0$ de particules de position $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ et de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \geq 0$. Supposons que le gaz est spatialement homogène, c'est à dire que $f(t,x,v) = f(t,v)$ ne dépend pas de la variable position x. L'équation de Boltzmann homogène décrit l'évolution de f, et s'écrit

$$\partial_t f(t,v) = Q(f(t))(v), \quad t \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

où Q est un opérateur de collisions binaires

$$Q(f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} [f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)]\beta(\theta, |v - v_*|)d\nu dv_*. \tag{3.2}$$

Les vitesses pré-collisionnelles v' et v'_* sont données par

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\nu \quad ; \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\nu. \tag{3.3}$$

La *section efficace* $\beta(\theta, |v - v_*|) = \beta(\theta, |v' - v'_*|) \geq 0$ décrit le *taux* de collision entre particules de vitesses v et v_*, avec paramètre d'impact ν. L'angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ est celui entre les directions $(v - v_*)$ et $(v' - v'_*)$, et est déterminé par l'équation $\cos\theta = |\langle v - v_*, \nu\rangle|/|v - v_*|$. Cette équation est relativement simple, puisque le terme $Q(f)$ compte l'apparition de particules de vitesse v par collisions de particules de vitesses v' et v'_*, et la disparition de particules de vitesse v par collision avec d'autres particules de vitesses v_*. Remarquons que (3.3) n'est rien d'autre qu'une paramétrisation des vitesses possibles v' et v'_* telles que l'énergie et la quantité de mouvement soient préservées, i.e. $|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2$ et $v' + v'_* = v + v_*$. On renvoie à Cercignani-Illner-Pulvirenti [25] et Villani [108] pour de nombreux détails et développements mathématiques sur ce modèle. Nous nous intéresserons essentiellement à lever l'hypothèse non physique de cutoff angulaire, qui suppose que

$$\int_0^\pi \beta(|v - v_*|, \theta)d\theta < \infty. \tag{3.4}$$

Cette hypothèse doit être remplacée par la condition plus faible mais physique

$$\int_0^\pi \beta(|v - v_*|, \theta)d\theta = \infty, \quad \int_0^\pi \theta^2\beta(|v - v_*|, \theta)d\theta < \infty. \tag{3.5}$$

Il y a une grosse différence de nature entre ces deux conditions. Dans le premier cas, chaque particule ne choque qu'un nombre fini de particules sur un intervalle de temps compact, dans l'autre, elle subit une infinité de collisions sur chaque intervalle de temps compact. Nous verrons que ceci occasionne de grosses différences de comportement des solutions, notamment pour ce qui est de la régularité.

Nous supposerons le plus souvent que la section efficace est *Maxwellienne*, c'est à dire que β ne dépend que de θ. Enfin, nous considérerons le plus souvent des équations en dimension 1 et 2 au lieu de 3. Nous considérerons l'équation sous forme faible, et nous nous intéresserons à des solutions mesures. Nous dirons qu'une famille $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ de probabilités sur $\mathbb{R}^3$ est solution de l'équation de Boltzmann si pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ de classe C_b^2,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi(v)Q_t(dv) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(v)Q_0(dv) + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} Q_s(dv) \int_{\mathbb{R}^3} Q_s(dv_*) \int_{S^2} d\nu \left\{\phi(v') - \phi(v)\right\} \beta(|v - v_*|, \theta). \tag{3.6}$$

Pour conclure cette introduction, rappelons l'interprétation probabiliste de cette équation donnée par Tanaka [103] voir aussi Sznitman [101], Graham-Méléard [53, 54]. La solution $Q_t(dv)$ est censée représenter la distribution des vitesses dans le gaz à l'instant t. On peut donc voir Q_t comme la loi de V_t, la vitesse d'une particule choisie au hasard à l'instant t. En poussant un peu plus loin le raisonnement, on peut essayer de construire un processus $\{V_t\}_{t\geq 0}$, qui représente l'évolution de la vitesse d'une particule *typique*, choisie au hasard à l'instant 0, et subissant les collisions d'autres particules typiques. Ceci est décrit de la manière suivante: $\{V_t\}_{t\geq 0}$ est un processus de Markov inhomogène en temps, de générateur

$$L_s\phi(v) = \int_{\mathbb{R}^3} Q_s(dv_*) \int_{S^2} d\nu \left\{\phi(v') - \phi(v)\right\} \beta(|v - v_*|, \theta), \tag{3.7}$$

où Q_s est la loi de V_s. C'est donc un processus de Markov *non linéaire*: le générateur de $\{V_t\}_{t\geq 0}$ dépend des marginales temporelles de $\{V_t\}_{t\geq 0}$. Bien sûr, un tel processus contient plus d'information que la solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ de l'équation de Boltzmann, puisqu'il fait intervenir une dynamique. Le lien avec l'équation de Boltzmann est simple: si $\{V_t\}_{t\geq 0}$ est le processus précedemment décrit, alors, si on pose $Q_t = \mathcal{L}(V_t)$ pour chaque t, la famille $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ est solution de l'équation de Boltzmann. Un tel processus peut être réalisé comme la solution d'une E.D.S. avec sauts, *non linéaire*.

Nous exploiterons cette interprétation probabiliste dans deux directions: dans un premier temps, nous nous intéressons à la régularité et à la positivité des solutions, et dans un second temps à la résolution numérique de l'équation.

3.1 Régularité et positivité

Nous étudions pour commencer la régularité des solutions.

3.1.1 Régularité

Remarquons tout d'abord que le pouvoir régularisant des collisions ne s'applique instantanément à Q_t que dans le cas sans cutoff (c'est à dire sous l'hypothèse (3.5)). On peut effectivement démontrer que dans le cas avec cutoff (c'est à dire sous l'hypothèse (3.4)), les singularités de la condition initiale Q_0 persistent en tout temps. Nous traiterons ici le cas bi-dimensionnel, car le cas tri-dimensionnel pose de grosses difficultés (voir section 3.2 ci dessous).

Nous utilisons dans [115] le calcul de Malliavin pour processus à sauts de Bichteler-Gravereaux-Jacod [17] et l'interprétation probabiliste de Tanaka [103] afin d'étendre à la dimension 2 les résultats de Graham-Méléard [54]. Bien sûr, il faut travailler un peu, car Bichteler-Gravereaux-Jacod traitent le cas d'E.D.S. à sauts standard, alors qu'on doit étudier une E.D.S. non linéaire: les coefficients qui dirigent notre E.D.S. dépendent de la loi de sa solution. Nous obtenons (voir [115], Theorems 3.1, 3.2, 3.3):

Théorème 12 *Supposons que la condition initiale Q_0 est une probabilité sur $\mathbb{R}^2$ qui admet un moment d'ordre 2, et n'est pas une masse de Dirac. La section efficace β est Maxwellienne, et s'écrit $\beta = \beta_0 + \beta_1$, où $\beta_1 \geq 0$ est paire sur $[-\pi, \pi]\backslash\{0\}$, et il existe $k_0 > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi)$, et $r \in (1, 3)$ tels que $\beta_0(\theta) = \frac{k_0}{|\theta|^r} \mathbb{1}_{|\theta|\leq\theta_0}$. On suppose aussi que $\int_0^\pi \theta^2\beta(\theta)d\theta < \infty$. Alors l'équation de Boltzmann 2D spatialement homogène admet une solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ avec condition initiale Q_0. De plus, Q_t a une densité $f(t, v)$ dès que $t > 0$.*
Si on suppose de plus que Q_0 admet des moments de tout ordre et que $\left|\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right| \mathbb{1}_{|\theta|\in[\pi/2,\pi]} \in \cap_{p\geq 1} L^p(\beta(\theta)d\theta)$, alors pour tout $t > 0$, $f(t, .)$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et f est de classe $C^0((0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$.

Remarquons que le meilleur résultat préalable de ce type avait été obtenu par Desvillettes [33]. Il obtenait une régularité de type H^1 au lieu de C^∞. Remarquons que dans le cadre unidimensionel, Desvillettes [32] obtenait, par contre, une régularité C^∞.
La condition "Q_0 n'est pas une masse de Dirac" est nécessaire, puisque si toutes les particules ont la

même vitesse à $t = 0$, alors elle ne se cognent jamais, et donc $Q_t = Q_0$ pour tout t.
L'intuition de ce résultat est relativement simple. Considérons donc le processus $\{V_t\}_{t\geq 0}$ précédemment associé à l'équation de Boltzmann. Considérons le cas le plus dégénéré, où $Q_0 = \frac{1}{2}\delta_{v_0} + \frac{1}{2}\delta_{v_1}$, avec $v_0 \neq v_1$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Puisque nous sommes dans le cadre sans cutoff, on sait que V choque instantanément une autre particule dont la vitesse est proche de v_1, avec un angle de déviation θ choisi aléatoirement suivant une loi à densité (donnée essentiellement par β_0). Les contraintes de conservation d'énergie et de quantité de mouvement ne permettent d'obtenir, après cette *première collision*, qu'une densité sur un cercle pour la loi de V_t. (Tout simplement car V_t est le v' de la formule (3.3), obtenu en remplaçant v par V_{t-} et v_* par v_1). Mais une deuxième collision va permettre à notre processus d'avoir un second saut, diffus sur un cercle dont le centre est différent du précédent. Donc V_t va avoir une densité sur $\mathbb{R}^2$. Le processus de régularisation C^∞ est bien sûr plus délicat à expliquer rapidement.
Notons juste que le cas bidimensionnel paraît (et se révèle) bien plus difficile que le cas unidimensionnel, puisque en gros, un saut fournit directement une densité à V dans le cas 1D, alors qu'il en faut plusieurs dans des directions différentes dans le cas 2D. Néanmoins, notre preuve repose sur une adaptation de celle de Graham-Méléard [54].

Nous avons tenté de généraliser ce résultat au cas non Maxwellien dans [127], en utilisant la technique développée dans la sous-section 2.2.1. Nous obtenons un résultat que nous n'énoncerons pas ici en toute généralité, mais qui contient le cas suivant (voir [127] Theorem 2.8).

Théorème 13 *Supposons que la condition initiale est une probabilité sur $\mathbb{R}^2$ qui admet des moments de tout ordre, et n'est pas une masse de Dirac. Supposons que la section efficace est de la forme $\beta(|v - v_*|, \theta) = \psi(|v - v_*|)/|\theta|^\alpha$, avec $\alpha \in [1, 2)$, avec ψ minorée, majorée, de classe C^2, avec ψ' et ψ'' à croissance au plus polynomiale. Alors l'équation de Boltzmann 2D spatialement homogène admet une solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ avec condition initiale Q_0. De plus, Q_t a une densité $f(t, v)$ dès que $t > 0$.*

Ce résultat n'est pas très puissant, mais le cas non Maxwellien paraît très délicat. Ceci est lié au fait que dans le chapitre 2, la plupart des processus de saut que nous étudions ont un *taux* de saut indépendant de la position, ce qui revient ici à dire que la section efficace est indépendante des vitesses. L'adaptation des méthodes de [141] (voir Théorème 11 ci-dessus) ne semble pas immédiate.

3.1.2 Positivité

Nous souhaitons maintenant étudier la positivité de la solution. Dans le cas avec cutoff, Pulvirenti-Wennberg [95] obtiennent des minorations par des gaussiennes (Maxwelliennes). De tels résultats, outre leur intérêt propre, permettent de minorer le taux de production d'entropie, et donc de contrôler la vitesse de convergence à l'équilibre, ce qui est une question particulièrement importante.
Malheureusement, nous ne pourrons traiter, dans le cas sans cutoff, que la positivité de la solution.
Considérons pour commencer le cas unidimensionnel (modèle de Kac). Dans [118], nous utilisons la méthode brutale développée dans la sous-section 2.2.3 (voir [116]), et l'hypothèse de forte non-dégenerescence se traduit par une section efficace très explosive, à savoir $\int_0^\pi \theta\beta(\theta)d\theta = \infty$ (mais nous supposons toujours $\int_0^\pi \theta^2\beta(\theta)d\theta < \infty$. Nous utilisons ensuite la méthode de [121] (voir sous-section 2.2.4) et l'hypothèse s'écrit $\int_0^\pi \beta(\theta)d\theta = \infty$ mais $\int_0^\pi \theta\beta(\theta)d\theta < \infty$. Les deux résultats sont complémentaires, et on obtient finalement (voir [118] Theorem 1.5 et [121] Theorem 5.4)

Théorème 14 *Supposons que la condition initiale est une probabilité sur $\mathbb{R}$ qui admet un moment d'ordre 2, et n'est pas une masse de Dirac en 0. La section efficace β est Maxwellienne, et s'écrit $\beta = \beta_0 + \beta_1$, où $\beta_1 \geq 0$ est paire sur $[-\pi, \pi]\backslash\{0\}$, et il existe $k_0 > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi)$, et $r \in (1, 3)$ tels que $\beta_0(\theta) = \frac{k_0}{|\theta|^r}\mathbb{1}_{|\theta|\leq\theta_0}$. On suppose aussi que $\int_0^\pi \theta^2\beta(\theta)d\theta < \infty$. Alors on sait par Graham-Méléard [54] que l'équation de Kac ("caricature" unidimensionnelle de l'équation de Boltzmann) spatialement homogène admet une solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ avec condition initiale Q_0, et que Q_t a une densité $f(t, v)$ dès que $t > 0$. Il existe une fonction*

$g(t,v)$ sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$, continue en v, strictement positive partout, telle que pour tout $t>0$, pour presque tout v, $f(t,v)\geq g(t,v)$.

Ces résultats sont relativement satisfaisants, puisqu'ils montrent que la méthode développée dans [116] est raisonnable (ce qui n'était pas clair *a priori*).

Enfin, nous parvenons dans [120] à traiter le cas de l'équation de Boltzmann 2D sous l'hypothèse $\int_0^\pi \theta\beta(\theta)d\theta=\infty$, mais avec une restriction supplémentaire: la condition initiale Q_0 doit avoir un support suffisamment grand (voir [120] Theorem 1.5 pour un énoncé précis): le Théorème 14 est encore vrai en dimension 2 si $r\geq 2$ et si, par exemple, $\mathbb{Z}^2\subset \text{supp } Q_0$. Notons que nous ne sommes pas parvenus à généraliser la méthode de [116] à la dimension plus grande que 1, sauf dans ce cadre particulier de l'équation de Boltzmann.

Ces résultats semblent être les premiers dans cette direction, dans le cas sans cutoff, et l'utilisation du calcul des variations stochastiques est bien sûr agréable pour des probabilistes.

3.2 Résolution numérique

Nous nous intéressons maintenant à la résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Nous utilisons quasiment systématiquement le résultat puissant de Graham-Méléard [53], qui fournit une preuve et une vitesse de convergence de systèmes particulaires stochastiques vers la solution de l'équation de Boltzmann avec cutoff. Il ne reste donc plus qu'à étudier la convergence de l'équation avec cutoff vers l'équation sans cutoff, en donnant des vitesses de convergence, et à regrouper les deux résultats. Rappelons donc tout d'abord le résultat de Graham-Méléard [53], dans un cadre adapté à nos préoccupations.

Considérons une section efficace $\beta(|v-v_*|,\theta)$, bornée dans L^1 par une constante Λ (i.e. $\int_{S^2}\beta(|v-v_*|,\theta)d\nu\leq\Lambda$), et une distribution initiale Q_0. Considérons un nombre fini $n\in\mathbb{N}_*$ de particules. Considérons ensuite le processus de Markov $(V_t^{1,n},...,V_t^{n,n})_{t\geq0}$, à valeurs dans $(\mathbb{R}^3)^n$, de loi initiale $Q_0^{\otimes n}$, et de générateur L_n donné, pour $\phi:(\mathbb{R}^3)^n\mapsto\mathbb{R}$ suffisamment régulière, et pour $v=(v_1,...,v_n)\in(\mathbb{R}^3)^n$, par

$$L_n\phi(v)=\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\int_{S^2}\beta(\theta,|v_i-v_j|)\left\{\phi(v'_{ij})-\phi(v)\right\}d\nu, \tag{3.8}$$

où $v'_{ij}=(v_1,...,v_{i-1},v'_i,v_{i+1},...,v_{j-1},v'_j,v_{j+1},...,v_n)$, avec v'_i et v'_j donnés par (3.3) en remplaçant v et v_* par v_i et v_j. Remarquons que ce processus n'est autre qu'une chaîne de Markov à temps continu et à taux de saut borné, et donc on peut le simuler exactement. Ce processus décrit l'évolution des vitesses de n particules interagissant suivant la dynamique de l'équation de Boltzmann.

Théorème 15 (Graham-Méléard [53]) *Considérons une section efficace $\beta(|v-v_*|,\theta)$ bornée dans L^1 par une constante Λ, et une distribution intiale Q_0. Notons $Q^n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{V^{i,n}}$ la mesure empirique associée au système de particules $(V_t^{1,n},...,V_t^{n,n})_{t\geq0}$. Alors pour tout T, Q^n converge en probabilité vers une mesure Q sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^3)$, avec un taux majoré par $\sqrt{K\frac{\exp(\Lambda T)}{n}}$. Cette mesure Q est la loi d'un processus Markovien non linéaire $\{V_t\}_{t\geq0}$, dont la famille de marginales $Q_t=\mathcal{L}(V_t)$ est solution de l'équation de Boltzmann avec condition initiale Q_0 et section efficace β.*

Graham-Méléard obtiennent aussi des résultats de propagation de chaos. Dans [120], nous obtenons essentiellement le résultat suivant (voir [120] Theorem 5.5).

Théorème 16 *Considérons une section efficace Maxwellienne $\beta(\theta)$, satisfaisant $\int_0^\pi\theta^2\beta(\theta)d\theta<\infty$. Considérons une suite β_l de section efficaces tronquées, convergeant vers β (par exemple $\beta_l(\theta)=\beta(\theta)\mathbb{1}_{\{|\theta|\geq1/l\}}$). Soit $\Lambda_l=\int_{S^2}\beta_l(\theta)d\nu$. Considérons une suite $\{l(n)\}_{n\geq1}$, à valeurs entières, divergeant vers l'infini, telle que*

$$\exp(\Lambda_{l(n)})=o(n). \tag{3.9}$$

Considérons enfin le système de n particules associé à la section efficace $\beta_{l(n)}$, et posons $Q^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{V^{i,n}}$. Alors pour tout T, Q^n converge en probabilité vers une mesure Q sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^3)$. Cette mesure Q est la loi d'un processus Markovien non linéaire $\{V_t\}_{t\geq 0}$, dont la famille de marginales $Q_t = \mathcal{L}(V_t)$ est solution de l'équation de Boltzmann (3D) avec condition initiale Q_0 et section efficace β.

La seule réelle difficulté de ce travail est d'étudier la convergence de la solution avec cutoff vers la solution sans cutoff. Le cas de la dimension 3 est réellement difficile, pour la raison suivante: quand deux particules v et v_* se choquent, il faut choisir (arbitrairement) un repère orthonormé $(I(v-v_*), J(v-v_*), (v-v_*)/|v-v_*|)$, puis choisir au hasard un angle θ et un angle φ, et enfin choquer v et v_* suivant le paramètre d'impact $\nu \in S^2$ dont les coordonnées sphériques dans le repère choisi sont θ et φ. Or il est manifestement impossible de trouver deux applications continues I et J de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telles que pour tout X dans $\mathbb{R}^3$, $(I(X)/|X|, J(X)/|X|, X/|X|)$ soit un repère orthonormé. Donc les coefficients le l'E.D.S. que nous traitons sont irréguliers, et nous sommes obligés de travailler... Notons que ce problème n'apparaît pas en dimension deux.

Nous nous sommes aussi intéressés au cas non Maxwellien. Nous n'avons étudié que le cas de la dimension 2. Nous obtenons les résultats suivants ([124], Theorems 3.4 et 4.1).

Théorème 17 *Considérons une section efficace $\beta(v,v_*,\theta) = \psi(|v-v_*|)B(\theta)$, où B est paire sur $[-\pi,\pi]$, et satisfait $\int_0^\pi \theta B(\theta)d\theta < \infty$, et ψ est bornée et localement Lipschitzienne. Considérons une condition initiale Q_0 admettant un moment d'ordre 2.*
1) Alors on peut construire un processus de Markov non linéaire $\{V_t\}_{t\geq 0}$ associé à l'équation de Boltzmann 2D (i.e. dont le générateur est donné par (3.7)).
2) On peut construire, en suivant les idées du théorème précédent une suite de systèmes de particules dont les mesures empiriques Q^n sont tendues, et dont les valeurs d'adhérence sont solutions de l'équation de Boltzmann 2D (où plutôt sont les lois de processus reliés à l'équation de Boltzmann 2D).

Nous avons proposé une méthode alternative au problème non Maxwellien sans cutoff dans [123]. Enfin, nous avons montré un résultat de type théorème de la limite centrale dans pour le cas 2D Maxwellien avec cutoff (voir [122], Theorem 5.4).

3.3 Perspectives

Il reste une multitude de problèmes ouverts concernant l'équation de Boltzmann, ne serait-ce que concernant l'existence et l'unicité de solutions et leur comportement en temps long. Nous ne parlerons ci-dessous que de problèmes où l'approche probabiliste peut être utile.

Régularisation: est-il possible d'étendre au cas 3D non Maxwellien les résultats du Théorème 12? Ceci paraît très délicat, à cause du problème d'irrégularité des coefficients (en dimension 3 et pour des potentiels non Maxwelliens). Peut-on obtenir des minorations Gaussiennes (Maxwelliennes) de la solution?

Problème inhomogène: le cas inhomogène en espace est nettement moins clair du point de vue probabiliste, puisque les vitesses de deux particules qui se cognent ne sont plus indépendantes, mais indépendantes conditionnellement au fait qu'elles aient la même position. Peut-on néanmoins trouver une représentation probabiliste utilisable?

Unicité et convergence à l'équilibre: revenons au cas homogène. Le seul résultat d'unicité concernant l'équation sans cutoff est dû à Toscani-Villani [105], et traite du cas Maxwellien. Leur preuve est relativement probabiliste. Nous espérons généraliser ce résultat au cadre non Maxwellien, à l'aide d'une compréhension probabiliste du problème. De même, la convergence à l'équilibre pour l'équation sans cutoff non Maxwellienne doit pouvoir se démontrer à l'aide d'arguments probabilistes, sans utiliser la production d'entropie.

Chapitre 4

Equations de coagulation-fragmentation

Les phénomènes de coagulation et fragmentation interviennent dans des domaines variés: physique (aérosols, fumée, sprays,...), astrophysique (formation des planètes et galaxies), chimie (polymères), et biologie (dynamique des populations, hématologie). Considérons le cas de la polymérisation pour introduire le modèle. Considérons un système infini de particules caractérisées par leurs masse $i \in \mathbb{N}_*$. Supposons que le système est homogène en espace. La masse (ou taille) d'une particule représente le nombre de monomères (ou *atomes*) qu'elle contient. On suppose que deux particules de masses i et j peuvent s'aggreger, avec un taux $K(i,j) = K(j,i) \geq 0$, pour donner une particule de masse $i+j$. D'autre part, une particule de masse $i+j$ peut se fragmenter en deux particules de masses i et j avec taux $F(i,j) = F(j,i) \geq 0$. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de $c = \{c_i(t)\}_{t\geq 0, i\in\mathbb{N}_*}$, où $c_i(t) \geq 0$ est la concentration (i.e. le nombre par unité de volume) de particules de masse i à l'instant t. On obtient alors, en faisant le bilan des apparitions et disparitions de particules de taille i, (par coalescence ou fragmentation), que c satisfait le système infini d'équations différentielles:

$$\begin{aligned} \partial_t c_i(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\Big\{K(j,i-j)c_j(t)c_{i-j}(t) - F(j,i-j)c_i(t)\Big\} \\ &\quad -\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{K(i,j)c_i(t)c_j(t) - F(i,j)c_{i+j}(t)\Big\}, \quad i \in \mathbb{N}_*,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Il existe aussi un modèle continu, où chaque particule a une masse $x \in (0,\infty)$ (par exemple, dans le cas de gouttelettes, il n'y a aucune raison de supposer que les masses sont entières). Alors, si $c(t,x) \geq 0$ représente la concentration (infinitésimale) de particules de masse x, alors c satisfait l'équation intégro-diff érentielle:

$$\begin{aligned} \partial_t c(t,x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \Big\{K(y,x-y)c(t,y)c(t,x-y) - F(y,x-y)c(t,x)\Big\}dy \\ &\quad -\int_0^\infty \Big\{K(x,y)c(t,x)c(t,y) - F(x,y)c(t,x+y)\Big\}dy, \quad x \in (0,\infty),\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ici, les fonctions K et F de $(0,\infty)^2$ dans $\mathbb{R}_+$ sont supposées symétriques.
On peut aussi considérer une version *mesure* de ces équations, qui regroupe les modèles continus et discrets. Nous renvoyons à Drake [38], Aldous [5] et Laurençot-Mischler [69] pour des articles de revue sur le sujet.
Avant d'exposer nos travaux, décrivons le modèle de Marcus-Lushnikov [78, 76]. C'est en quelque sorte le modèle correspondant au cas où un nombre fini de particules s'aggrègent. Supposons qu'il n'y a pas de fragmentation ($F \equiv 0$), et considérons un système initial de n particules, de masses (discrètes ou continues) $x_1, ..., x_n$. Soit $m_n = x_1 + ... + x_n$ la masse totale initiale. On suppose alors que, à tout instant, chaque paire de particules (de masses x_k, x_l) s'aggrège pour donner une unique particule de masse $x_k + x_l$ avec un taux exponentiel de paramètre $K(x_k, x_l)/2m_n$. Décrivons ensuite ce système de particules par la mesure empirique $\mu_t^n = m_n^{-1}\sum_{i=1}^{n(t)} \delta_{x_i(t)}$, où $n(t)$ est le nombre de particules présentes à l'instant t, et $x_1(t), ..., x_{n(t)}(t)$ sont leurs masses. Il a été démontré récemment (voit Jéon [61], Norris [86]) que sous des hypothèses adéquates sur K (essentiellement $K(x,y)/y \to 0$ quand y tend vers l'infini pour tout x), μ_t^n converge dans un certain sens vers la solution c de l'équation de coagulation (4.1) (si les masses initiales

sont discrètes) ou (4.2) (sinon), si la condition initiale converge, lorsque le nombre de particules n tend vers l'infini.
Le processus de Marcus-Lushnikov fournit bien sûr une méthode numérique de résolution des équations de coagulation, et peut être naturellement étendu au cas de la fragmentation.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons d'abord à l'interprétation probabiliste de ces équations. Nous étudions ensuite les problèmes de résolution numérique, et enfin, le comportement des solutions en temps grand.

4.1 Interprétation probabiliste

Nous souhaitons adapter au cas des équations de coagulation-fragmentation l'interprétation probabiliste de Tanaka [103] concernant l'équation de Boltzmann.

4.1.1 Conservation de la masse et gel

Afin de construire une interprétation probabiliste de ces équations, on utilise une estimation *a priori* fondamentale associée aux équations (4.1) et (4.2): la conservation de la masse. Cette conservation s'écrit $\sum_{i\geq 1} ic_i(t) = \sum_{i\geq 1} ic_i(0) = 1$ ou $\int_0^\infty xc(t,x) = \int_0^\infty xc(0,x) = 1$ pour tout $t \geq 0$. Cette quantité ne vaut bien sûr pas 1 en général, mais un changement de temps et de noyaux permet de s'y ramener.

Il est bien connu que cette conservation est fausse si le noyau de coagulation K est trop explosif. On a essentiellement les estimations suivantes, au moins dans le cas où $F = 0$:
(i) si $K(x,y) \leq C(1 + x + y)$, alors la masse est conservée pour tout $t \geq 0$;
(ii) si $K(x,y) \geq C(x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha)$ avec $\lambda = \alpha + \beta > 1$, alors il y a *gelation*, i.e. apparition d'une particule de masse infinie, ce qui se traduit par une décroissance de la masse *finie*: dans le cas discret par exemple,

$$T_{gel} = \inf \left\{ t > 0; \sum_{i\geq 1} ic_i(t) < 1 \right\} < \infty. \tag{4.3}$$

Ce phénomène, connu heuristiquement depuis bien longtemps, a été récemment démontré par Jéon [61], puis Escobedo-Mischler-Perthame [47].

4.1.2 Coagulation seule

Nous traitons dans [126] le cas où il n'y a que de la coalescence ($F = 0$). Posons $Q_t(dx) = \sum_{i\geq 1} ic_i(t)\delta_i(dx)$ (dans le cas discret) ou $Q_t(dx) = xc(t,x)dx$ (dans le cas continu). Alors Q_t est *a priori* une mesure de probabilité sur $(0,\infty)$ pour chaque $t \geq 0$, ou au moins pour chaque $t \leq T_{gel}$. Comme dans le cas de l'équation de Boltzmann, on peut donc considérer l'évolution de la masse d'une particule *typique*, ou plutôt de la masse de la particule contenant un *atome typique*. Nous définissons et construisons, dans le cas où il n'y a pas de fragmentation, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$, croissant et à valeurs dans $(0,\infty)$, solution d'une E.D.S. non linéaire conduite par une mesure de Poisson, dont le générateur à l'instant $t \geq 0$ est donné, pour $x \in (0,\infty)$, $\phi : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$,

$$L_t\phi(x) = \int_0^\infty \left\{ \phi(x+y) - \phi(x) \right\} \frac{K(x,y)}{y} Q_t(dy), \tag{4.4}$$

où Q_t est la loi de X_t. Voir [126] Definition 2.8. Nous obtenons les résultats suivants (voir [126] Theorem 3.1, Proposition 2.9).

Théorème 18 *Soit Q_0 une probabilité sur $(0,\infty)$ admettant un moment d'ordre 2. Supposons que $F = 0$ et que K est localement Lipschitzien et symétrique sur $(0,\infty)^2$. Posons*
(i) si $K(x,y) \leq C(1+x+y)$, $T_0 = \infty$,
(ii) si $K(x,y) \leq C(1+x+y+xy)$, $T_0 = 1/C(1+\int xQ_0(dx))$.
Alors il existe un processus de Markov $\{X_t\}_{t\in[0,T_0)}$, càdlàg, croissant, à valeurs dans $(0,\infty)$, de générateur L_t donné par (4.4).
Notons $Q_t = \mathcal{L}(X_t)$ pour $t < T_0$. Alors $\mu_t(dx) = x^{-1}Q_t(dx)$ satisfait une formulation mesure de l'équation de coagulation regroupant les cas (4.1) et (4.2) (avec $F = 0$).

Nous montrons dans [130] Propositions 3.4 et 3.5 que si Q_0 est discrète (i.e. que son support est inclus dans $\mathbb{N}_*$) alors Q_t est discrète pour tout t, de sorte qu'on obtient une vraie solution de (4.1). Nous montrons aussi que si $K(x,y) \leq C(1+x+y)$, si $\int x^{-1}Q_0(dx) < \infty$, et si Q_0 est absolument continue (i.e. admet une densité), alors Q_t est aussi absolument continue pour tout t, de sorte qu'on obtient une vraie solution de (4.2).

Remarquons aussi qu'on aurait pu traiter l'existence globale (i.e. jusqu'à $t = \infty$) dans le cas avec gel. En effet, il aurait suffit d'ajouter un point cimetière $\{\infty\}$ à l'espace d'états de X.

Cette interprétation probabiliste donne une dimension supérieure aux équations 4.1 et 4.2, puisqu'elle contient une information historique des particules. Nous donnons dans [126] quelques applications (nombre de coalescences subies par une particule, temps de gel stochastique).

On étudie aussi dans [126], le lien entre le processus $\{X_t\}_{t\geq 0}$ et le processus de Marcus-Lushnikov décrit dans l'introduction de ce Chapitre (voir [126] Theorem 6.5).

Théorème 19 *Plaçons nous dans le cas discret (i.e. supposons que supp $Q_0 \subset \mathbb{N}_*$), et supposons que $K(x,y) \leq C(1+x+y)$. Supposons que $Q_0(dx) = x\mu_0(dx)$ admet un moment d'ordre 3. Considérons le processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ précédemment construit. Considérons aussi un processus de Marcus-Lushnikov, dans lequel on a choisi un atome au hasard, et appelons $\{F_1^n(t)\}_{t\geq 0}$ l'évolution de la taille de la particule contenant cet atome au cours du temps. Alors, si la condition initiale du processus de Marcus-Lushnikov converge vers μ_0 dans un certain sens, $\{F_1^n(t)\}_{t\geq 0}$ converge en loi, dans $\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{N}_*)$, vers $\{X_t\}_{t\geq 0}$.*

Ceci *confirme* la validité physique de notre processus $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

4.1.3 Coagulation et fragmentation explosive

Dans [130], on complique un peu le modèle, en considérant aussi de la fragmentation, éventuellement suffisamment forte pour qu'il apparaisse des particules de masse nulle. Ce phénomène a été étudié en détail par Bertoin [16], voir aussi Haas [55], dans le cadre de fragmentation pure. Dans le cas de fragmentations binaires, Bertoin et Haas n'ont considéré que des noyaux de fragmentation du type $F(y, x-y) = \alpha(x)\beta(y/x)$, pour certaines fonctions $\alpha : (0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ et $\beta : (0,1) \mapsto (0,\infty)$. Il faut alors réécrire le terme de coagulation de manière à prendre en compte ces particules de masse nulle. Nous nous intéressons au problème de l'existence, et de quelques propriétés qualitatives.

Le problème qui nous intéresse ici est de traiter le cas où F n'est pas forcément intégrable, au sens où $\int_0^x F(y, x-y)dy$ peut éventuellement diverger. Ceci signifie que chaque particule peut subir une infinité de fragmentations sur un intervalle de temps compact, à condition bien sûr que le taux infini de fragmentation concerne les fragmentations où les particules perdent très peu de masse. On considère donc la fonction $\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x y(x-y)F(y, x-y)dy$, qui représente le *taux de perte de masse* d'une particule de masse x. Au lieu de considérer l'équation de coagulation-fragmentation (4.2), nous écrivons l'équation sous forme faible satisfaite par $Q_t(dx) = xc(t,x)dx$, qui a le mérite de bien prendre en compte les particules de masse nulle: la proportion de masse sous forme de particules de masse nulle est simplement $Q_t(\{0\})$. Notons que $Q_t(\{0\}) > 0$ permet de définir rigoureusement le fait que $c(t,0)$ est suffisamment infini pour que $0 \times c(t,0) > 0$. Nous obtenons, dans [130] (Theorem 3.2), le résultat suivant.

Théorème 20 *Soit Q_0 une probabilité sur $[0,\infty)$ (avec éventuellement $Q_0(\{0\}) > 0$). Supposons que le taux de coagulation K est symétrique, continu, et satisfait $K(x,y) \leq C(1+x+y)$. Le noyau de fragmentation F est continu, symétrique, la fonction ψ est continue, $\psi(0) = 0$ (ce qui signifie juste qu'une particule de masse nulle n'a pas le droit de se fragmenter), et $\psi(x) \leq C(1+x^p)$, pour un certain $p \in \mathbb{N}_*$. Enfin, Q_0 admet un moment d'ordre $p+1$. Alors, sous une hypothèse technique anodine sur ψ, on peut construire un processus de Markov càdlàg $\{X_t\}_{t\geq 0}$ à valeurs dans $[0,\infty)$, solution d'une E.D.S. non linéaire conduite par une mesure de Poisson, et dont la famille de lois marginales $Q_t = \mathcal{L}(X_t)$ satisfait l'équation sous forme faible: pour tout $\phi : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ suffisamment régulière,*

$$\int Q_t(dx)\phi(x) = \int Q_0(dx)\phi(x) + \int_0^t ds \int Q_s(dx) \int_0^x dy[\phi(x-y) - \phi(x)]\frac{x-y}{x}F(y, x-y)$$
$$+ \int_0^t ds \int Q_s(dx) \int Q_s(dy) \frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{y} K(x,y) \mathbb{1}_{\{y>0\}} + \int_0^t ds \int Q_s(dx) K(x,0) Q_s(\{0\}). \tag{4.5}$$

L'équation (4.5) est obtenue par un passage à la limite rigoureux dans des équations de coagulation-fragmentation standard, i.e. avec $Q_0(\{0\}) = 0$ et avec F borné.

Remarquons que le terme supplémentaire (le dernier dans (4.5)) exprime la coalescence continue de particules de masse nulle sur une particule de masse x avec taux $K(x,0)$, et proportionnellement à $Q_t(\{0\})$. Notre modèle permet la présence de particules nulles soit parce qu'elles ont été produites par la fragmentation, soit parce qu'elles étaient déjà là à l'instant $t = 0$.

Nous pouvons essentiellement regrouper les résultats de [130] en deux parties. Tout d'abord quelques résultats concernant l'apparition ou la disparition de particules de masse nulle (voir [130] Proposition 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.11).

Proposition 21 *Considérons le processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ construit au Théorème 20 et la solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ de (4.5) associée.*
(i) Si $K(0,0) > 0$ et, par exemple, F est bornée, alors même si $Q_0(\{0\}) = 1$, $Q_t(\{0\}) = 0$ pour tout $t > 0$.
(ii) Si $F = 0$ et $K \equiv 1$, nous avons un résultat d'unicité et des expressions explicites pour $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ et $\{X_t\}_{t\geq 0}$.
(iii) Si $K(x,y) \leq Cxy$ et $\psi(x) \geq \rho x^\gamma$ pour certains $\rho > 0$, $\gamma \in (0,1)$, alors même si $Q_0(\{0\}) = 0$, $Q_t(\{0\}) > 0$ pour tout $t > 0$. De plus, l'application $t \mapsto Q_t(\{0\})$ est croissante et tend vers 1 quand t tend vers l'infini.
(iv) Si $K(x,y) \leq x^\gamma + y^\gamma$, et que $\psi(x) \geq \rho x^\gamma$, pour un certain $\gamma \in (0,1)$, alors, si $\rho > 4/(1-\gamma)$, $\liminf_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t Q_s(\{0\})ds > 0$.

En utilisant des techniques de moments, nous sommes parvenus à améliorer le résultat de la Proposition 21-(i) de la manière suivante.

Remarque 22 *Considérons le processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ construit au Théorème 20 et la solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ de (4.5) associée. Supposons que F est bornée, et que $K(x,y) > \epsilon(x^\gamma + y^\gamma)$, pour un certain $\epsilon > 0$ et un certain $\gamma \in [0,1)$. Alors même si $Q_0(\{0\}) = 1$, $Q_t(\{0\}) = 0$ pour tout $t > 0$.*

Ce dernier résultat est relativement surprenant, puisqu'il montre que même si a l'instant 0, les particules ont toutes une masse nulle, et si $K(0,0) = 0$, le processus X_t peut *décoller*.

Nous obtenons ensuite un résultat de régularisation, en utilisant la méthode de [128] (voir [130] Proposition 3.2).

Théorème 23 *Considérons le processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ construit au Théorème 20 et la solution $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ de (4.5) associée.*
Supposons que $K(x,y) \leq C[xy \wedge (1+x+y)]$, et que F est de la forme $F(x,y) = \alpha(x)\beta(y/x)$, pour certaines fonctions α sur $[0,\infty)$ et β sur $(0,1)$. Si $\int_0^1 \beta(\theta)d\theta = \infty$ et si $x \mapsto x\alpha(x)$ est décroissante sur $(0,\infty)$, alors pour tout $t > 0$, $Q_t(dx)$ est absolument continue par rapport à $\delta_0(dx) + dx$, même si Q_0 est singulière.

Ce résultat démontre l'idée intuitive suivante: le taux de fragmentation étant infini, chaque particule se fragmente immédiatement, en deux particules dont la loi est diffuse. Donc pour tout $t > 0$, la loi de X_t a une densité, conditionnellement à ce que $X_t \neq 0$.
Ce dernier résultat est assez restrictif, toujours pour les mêmes raisons (voir Chapitre 2), c'est à dire parce que le taux de fragmentation $x\alpha(x)$ dépend de la masse x de la particule. Mais il est tout de même intéressant de voir que la méthode développée dans [128] peut s'appliquer à des situations physiques, ce qui n'était pas clair *a priori*.

4.2 Simulation et limites hydrodynamiques

Nous nous intéressons maintenant au problème de la résolution numérique des équations (4.1) et (4.2), et à la convergence de systèmes finis de particules aléatoires en interaction vers les solutions.

4.2.1 Un algorithme de simulation exacte

Nous considérons dans [133] le cas de la coagulation seule ($F = 0$) discrète ou continue. Nous ne détaillerons pas ici les algorithmes (voir [133] Algorithms 1 et 2). Nous obtenons les résultats suivants (voir [133] Propositions 3.2 et 4.2).

Théorème 24 *Supposons donc que $F = 0$.*
1. Plaçons-nous dans le cas discret. Considérons une condition initiale $\{c_k(0)\}_{k\geq 1}$ admettant un moment d'ordre 2 ($\sum_k k^2 c_k(0) < \infty$), et un noyau de coagulation $K(x,y) \leq C(x+y)$. Il existe alors un algorithme de simulation recursif très simple (et sans approximation) d'un processus de Markov $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$, càdlàg, croissant, à valeurs dans $\mathbb{N}_*$, de générateur L_t donné par (4.4). En particulier, $c(t,k) = P[X_t = k]/k$ est solution de (4.1).
2. Le même résultat peut être étendu au cas continu (avec un algorithme sensiblement moins simple), si par exemple $K(x,y) \leq C(1+x+y)$, et si $\int(1+x^2)c_0(x)dx < \infty$. (Nous autorisons K à exploser en 0 si c_0 satisfait des conditions adéquates).

Ce résultat est très satisfaisant du point de vue théorique: d'une part, il fournit une preuve constructive et immédiate d'existence de solutions pour (4.1) et (4.2). D'autre part, il est assez peu courant d'obtenir une méthode de simulation exacte pour des phénomènes non linéaires. Enfin, la preuve de convergence des approximations numériques est immédiate en utilisant la loi des grands nombres usuelle, la vitesse est donnée directement par le théorème central limite usuel, etc...

Du point de vue de la simulation, les algorithmes proposés sont globalement moins puissants que celui d'Eibeck-Wagner [43], mais présentent quelques avantages (voir [133] Section 5): par exemple, il est plus précis concernant le temps petit et les petites particules.

Remarquons pour conclure que la méthode s'étend sans aucune difficulté au cadre avec fragmentation, dans le cas discret. Il semble que le cas de la coagulation-fragmentation continue pose des problèmes réels, puisque notre algorithme dans le cas continu repose sur la structure croissante des masses de particules. Enfin, on ne peut pas atteindre le cas où il y a gel, sauf le cas où $K(x,y) = xy$, voir [133] Remark 4.3 pour plus de précisions.

4.2.2 Sur le processus de Marcus-Lushnikov

Nous nous intéressons dans [132] à la convergence du processus de Marcus-Lushnikov vers la solution des équations (4.2) et (4.1), dans le cas où le noyau de coagulation est suffisamment explosif. Rappelons que Jéon [61] et Norris [86] ont montré que le processus de Marcus-Lushnikov tend vers la solution de (4.1) ou (4.2) (avec $F = 0$) essentiellement quand $\lim_{y\to\infty} K(x,y)/y = 0$. Nous nous intéressons ici au cas ou cette condition n'est pas satisfaite. Nous obtenons le résultat suivant (voir [132] Theorem 2.3 pour un énoncé dans les cas discret et continu).

Théorème 25 *Plaçons-nous dans le cas discret pour simplifier. Supposons que $F = 0$, et que le noyau de coagulation satisfait $K(x,y) \leq C(1+x)(1+y)$. Supposons aussi que pour tout x, $l(x) = \lim_{y\to\infty} K(x,y)/y$ existe. Considérons un processus de Marcus-Lushnikov $\{\mu_t^n\}_{t\geq 0}$ associé à une condition initiale μ_0^n. Supposons que $\{\mu_0^n(\{k\})\}_{k\geq 1}$ converge dans un certain sens vers une condition initiale $\{c_0(k)\}_{k\geq 1}$ satisfaisant $\sum_k kc_0(k) = 1$ et $\sum_k k^2 c_0(k) < \infty$. Alors la suite $\{\mu_t^n(\{k\})\}_{k\geq 1, t\geq 0}$ est compacte en loi (dans un certain sens). Tout point limite est de la forme $\{c_t(k)\}_{k\geq 1, t\geq 0}$, et est solution dans un sens faible de l'équation de Smoluchowski modifiée:*

$$\begin{aligned} \partial_t c_i(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} K(j,i-j)c_j(t)c_{i-j}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} K(i,j)c_i(t)c_j(t) \\ &\quad -c_i(t)l(i)(1-\sum_{j\geq 1} jc_j(t)), \qquad i \in \mathbb{N}_*,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

L'équation (4.6) ne diffère de l'équation de Smoluchowski (i.e. (4.1) avec $F = 0$) que lorsqu'il y a gel, et que l n'est pas nul, par exemple pour des noyaux de type $K(x,y) = xy^\alpha + x^\alpha y$, pour $\alpha \in (0,1]$. Le dernier terme de (4.6) exprime que les particules finies (de taille i) sont absorbées par la particule infinie (qui occupe une proportion $1 - \sum_{j\geq 1} jc_j(t)$ de la masse totale) au taux $l(i)$. Contrairement à l'équation habituelle, ce modèle prend donc en compte une certaine interaction entre les particules finies et infinies. Ce modèle est appelé *modèle de Flory* dans le cas où $K(x,y) = xy$, voir Flory [52]. Notre résultat montre donc que le processus de Marcus-Lushnikov ne tend pas vers l'équation de Smoluchowski dans le cas où $K(x,y)/y$ ne tend pas vers 0 quand y tend vers l'infini.

4.2.3 Méthode particulaire dans le cas homogène

Nous souhaitons maintenant proposer une méthode particulaire stochastique basée sur notre interprétation probabiliste des équations (4.1) et (4.2). Nous obtenons la même méthode qu'Eibeck-Wagner [43], qui s'étaient inspirés de Babovski [8]. Cette méthode est profondément inspirée de la fameuse méthode de Nanbu [85] pour l'équation de Boltzmann, voir aussi Graham-Méléard [53]. Linéarisons-donc notre processus de Markov de générateur L_t (voir (4.4)), en considérant un nombre fini $n \in \mathbb{N}_*$ de particules, comme dans le cas de l'équation de Boltzmann.

Pour $n \in \mathbb{N}_*$, considérons un processus de Markov $(M_t^{1,n}, ..., M_t^{n,n})$, à valeurs dans $(0,\infty)^n$, de générateur L^n donné, pour $m = (m_1, ..., m_n) \in (0,\infty)^n$ et $\phi : (0,\infty)^n \mapsto \mathbb{R}$ suffisamment bornée, par

$$L^n\phi(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{K(m_i,m_j)}{m_j}\left[\phi(m_{ij}) - \phi(m)\right], \tag{4.7}$$

où $m_{ij} = (m_1, ..., m_{i-1}, m_i + m_j, m_{i+1}, ..., m_j, ..., m_n)$. Il est à noter que ce procédé est beaucoup moins raisonnable, physiquement, que celui de Marcus-Lushnikov, puisque les interactions ne sont pas symétriques: on ajoute la masse de la particule j à celle de la particule i, mais on ne modifie pas la particule j. Néanmoins, ce système a le bon goût de conserver le nombre de particules au cours du temps, alors que l'algorithme de Marcus-Lushnikov fait rapidement décroitre le nombre de particules. On s'attend donc raisonnablement à ce que ce nouveau procédé soit meilleur, pour des temps grands. Voir à ce sujet l'étude numérique d'Eibeck-Wagner [43]. Nous obtenons dans [126] les résultats suivants (voir [43] pour d'autres résultats de convergence) (voir [126], Theorem 3.3, Proposition 3.7, Theorem 4.4).

Théorème 26 *Supposons que le noyau de coagulation satisfait $K(x,y) \leq C(1+x+y)$, et considérons une mesure μ_0 sur $(0,\infty)$ admettant un moment d'ordre 3, telle que $Q_0(dx) = x\mu_0(dx)$ soit une probabilité. Considérons le processus de Markov $(M_t^{1,n},...,M_t^{n,n})$ de générateur L^n et de loi initiale $Q_0^{\otimes n}$.*
1. La suite de mesures empiriques $Q^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{M^{i,n}}$ est compacte (en loi), et tout point limite Q est la loi d'un processus de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de générateur (4.4). Rappelons que si l'on pose $Q_t = \mathcal{L}(X_t)$, alors $\mu_t(dx) = x^{-1}Q_t(dx)$ est solution faible d'une version mesure des équations (4.1) et (4.2).
2. Dans le cas discret (i.e. si le support de μ_0 est inclus dans $\mathbb{N}_*$), alors il y a propagation du chaos en variation, c'est à dire que pour tout k fixé, pour tout T fixé, la distance en variation entre $\mathcal{L}(M^{1,n},...,M^{k,n})$ et $\mathcal{L}(M^{1,n})\otimes...\otimes\mathcal{L}(M^{k,n})$, en tant que lois de processus sur $[0,T]$, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
3. Dans le cas discret, et si K est borné, le processus $\sqrt{n}(Q^n - Q)$ converge en loi vers un processus continu Gaussien (explicite).

Tous ces résultats sont très techniques, mais reposent sur une machinerie standard, voir les travaux concernant l'équation de Boltzmann de Graham-Méléard [53] et Méléard [80]. Nos résultats de convergence sont plus *trajectoriels* que ceux d'Eibeck-Wagner [43], et le résultat de propagation du chaos et le théorème central limite sont nouveaux.

4.2.4 Méthode particulaire dans le cas inhomogène

On souhaite maintenant prendre en compte les positions des particules, ainsi que leur mouvement. Nous ne traiterons que le cas où les particules diffusent dans $\mathbb{R}^p$ tout entier. Nous allons étendre au cadre de la coagulation des idées de Graham-Méléard [53] concernant l'équation de Boltzmann. Remarquons néanmoins que nous allons démontrer rigoureusement un résultat de convergence d'équations délocalisées vers une équation locale, ce qui n'est pas le cas dans [53]. Nous nous baserons en particulier sur des idées de Norris [88]. Nous considérons ici le cas discret.
Considérons donc la concentration $c(t,x,i)$ de particules de masse $i \in \mathbb{N}_*$ et position $x \in \mathbb{R}^p$, dans un système infini où deux particules de masses i et j peuvent s'aggreger au taux $K(i,j)$ si elles sont au même endroit, et où chaque particule se déplace comme un mouvement Brownien, avec un coefficient de diffusion d qui ne dépend que de sa masse (on peut naturellement supposer que d est décroissant). Alors pour tout $t \geq 0$, tout $i \in \mathbb{N}_*$, tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} \partial_t c(t,x,i) &= d(i)\Delta_x c(t,x,i) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} K(j,i-j)c(t,x,j)c(t,x,i-j) \\ &\quad - c(t,x,i)\sum_{j=1}^{\infty} K(i,j)c(t,x,j). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cette équation est bien sûr beaucoup plus difficile que l'équation homogène, surtout du point de vue probabiliste: alors que dans le cas homogène, les interactions concernent deux particules *indépendantes*, dans le cas inhomogène, les interactions concernent deux particules *indépendantes conditionnellement au fait qu'elles aient la même position.* Afin d'obtenir un système de particules simulable, nous devons donc introduire deux paramètres d'approximation: le nombre n de particules, et le coefficient $\epsilon > 0$ de *délocalisation.* Nous considérons donc un système de particules $((X_t^{1,n,\epsilon}, M_t^{1,n,\epsilon}),...,(X_t^{n,n,\epsilon}, M_t^{n,n,\epsilon}))_{t\geq 0}$, qui généralise celui de la sous-section précédente (les variables X (resp. M) représentent des positions (resp. des masses)), défini comme un processus de Markov à valeurs dans $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{N}_*)^n$ de générateur $L^{n,\epsilon}$. Ce générateur est défini pour $(x,m) = ((x_1,m_1),...,(x_n,m_n)) \in (\mathbb{R}^p \times \mathbb{N}_*)^n$ et $\phi : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{N}_*)^n \mapsto \mathbb{R}$

suffisamment régulière et bornée, par

$$
\begin{aligned}
L^{n,\epsilon}\phi(x,m) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\phi(x,m_{ij})-\phi(x,m)\right]\frac{K(m_i,m_j)}{m_j}\frac{1\!\!1_{\{|x_i-x_j|\leq\epsilon\}}}{v_p\epsilon^p} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n} d(m_i)\Delta_{x_i}\phi(x,m), \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

où v_p est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^p$, et où $m_{ij}=(m_1,...,m_{i-1},m_i+m_j,m_{i+1},...,m_j,...,m_n)$. Nous obtenons essentiellement le résultat suivant (voir [129] Theorems 3.7 et 3.13).

Théorème 27 *Considérons une condition initiale* $c(0,x,k)$ *admettant un moment d'ordre* 3 *(en* x *et* k*). Considérons la mesure de probabilité* $Q_0(dx,dk)=\sum_{j\geq 1} jc(0,x,j)dx\delta_j(dk)$*. Considérons le processus de Markov* $((X_t^{1,n,\epsilon},M_t^{1,n,\epsilon}),...,(X_t^{n,n,\epsilon},M_t^{n,n,\epsilon}))_{t\geq 0}$ *de loi initiale* $Q_0^{\otimes n}$ *et de générateur* $L^{n,\epsilon}$*. Supposons que* $d:\mathbb{N}_*\mapsto\mathbb{R}_+$ *soit décroissante et minorée, que* $K(x,y)\leq C(x+y)$*, et que* Q_0 *soit suffisamment absolument continue en* x *(il existe une probabilité* ν_0 *sur* $\mathbb{N}_*$ *telle que* $Q_0(dx,dk)\leq Cdx\nu_0(dk)$*). Alors*
1) La famille de mesures empiriques $Q^{n,\epsilon}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X^{i,n,\epsilon},M^{i,n,\epsilon}}$ *est compacte en* n *(à* $\epsilon>0$ *fixé), et tout point limite* $\{Q_t^\epsilon\}_{t\geq 0}$ *est solution d'une équation de type (4.8) délocalisée.*
2) La famille $\{Q_t^\epsilon\}_{t\geq 0}$ *est compacte (en* ϵ*), et tout point limite* $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ *est de la forme* $Q_t(dx,dk)=\sum_{j\geq 1} kc(t,x,j)dx\delta_j(dk)$*, où* c *est solution (faible) de (4.8).*

Remarquons que nous obtenons en fait des résultats sur les lois de processus. La partie difficile de la preuve (i.e. la convergence de ϵ vers 0) repose sur l'utilisation du semi-groupe de la chaleur. Ce résultat n'est pas atteint dans le cas de l'équation de Boltzmann inhomogène (voir [53]). Nous utilisons pour cela une propriété de monotonie fondamentalement liée à l'équation de coagulation, voir [129], Lemma 3.10 et sa preuve pour l'argument principal.

Il faudrait bien sûr être capable de faire tendre ϵ vers 0 et n vers l'infini simultanément, mais ce n'est pas facile. Il est clair en particulier, qu'on ne peut pas faire tendre d'abord ϵ vers 0 puis n vers l'infini.

4.3 Comportement en temps grand

Nous nous intéressons maintenant au comportement en temps grand des solutions d'équations de coagulation-fragmentation. Nous commençons par traiter un cas de convergence à l'équilibre quand la fragmentation et la coagulation se compensent. Nous étudions ensuite l'existence d'un équilibre dynamique à l'équation de coagulation seule. Nous montrons enfin un résultat de convergence vers un état d'équilibre trivial pour un modèle inhomogène.

4.3.1 Coagulation-fragmentation discrète: convergence à l'équilibre

Considérons l'équation discrète (4.1). Tous les résultats connus de convergence à l'équilibre concernent le cas où il existe un *équilibre en détail* (voir [2, 10, 24, 40, 58]), c'est à dire une suite de nombres positifs $\{M(i)\}_{i\in\mathbb{N}_*}$ vérifiant, pour tous $i,j\in\mathbb{N}_*$, $M(i+j)F(i,j)=M(i)M(j)K(i,j)$. Cette hypothèse, bien que souvent vérifiée, est restrictive: par exemple si on suppose que $K(i,j)>0$ pour tous i,j, mais qu'une particule de masse i ne peut se fragmenter que sous la forme $1,i-1$, alors une telle hypothèse ne peut être satisfaite. Pourtant, il est clair que si F est suffisamment grand par rapport à K, le système est relativement stable, et donc peut converger vers un équilibre. Nous obtenons le résultat suivant (voir [137] Theorem 1.3), qui semble être le premier dans cette direction.

Théorème 28 *Supposons que* $K(i,j)\leq a_0(ij)^\alpha$*, avec* $\alpha\in[0,1]$*, et que* $F(i,j)\geq b_0(i+j)^\gamma$*, avec* $\gamma\in(-1,\infty)$*, avec de plus* $2+\gamma>2\alpha$*. Supposons de plus que* F *est à croissance au plus polynomiale. Considérons alors un nombre* $m_1>0$*. Il existe une constante explicite* $C=C(\alpha,\gamma,a_0,b_0)$ *telle que si*

$m_1 < C$,
1) il existe un unique équilibre (i.e. une solution stationnaire) $\{d_i\}_{i\geq 1}$ de (4.1), tel que $\sum_{i\geq 1} id_i = m_1$, et satisfaisant des conditions d'intégrabilité raisonnables;
2) toute solution $\{c_i(t)\}_{t\geq 0, i\in\mathbb{N}_*}$ à (4.1) préservant la masse, satisfaisant des conditions d'intégrabilité raisonnables, et telle que $\sum_{i\geq 1} ic_i(0) = m_1$, converge exponentiellement vite vers $\{d_i\}_{i\geq 1}$, au sens où il existe des constantes explicites $K > 0$ et $\kappa > 0$ telles que pour tout $t \geq 1$,

$$\sum_{i\geq 1} i^2 |c_i(t) - d_i| \leq K e^{-\kappa t}. \tag{4.10}$$

Ce résultat serait parfaitement satisfaisant sans la condition que m_1 doit être petit. En effet, les minorations et majorations que nous imposons à K et F sont standards et raisonnables. Une conjecture affirme que la condition $2 + \gamma \geq 2\alpha$ est nécéssaire et suffisante pour que les solutions satisfassent *a priori* $\sup_{t\geq 0} \sum_{i\geq 1} i^2 c_i(t) < \infty$, donc pour que le système soit stable (dans un sens relativement fort). Remarquons finalement que [137] est notre preuve est purement analytique.

4.3.2 Coagulation continue: sur les solutions auto-similaires

Considérons l'équation de coagulation continue (4.2), avec un noyau de coagulation *homogène*, c'est à dire satisfaisant

$$K(ux, uy) = u^\lambda \, K(x,y)\,, \qquad (u,x,y) \in (0,\infty)^3\,, \tag{4.11}$$

pour un certain paramètre $\lambda \in (-\infty, 1)$. Une conjecture célèbre (voir Aldous [5], Leyvraz [74], Laurençot-Mischler [69]) affirme alors que, si $\gamma = 1/(1-\lambda)$,
(i) il existe une fonction $\psi : (0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ telle que $\int_0^\infty x\psi(x)dx = 1$ et $c_S(t,x) = t^{-2\gamma}\psi(xt^{-\gamma})$ est solution de (4.2),
(ii) toute solution $c(t,x)$ de (4.2) satisfaisant $\int_0^\infty xc(t,x)dx = 1$ pour tout $t > 0$ et des conditions d'intégrabilité raisonnables se comporte, en temps grand, comme c_S.

De plus, les physiciens proposent des équivalents du *profil* ψ (pour $x \to 0$ et $x \to \infty$), voir [74, 39]. Du point de vue mathématique, il semble qu'aucun résultat rigoureux ne soit connu à ce jour, à part dans le cas des noyaux $K(x,y) = 1$ et $K(x,y) = x + y$, où ψ est donnée par des formules explicites.

Dans [140], nous obtenons le résultat suivant (voir [140] Theorems 1.2 et 1.3).

Théorème 29 *Considérons un noyau de coagulation K satisfaisant une des conditions suivantes:*

$$K(x,y) = (x^\alpha + y^\alpha)(x^{-\beta} + y^{-\beta}), \quad \alpha \in [0,1),\ \beta \in (0,\infty),\ \lambda = \alpha - \beta \in (-\infty, 1), \tag{4.12}$$
$$K(x,y) = (x^\alpha + y^\alpha)^\beta, \quad \alpha \in [0,\infty),\ \beta \in (0,\infty),\ \lambda = \alpha\beta \in [0,1), \tag{4.13}$$
$$K(x,y) = x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha, \quad \alpha \in [0,1),\ \beta \in (0,1),\ \lambda = \alpha + \beta \in [0,1), \tag{4.14}$$

Posons $\gamma = 1/(1-\lambda)$. Alors il existe une fonction $\psi : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^\infty x\psi(x)dx = 1$ et $c_S(t,x) = t^{-2\gamma}\psi(xt^{-\gamma})$ est solution (faible) de (4.2).
De plus, ψ est minorée par une fonction continue strictement positive sur $(0,\infty)$, et nous obtenons des résultats d'intégrabilité:

$$\textit{sous (4.12)}, \quad \psi \in L^1(0,\infty; x^\sigma dx) \ \textit{pour tout}\ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$
$$\textit{sous (4.13)}, \quad \psi \in L^1(0,\infty; x^\sigma dx) \ \textit{pour tout}\ \sigma \geq \lambda, \tag{4.16}$$
$$\textit{sous (4.14)}, \quad \psi \in L^1(0,\infty; x^\sigma dx) \ \textit{pour tout}\ \sigma > \lambda. \tag{4.17}$$

Ces résultats sont en accord avec les conjectures des physiciens, voir [74].

Un résultat similaire a été obtenu par une autre méthode simultanément dans [48].
Notre preuve, purement analytique, est basée sur une discrétisation adéquate de (4.2), ainsi que sur des estimations fines de moments. Nous pourrions probablement traiter le cas d'autres noyaux explicites, mais (4.12), (4.13) et (4.14) semblent couvrir une bonne partie de la litérature.

Il semble intéressant, du point de vue physique, d'obtenir des équivalent du profile ψ en $x = 0$ et $x = \infty$. Par exemple, un équivalent de ψ en $x = 0$ décrit, dans un certain sens, la concentration des particules dont la masse croît moins vite que la moyenne. Dans [142] Theorem 1.2, nous démontrons rigoureusement une partie des résultats heuristiques de [39].

Théorème 30 *Considérons un noyau de coagulation somme, c'est à dire*

$$K(x,y) = x^\lambda + y^\lambda, \quad \lambda \in (0,1), \tag{4.18}$$

et considérons la fonction ψ construite au Théorème précédent. Alors $\psi \in C^1((0,\infty))$. Soit alors $\gamma = 1/(1-\lambda)$, et

$$\tau := 2 - \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty x^\lambda \ \psi(x)\ dx\,. \tag{4.19}$$

Alors $\tau \in (1, \min\{3/2, 1+\lambda\})$ et il existe $L_0 > 0$ tel que $\psi(z) \sim L_0 z^{-\tau}$ quand $z \to 0$.
De plus, il existe $\rho_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $\psi(z) \le Ce^{-\rho_0 z}$ pour tout $z \in [1,\infty)$. Enfin, on ne peut pas choisir ρ_0 arbitrairement grand, puisqu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que $\int_1^\infty e^{\rho_1 z}\psi(z)dz = \infty$.

La preuve de ce résultat est purement analytique, longue, mais repose sur des techniques élémentaires. L'équivalent en 0 confirme les conjectures de [39]. Les majorations (et minorations) de $\psi(z)$ pour z grand sont en accord avec [39], qui conjecturent que $\psi(z) \sim Az^{-\lambda}e^{-cz}$, pour certaines constantes $A > 0$ et $c > 0$.

Notons pour conclure que des conjectures similaires sont énoncées concernant les noyaux produits $K(x,y) = (xy)^\lambda$, $\lambda \in (0,1/2)$, mais notre preuve ne semble pas s'adapter.

4.3.3 Sur un modèle inhomogène

Nous étudions dans [136] un modèle relativement différent des précédents. Les notations étant très lourdes, nous ne présenterons que l'idée intuitive du modèle et du résultat. Considérons un système infini de particules, caractérisées par leur masse $m \in \mathbb{N}_*$ et leur position $x \in \mathbb{R}^d$ ($d \ge 2$). Supposons que chaque particule (de caractéristiques x, m) bouge comme un mouvement Brownien, avec un coefficient de diffusion $\alpha(m)$ dépendant de sa masse, et soit attiré par 0 avec une force d'intensité de type $|x|$. Supposons enfin que deux particules (de caractéristiques x, m et x_*, m_*) peuvent s'aggreger avec taux $K(m, m_*) \le C(m + m_*)$ si $|x - x_*| < \epsilon$.
On considère une particule *typique* extraite de ce modèle, et on note $(X_t, M_t)_{t\ge0}$ l'évolution stochastique de ses caractéristiques au cours du temps. On démontre essentiellement les résultats suivants (voir [136] Theorems 2.4 et 2.5).

Théorème 31 *1. Supposons que $\alpha(m)$ décroit vers 0 quand m tend vers l'infini. Supposons aussi que pour tout $i \in \mathbb{N}_*$, $K(i,i) > 0$. Alors $\lim_{t\to\infty} M_t = \infty$ presque sûrement, et $\lim_{t\to\infty} E[|X_t|^2] = 0$.*
2. Si de plus il existe $c > 0$ et $\beta > 0$ tels que $K(i,j) \ge c(i+j)$ et $\alpha(m) \le C/m^{(3/4)+\beta}$, alors X_t tend vers 0 presque sûrement.

Ces résultats sont intuitivement très simples. En effet, le fait que M croisse vers l'infini provient du fait que $K(i,i) > 0$, et de la récurrence du mouvement qu'on considère: la force de rappel en $|x|$ assure que les particules se croisent souvent, et donc s'aggrègent. On obtient ainsi que $\alpha(M_t) \to 0$ presque sûrement, quand t tend vers l'infini. Donc X doit se comporter, en temps grand, comme la solution de l'équation $y' = -y$, qui bien sûr tend vers 0.
La preuve de 1. est assez simple. Par contre, la preuve de 2. est originale, et les idées intuitives ci-dessus ne sont pas si faciles à quantifier et exprimer.

4.4 Perspectives

Dégageons pour conclure quelques problèmes.

Coagulation-fragmentation inhomogène dans un domaine: nous avons tenté d'étendre les résultats de [129] (voir sous-section 4.2.3) au cadre avec fragmentation, et où les particules se déplacent dans un domaine borné, avec des conditions de reflexion normale au bord. Nous sommes capable de conclure dans le cas discret, en utilisant essentiellement les techniques de Laurençot-Mischler [67] mais le cas continu résiste.

Régularisation: nous avons construit dans [130] une solution mesure non-triviale $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ de l'équation de Smoluchowski avec condition initiale $x\mu_0(dx) = \delta_0(dx)$, dès que $K(0,0) > 0$. Il paraît clair que μ_t a une densité pour tout $t > 0$. Il serait particulièrement intéressant (d'un point de vue purement mathématique) de démontrer un tel résultat, car la régularisation *vient profondément de la non linéarité*, de sorte qu'aucune méthode usuelle ne peut s'appliquer.

Systèmes infinis de particules: notre algorithme de simulation exacte (voir [133]) démontre qu'il est possible de construire explicitement l'évolution d'une particule noyée dans un système infini. Peut-on construire, en exploitant cet algorithme, un système infini de particules stochastiques en interaction, échangeables, contenant l'équation de Smoluchowski, dans le cas d'un noyau général (non gellif)? Des exemples sont donnés dans Aldous [5], dans les cas où $K = 1$, $K(x,y) = x + y$, et $K(x,y) = xy$.

Potentiel Newtownien: peut-on étendre les méthodes de [136] au cadre plus physique d'une force de rappel Newtonienne?

Convergence à l'équilibre: dans le cas sans équilibre en détail, le résultat de [137] semble être le seul. Il serait bien sûr fructueux de lever l'hypothèse de petite condition initiale, et de l'étendre au cas continu (ce qui n'est manifestement pas trivial).

Auto-similarité: nous avons démontré dans [140] l'existence d'une solution auto-similaire c_S à (4.2). Il reste à étudier la convergence de toute solution c de (4.2) vers c_S.

Solutions Auto-similaires non physiques: dans les cas $K(x,y) = 1$ et $K(x,y) = x + y$, il a été montré récemment qu'il existe en fait une famille a un paramètre de solutions auto-similaires à (4.2). Mais une seule de ses solutions a une *masse finie.* Il serait intéressant de généraliser cette propriété au cas d'autres noyaux.

Algorithme Union-Find: certains coûts d'algorithmes informatiques de gestion de fichiers sont reliés au processus de Marcus-Lushnikov avec $K(x,y) = x+y$ et $K(x,y) = xy$ (voir Chassaing-Marchand [27]). Or les solutions de l'équation de Smoluchowski sont explicites pour ces noyaux (voir Aldous [5]). On pourrait donc espérer utiliser la convergence du processus de Marcus-Lushnikov vers la solution de l'équation de Smoluchowski afin de calculer (asymptotiquement) ce coût. Le problème principal est de montrer, par exemple si $K(x,y) = x + y$, que le processus de Marcus-Lushnikov converge vers la solution de l'équation de Smoluchowski sur des intervalles de temps du type $[0, \log n)$ au lieu de $[0, T]$. Ceci s'avère très délicat.

Chapitre 5

Collisions élastiques, inélastiques, et coalescentes

Nous présentons ici les résultats de [138], dont une version simplifiée et abrégée a été rédigée pour une conférence [135].
Les équations de Boltzmann et de coagulation sont bien sûr très proches, on l'a vu, à bien des points de vue: schémas numériques, interprétation probabiliste, etc... De plus, ces deux équations concernent l'évolution de la densité de particules interagissant par paires de manière discontinue. Néanmoins, il est clair que ces deux équations diffèrent du point de vue de l'étude fine: par exemple, les conservations physiques ne sont pas les mêmes, donc l'existence de solutions ne s'obtient pas de la même façon (dans des cas non bornés). L'équation de Boltzmann a tendance à *uniformiser* les vitesses (convergence vers une Maxwellienne), alors que l'équation de coagulation fait croître les masses à l'infini, etc... Nous souhaitons ici étudier une équation où les deux types d'interaction (coalescences et collisions) sont pris en compte.

5.1 Existence, unicité, temps long

Nous nous intéressons à la concentration (infinitésimale) de particules $f(t,m,p) \geq 0$ de particules de masse $m \in (0,\infty)$ et de quantité de mouvement $p \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \geq 0$, dans un *nuage de gouttelettes*. On suppose que ces particules (gouttelettes) sont uniformément réparties dans l'espace, et sont soumises à trois types d'interaction: des collisions élastiques, inélastiques, et coalescentes. Ce modèle, bien que très peu étudié du point de vue mathématique, est couvert par une large littérature physique, voir l'introduction de [138], et l'article de Villedieu [106]. On s'intéresse ici à l'existence, à l'unicité, et au comportement en temps grand de f.

Décrivons tout d'abord brièvement le modèle. On suppose que deux particules de caractéristiques (m,p) et (m_*,p_*) peuvent:
(i) entrer en collision élastique avec un paramètre d'impact $\nu \in S^2$ au taux $a_B((m,p),(m_*,p_*),\nu) \geq 0$, pour donner de nouvelles particules de paramètres (m',p') et (m'_*,p'_*) données par $m' = m$, $p' = p + 2\frac{mm_*}{m+m_*}\langle v_* - v, \nu\rangle \nu$, et $m'_* = m_*$, $p'_* = p_* - 2\frac{mm_*}{m+m_*}\langle v_* - v, \nu\rangle \nu$. Remarquons qu'une telle collision préserve la masse, la quantité de mouvement, et l'énergie cinétique;
(ii) entrer en collision inélastique avec un paramètre d'impact $\nu \in S^2$ et coefficient de perte de vitesse normale relative $e \in (0,1)$ au taux $a_G((m,p),(m_*,p_*),\nu,e) \geq 0$, pour donner de nouvelles particules de paramètres (m'',p'') et (m''_*,p''_*) données par $m'' = m$, $p'' = p + (1+e)\frac{mm_*}{m+m_*}\langle v_* - v, \nu\rangle \nu$, et $m''_* = m_*$, $p''_* = p_* - (1+e)\frac{mm_*}{m+m_*}\langle v_* - v, \nu\rangle \nu$. Remarquons qu'une telle collision préserve la masse, la quantité de mouvement, mais fait décroitre l'énergie cinétique;
(iii) s'aggreger avec taux $a_S((m,p),(m_*,p_*)) \geq 0$, pour donner une particule de paramètres (m_{**},p_{**}), donnés par $m_{**} = m + m_*$ et $p_{**} = p + p_*$. Ce type de collision préserve la masse, la quantité de mouvement, mais fait décroitre l'énergie cinétique.

On dit qu'une fonction $f(t,m,p) : [0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}_+$ est solution de notre problème si pour toute fonction $\phi : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}_+$ suffisamment intégrable, pour tout $t \geq 0$, si $Y = (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_Y \phi(m,p) f(t,m,p) dm dp = & \int_Y f(t,m,p) dm dp \int_Y f(t,m_*,p_*) dm_* dp_* \\
& \Big\{ \int_{S^2} d\nu a_B((m,p),(m_*,p_*),\nu) \left[\phi(m',p') + \phi(m'_*,p'_*) - \phi(m,p) - \phi(m_*,p_*)\right] \\
& + \int_{S^2} d\nu \int_0^1 de a_G((m,p),(m_*,p_*),\nu,e) \left[\phi(m'',p'') + \phi(m''_*,p''_*) - \phi(m,p) - \phi(m_*,p_*)\right] \\
& + a_S((m,p),(m_*,p_*)) \left[\phi(m_{**},p_{**}) - \phi(m,p) - \phi(m_*,p_*)\right] \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Cette équation *compte*, simplement, les apparitions et disparitions de particules de caractéristiques données, dues aux trois types de collisions.
On souhaite bien sûr émettre des hypothèses physiquement raisonnables sur les taux d'interaction a_B, a_G, et a_S. Malheureusement, les physiciens ne semblent pas connaître parfaitement ces taux, voir à ce sujet la longue introduction de [138]. Néanmoins, le taux total d'interaction a semble majoré par

$$a((m,p),(m_*,p_*)) \leq (m^{1/3} + m_*^{1/3})^2 |p/m - p_*/m_*| \tag{5.2}$$

où $v = p/m$ représente la vitesse de la particule. On souhaite inclure ce cas dans notre étude, ce qui pose les problèmes suivants. Du point de vue de l'existence et de l'unicité, le problème vient du fait que les taux ne sont pas sous-linéaires. Mais ceci ne peut pas être un réel problème, car les taux sont sous-linéaires en m, m_*, et les vitesses n'ont aucune raison de croitre (globalement), puisque les collisions préservent ou font décroitre l'énergie. Du point de vue du comportement en temps long, le problème vient du fait que les taux s'annulent en $p/m = p_*/m_*$, ce qui implique l'existence d'une multitude d'états d'équilibres: toute distribution du type $\lambda(dm)\delta_{(p/m)=v_0}$, avec $v_0 \in \mathbb{R}^3$ fixé, et λ quelconque, est invariante.

A l'aide d'estimations *a priori* très techniques, et d'un lemme d'unicité, on parvient à démontrer un résultat d'existence et d'unicité (voir [138] Theorem 2.6).

Théorème 32 *Considérons une condition initiale* $0 \leq f^{in} \in L^1_{m^{-2}+m^2+|p|^4/m^2}(Y)$. *Sous certaines hypothèses de symétrie physiquement raisonnables sur* a_S, a_B *et* a_G, *et s'il existe une constante* A *telle que, si* $\bar{a}_B = \int_{S^2} a_B d\nu$ *et* $\bar{a}_G = \int_{S^2}\int_0^1 a_G d\nu de$

$$(\bar{a}_B + \bar{a}_G + a_S)((m,p),(m_*,p_*)) \leq A(1 + m + m_*)(1 + |p|/m + |p_*|/m_*), \tag{5.3}$$

il existe une unique solution f *à notre problème telle que*

$$f \in C\left([0,\infty), L^1_{m^{-1}+m+|p|^2/m}(Y)\right) \cap L^\infty\left([0,\infty), L^1_{m^{-2}+m^2+|p|^4/m^2}(Y)\right). \tag{5.4}$$

Cette solution conserve de plus la masse et la quantité de mouvement totales, et dissipe l'énergie cinétique.

Ce résultat est satisfaisant. Par exemple dans le cas de l'équation des milieux granulaires ($a_B = a_S = 0$), les seuls résultats connus étaient ceux de Bobylev et al. [20] (qui supposent que a_G est borné) et de Toscani [104] (qui se place en dimension 1). Notre résultat répond par la négative à la question de Toscani [104] concernant le *finite time cooling* (i.e. il existe $t < \infty$ tel que $\int_0^\infty f(t,m,p)dm = \delta_{\{p=0\}}$). Enfin, nous améliorons (modérément) les résultats de Laurençot-Mischler [69] dans le cas de l'équation de Smoluchowski cinétique (i.e. $a_B = a_G = 0$).

On s'intéresse ensuite au temps long. Nous ne serons pas capables d'énoncer rigoureusement ici les résultats, mais, nous obtenons, par des techniques d'analyse:
(i) si $a_S = a_G = 0$, si $a_B \not\equiv 0$, et sous de multiples hypothèses supplémentaires alors $f(t,m,p)$ tend vers une Maxwellienne qui dépend des masses, voir [138] Theorem 2.3. La preuve est basée sur l'utilisation

du Théorème H de Boltzmann, qui décrit la dissipation d'éntropie. C'est bien naturel, puisque ce n'est qu'une équation de Boltzmann avec des masses.
(ii) si $a_S = 0$, si $a_G \not\equiv 0$, et sous de multiples hypothèses supplémentaires alors $f(t,m,p)$ tend vers une masse de Dirac en $p/m = 0$ (vitesse nulle) voir [138] Theorem 2.5. La preuve est basée sur la dissipation de l'énergie due aux collisions inélastiques. Une fois de plus, la preuve est technique, mais le résultat n'est pas surprenant.

Dans le cas général, nous démontrons le résultat suivant ([138] Theorem 2.7).

Théorème 33 *Supposons que le taux de coalescence est suffisamment positif, au sens où* $a_S((m,p),(m_*,p_*)) > 0$ *presque partout au voisinage de la diagonale* $(m,p) = (m_*,p_*)$. *Supposons aussi que les taux de collisions élastiques et inélastiques ne sont pas trop grands:*

$$(\bar{a}_B + \bar{a}_G)((m,p)(m_*,p_*)) \leq C\left(1 + \frac{mm_*}{m+m_*}|p/m - p_*/m_*|a_S((m,p)(m_*,p_*))\right). \tag{5.5}$$

Alors f *tend vers* 0 *dans* $L^1(dmdp)$ *quand* $t \to \infty$, *ce qui signifie que toutes les particules ont une masse infinie en temps infini.*

Les hypothèses sont relativement générales, et paraissent être satisfaites par les modèles physiques (voir Villedieu [106]). La convergence vers 0 n'est pas évidente, car on autorise a_S à s'annuler pour deux particules de même vitesse (qui ne se rencontrent pas). Donc les fonctions $S(m,p) = \lambda(m)\,\delta_{v=v_0}$ sont dans ce cas des solutions stationnaires. Notre résultat implique que, partant d'une condition initiale fonction, le seul état stationnaire atteint en temps infini est 0. Pour démontrer ce résultat, nous avons recours à une interprétation probabiliste de l'équation, ce qui permet d'écrire proprement le raisonnement par l'absurde suivant: les particules dont la masse ne tend pas vers l'infini ne subissent au cours du temps qu'un nombre fini de collisions de toutes sortes, grâce à l'hypothèse (5.5). Donc leurs vitesses ne tendent pas vers 0. Donc, si on suppose que la proportion des particules dont la masse ne tend pas vers l'infini est positive, on peut minorer, à partir d'un certain temps t_0, $f(t,m,p)$ par une fonction $\alpha(m,p)$ indépendante du temps, non identiquement nulle. Le taux de collisions coalescentes entre ces particules est alors minorée en temps. Donc ces particules vont continuer à s'aggreger, et leur masse va tendre vers l'infini. Ceci contredit l'hypothèse initiale, et achève le raisonnement par l'absurde.

Enfin, nous construisons des solutions plus ou moins explicites (voir [138], Section 7) dans le cas où a_B est quelconque, où a_G est nul, et où a_S ne dépend que des masses: la distribution des masses est solution d'une équation de coagulation pure, et la densité conditionnelle de la quantité de mouvement sachant la masse est Gaussienne. Ce résultat est relativement surprenant: la stabilité des Gaussiennes durant les collisions élastiques provient du fait que, par la conservation de l'énergie, $e^{-|v'|^2}e^{-|v'_*|^2} = e^{-|v|^2}e^{-|v_*|^2}$. La stabilité des Gaussiennes durant la coalescence provient du fait que, après une coalescence, la quantité de mouvement est la somme des deux quantités de mouvement avant la collision. Or quand on ajoute une Gaussienne (centrée) de variance m et une Gaussienne (centrée) de variance m_*, on obtient une Gaussienne de variance $m + m_*$. C'est donc pour des raisons relativement différentes que nos solutions explicites conviennent aux opérateurs de collisions élastique et de coalescence.

5.2 Perspectives

On peut étudier plus en détail cette équation.

Généralisation du résultat: dans le Théorème 33, nous supposons que a_G est majoré par une fonctionnelle de a_S. Ceci est raisonnable, car il est clair que si a_G est trop grand, alors l'affluence de collisions inélastiques va faire décroitre les vitesses (p/m) rapidement, et ceci fait tendre vers 0 un taux de coalescence de type $a_S = |p/m - p_*/m_*|$ (cas que nous souhaitons traiter). Donc il est possible que les particules aient une vitesse qui tend vers 0 suffisamment vite pour empêcher les masses de tendre vers l'infini. Par contre, nous supposons aussi que a_B n'est pas trop grand, ce qui n'a aucun sens physique: les collisions élastiques ne font pas décroitre (globalement) les vitesses, et n'agissent donc pas fortement sur le taux de coalescence. Il serait donc préférable de lever cette hypothèse.

Solutions explicites: nos solutions explicites concernent le cas où $a_G = 0$ (ce qui n'est pas grave dans un premier temps) et où a_S ne dépend que des masses (ce qui est plus gênant). Peut-on construire des solutions explicites dans le cas où a_S est plus général?

Auto-similarité: nos solutions explicites suggèrent un comportement auto-similaire en temps grand. Autrement dit, peut-on montrer que toute solution est *équivalente* à nos solutions explicites en temps grand?

Chapitre 6

Processus de type branchement

Nous étudions ici deux modèles, relativement différents, de dynamique des populations. Le premier modèle est *standard*, et nous donnons un résultat asymptotique fin. Le second est beaucoup plus compliqué, et nous obtenons des résultats plus grossiers.

6.1 Comportement asymptotique de processus de branchement-diffusion

Nous donnons ici le résultat de [131]. On considère un processus de diffusion de générateur L, à valeurs dans une variété Riemannienne C^∞ compacte M. On suppose que cette diffusion est réversible, que son coefficient de diffusion est constant, que son coefficient de dérive est C^∞, et qu'elle admet la mesure stationnaire $\nu(dy) = \exp(-u(y))$, pour une certaine fonction $u : M \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^∞.
On considère aussi une famille de probabilités sur $\{0, 2\}$ indicée par $y \in M$: $\{p_0(y), p_2(y)\}_{y \in M}$ représente la loi de reproduction. Enfin, on considère un *taux de branchement* $\lambda > 0$ constant.
Nous considérons alors le processus de branchement $\{Y_t^x\}_{t \geq 0}$, qui est un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \; ; \; n \in \mathbb{N}, \; x_1, ..., x_n \in M\}$, partant de δ_x, associé au mouvement L, au taux de branchement λ, et aux lois de reproduction $\{p_0(y), p_2(y)\}_{y \in M}$.
Grossièrement, $\{Y_t^x\}_{t \geq 0}$ est la mesure ponctuelle décrivant les positions de particules dont la dynamique est la suivante: chaque particule possède une horloge exponentielle de paramètre λ, et bouge indépendamment des autres suivant une diffusion de générateur L. Quand l'horloge d'une particule (située en y) sonne, la particule meurt, et donne naissance à 2 (resp. 0) particules situées en y avec probabilité $p_2(y)$ (resp. $p_0(y)$).
Notons $\mathcal{E}_x = \{\exists t, \; \forall s \geq t, \; \langle Y_s^x, 1 \rangle = 0\}$ l'évenement extinction.
On se pose la question suivante: si x, L, et λ sont donnés, si $g_0(y)$ est une densité de probabilité sur M donnée, peut on sélectionner les naissances (i.e. choisir $\{p_0(y), p_2(y)\}_{y \in M}$) de telle sorte que sur l'évenement non-extinction, la population se distribue sur M suivant g_0? On obtient le résultat suivant (voir [131], Theorem 1.1).

Théorème 34 *Soit $g_0 > 0$ une densité de probabilité C^∞ sur M, et soit $g(y) = g_0(y) \exp(u(y))$. Supposons que $\lambda > C := \sup_{y \in M} \left| \frac{Lg(y)}{g(y)} \right|$. Choisissons $C_0 \in (0, 1 - C/\lambda)$, et posons*

$$p_0(y) = \frac{1}{2} \left(1 - C_0 + \frac{Lg(y)}{\lambda g(y)} \right) \quad ; \quad p_2(y) = \frac{1}{2} \left(1 + C_0 - \frac{Lg(y)}{\lambda g(y)} \right). \tag{6.1}$$

Alors $P[\mathcal{E}_x] < 1$, et il existe une variable aléatoire $\tilde{Z}^x \geq 0$ telle que

$$\{\tilde{Z}^x > 0\} = \mathcal{E}_x^c \quad ; \quad p.s., \quad \lim_{t \to \infty} e^{-\lambda C_0 t} Y_t^x(dy) = \tilde{Z}^x g_0(y) dy. \tag{6.2}$$

Autrement dit, on donne une vitesse d'explosion et un *profil*. Commentons brièvement nos hypothèses. Il faut bien sûr supposer que λ est suffisamment grand par rapport à la vitesse de diffusion: notre hypothèse $\lambda > C$ n'est probablement pas optimale, mais si λ est tout petit, on ne pourra pas forcer les particules à se dupliquer suffisamment là où il faut. Remarquons ensuite que notre choix pour p_0, p_2 assure que $Lg + \lambda(p_2 - p_0)g = \lambda C_0 g$. Intuitivement, ceci signifie que g est un état *exponentiellement*

stationnaire. En effet, si les particules sont distribuées suivant g, alors pour tout y dans M, le nombre de particules qui viennent ou partent de y à cause du mouvement spatial ($Lg(y)$) ou à cause du branchement ($\lambda(p_2(y)-p_0(y))g(y)$) redonne $g(y)$, à une constante multiplicative C_0 prêt. Donc le nombre de particules croit à la vitesse $e^{C_0 t}$, suivant le profil g.
Notre preuve repose sur une décomposition spectrale de L.

Kesten-Stigum [63] ont démontré un résultat analogue (sans l'affirmation $\{Z^x > 0\} = \mathcal{E}_x^c$) dans le cas de processus de Galton-Watson multi-types. Leur résulat a été affiné par Kurtz et al. [64]. Enfin, Pinsky [94] et plus récemment Engländer-Turaev [44] ont étudié le cas de superprocessus.
Notre résultat parait nouveau, et le point fort est que nous obtenons une convergence forte (p.s.).

6.2 Sur une population de plantes en compétition

Dans [134], nous nous intéressons à un article des biologistes Bolker-Pacala [21] (voir aussi [22] et Dieckmann-Law [36]). Nous effectuons un travail de défrichage: écriture rigoureuse du modèle, approximation par d'autres modèles, et petits résultats qualitatifs.

Les résultats d'approximations du modèle microscopique stochastique par des objets macroscopiques (équations intégro-différentielles et superprocessus) semblent intéresser les biologistes: un article de *survey* [139] contenant nos résultats (un peu généralisés) et les résultats de Champagnat [26] a été rédigé pour une revue de biologie.

Nous commençons par réécrire proprement (et généralisons) le modèle de [21].
On considère une population d'individus immobiles (des plantes), caractérisés par leur position $x \in \bar{\mathcal{X}}$, la fermeture d'un ouvert connexe $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^d$. Pour x dans $\bar{\mathcal{X}}$, on introduit
(i) $\mu(x) \in [0, \infty)$ le taux de *mort naturelle* d'une plante située en x,
(ii) $\gamma(x) \in [0, \infty)$ le taux de *production de graines* d'une plante située en x,
(iii) $D(x, dz)$ la *loi de dispersion* des graines autour de leur mère située en x,
(iv) $\alpha(x) \in [0, \infty)$ le taux d'*interaction* d'une plante située en x,
et, pour x, y dans $\bar{\mathcal{X}}$,
(v) $U(x, y) = U(y, x) \in [0, \infty)$ le noyau de compétition.
On souhaite étudier le processus ν_t, qui décrit la *distribution* de plantes à l'instant t. On écrira $\nu_t = \sum_{i=1}^{I(t)} \delta_{X_t^i}$, où $I(t) \in \mathbb{N}$ est le nombre de plantes à l'instant t, et $X_t^1, ..., X_t^{I(t)}$ sont leurs positions (dans $\bar{\mathcal{X}}$). La dynamique est la suivante:
(a) à $t = 0$, on a une distribution donnée,
(b) chaque plante (située en $x \in \bar{\mathcal{X}}$) a trois horloges exponentielles indépendantes: une horloge de *production de graines* de paramètre $\gamma(x)$, une horloge de *mort naturelle* de paramètre $\mu(x)$, et une horloge de *mort par compétition* de paramètre $\alpha(x) \sum_{i=1}^{I(t)} U(x, X_t^i)$,
(c) si une des deux horloges de mort sonne, la plante disparaît.
(d) si l'horloge de production de graines d'une plante (située en x) sonne, alors cette plante produit une graine. Cette graine devient instantanément une plante mature, située en $x + Z$, où Z est choisie suivant la loi de dispersion $D(x, dz)$.

Autrement dit, $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{M} = \left\{\sum_{i=1}^n \delta_{x_i},\ n \geq 0, x_1, ..., x_n \in \bar{\mathcal{X}}\right\}$, de générateur: pour tout $\nu \in \mathcal{M}$, tout $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ suffisamment intégrable,

$$\begin{aligned} L\phi(\nu) \quad = \quad & \int_{\bar{\mathcal{X}}} \nu(dx) \int_{\mathbb{R}^d} D(x, dz) \left[\phi(\nu + \delta_{x+z}) - \phi(\nu)\right] \gamma(x) \\ & + \int_{\bar{\mathcal{X}}} \nu(dx) \left[\phi(\nu - \delta_x) - \phi(\nu)\right] \left\{\mu(x) + \alpha(x) \int_{\bar{\mathcal{X}}} \nu(dy) U(x, y)\right\}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Nous donnons d'abord, sous des conditions de bornitude des paramètres, une représentation trajectorielle en termes de mesures de Poisson du processus ν, ainsi qu'une méthode de simulation et un résultat d'existence et d'unicité (voir [134], Definition 2.4, Theorem 3.1). Nous tentons ensuite de comprendre l'étude de Bolker-Pacala [21]: ceux-ci écrivent des équations différentielles satisfaites par $n(t) = E[I(t)]$ et par un moment d'ordre 2, appelé la *covariance spatiale*: nous retrouvons bien l'équation de $n(t)$, et nous donnons une définition rigoureuse de la covariance spatiale. Par contre, il semblerait que l'équation pour la covariance spatiale ne soit pas parfaitement juste dans [21] (voir [134], Section 4). Nous nous intéressons ensuite à des approximations du modèle quand le nombre de particules (à l'instant 0) tend vers l'infini, avec, bien sûr, des renormalisations des coefficients. Nous obtenons les résultat suivant (voir [134] Theorems 5.3 et 5.6).

Théorème 35 *1. Avec une renormalisation bien choisie, on peut approcher le processus $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ par l'unique solution faible déterministe $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ de l'équation intégro-différentielle*

$$\partial_t \xi_t(x) = \int_{\mathcal{X}} dy \xi_t(y)\gamma(y)D(y, x-y) - \mu(x)\xi_t(x) - \alpha(x)\xi_t(x)\int_{\mathcal{X}} dy \xi_t(y)U(x,y), \quad x \in \bar{\mathcal{X}},\ t \geq 0. \quad (6.4)$$

2. Supposons que $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$. Avec une autre renormalisation bien choisie, on peut approcher le processus $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ par un superprocessus $\{X_t\}_{t\geq 0}$, à valeurs dans les mesures sur $\mathbb{R}^d$, unique en loi, solution d'un problème de martingales (voir [134] équations (5.35) et (5.36)).

Notons que ce superprocessus a été introduit par Etheridge [49].

Nous nous intéressons enfin au comportement en temps long pour le processus microscopique $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ et pour son approximation macroscopique $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$. Nous obtenons tout d'abord (voir [134] Theorem 6.3).

Théorème 36 *Si $\bar{\mathcal{X}}$ est compact, et s'il existe $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que $U(x, y) \geq \epsilon$ alors le processus microscopique $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ s'éteint presque sûrement.*

Ce résultat n'est pas surprenant, puisque le taux de mort est alors en gros quadratique (car $\bar{\mathcal{X}}$ est compact, donc les plantes ne peuvent pas s'échapper), pour un taux de naissance linéaire. Nous donnons aussi, dans un cas très particulier, un exemple où ν_t peut survivre: il ne s'éteint pas presque sûrement (voir [134] Proposition 6.4). Nous utilisons pour cela une comparaison avec le célèbre *processus de contact* voir Liggett [75].
Nous montrons enfin que, sous des hypothèses très restrictives, il existe un état stationnaire non trivial pour le processus ν_t (voir [134], Proposition 7.9).

Proposition 37 *Supposons que $\bar{\mathcal{X}} = \mathbb{R}^d$, que les paramètres γ, α, D ne dépendent pas de x, que $D(z) = D(|z|)$, que U est de la forme $U(x, y) = U(|x-y|)$, que $\mu + U(0) = 0$, et que $D = U$. Soit π une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}$ de paramètre γ/α. Alors π est un état stationnaire, i.e. $E[L\phi(\pi)] = 0$ pour toute fonction ϕ suffisamment bornée.*

Bien que marginal, ce résultat est relativement surprenant, car il exprime une certaine indépendance à chaque instant de particules dont la dynamique est interactive.

Enfin, nous analysons l'équation (6.4). Nous démontrons, sous certaines hypothèses (voir [134] Section 7), l'existence et l'unicité d'un état d'équilbre. Enfin, nous obtenons la convergence à l'équilibre en supposant soit une condition de type *équilibre en détail*, soit que la condition initiale n'est qu'une *perturbation* de l'équilibre.

6.3 Perspectives

Dégageons quelques idées de recherche.

Généralisation: il serait intéressant de réobtenir le résultat de Théorème 34 dans le cas où l'on peut régler à la fois le taux de branchement $\lambda(x)$ et la loi de reproduction, le cas où cette dernière n'est pas forcément binaire. Il faudrait aussi remplacer la variété compacte M par $\mathbb{R}^d$ (ou une variété non compacte).

Equilibres: les problèmes de convergence à l'équilibre pour les modèles microscopiques et macroscopiques décrits dans la section 6.2 restent (presque) complètement ouverts, et sont probablement passionnants (et très délicats).

Modèles multi-types: que peut-on dire si on considère un modèle de plantes avec deux espèces de plantes en compétition?

Modèle monomorphique: il serait très intéressant de comprendre rigoureusement le lien entre le modèle décrit ci-dessus (Section 6.2) où x représente le caractère génétique d'un individu, et les modèles *monomorphiques*, voir Champagnat, [26].

Bibliographie

[1] S. Aida, S. Kusuoka, D. Stroock, *On the support of Wiener functionals*, Asymptotic problems in probability theory, pp 3-34, 1993.

[2] M. Aizenman, T.A. Bak, *Convergence to equilibrium in a system of reacting polymers, Comm. Math. Phys., 65, pp 203-230, 1979.*

[3] S. Albeverio, J.L. Wu, T.S. Zhang, *Parabolic SPDEs driven by Poisson white noise*, Stochastic Process. Appl., 74, pp 21-36, 1998.

[4] D. Aldous, *Stopping times and tightness*, Ann. Prob. 6, pp 335-340, 1978.

[5] D.J. Aldous, *Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists*, Bernoulli, 5 (1), pp 3-48, 1999.

[6] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, B. Wennberg, *Entropy dissipation and long range interactions*, Arch. Ration. Mech. Anal., 152 (4), pp 327-355, 2000

[7] L. Arkeryd, *On the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., 45, pp 1-34, 1972.

[8] H. Babovsky, *On a Monte Carlo scheme for Smoluchowski's coagulation equation*, Monte Carlo Methods Appl., Vol. 5, (1), pp 1-18, 1999.

[9] H. Babovsky, R. Illner, *A convergence proof for Nanbu's simulation method for the full Boltzmann equation*, SIAM J. Num. Anal., 26 (1), pp 46-65 1989.

[10] J.M. Ball, J. Carr, O. Penrose, *The Becker-Döring cluster equations : basic properties and asymptotic behaviour of solutions, Commun. Math. Phys., 104, pp 657–692, 1986.*

[11] J.M. Ball and J. Carr, *The discrete coagulation-fragmentation equations: existence, uniqueness, and density conservation*, J. Statist. Phys., 61 (1/2), pp 203-234, 1990.

[12] V. Bally, A. Millet, M. Sanz-Solé, *Approximation and support theorem in Holder norm for parabolic SPDEs*, Ann. Probab., 23, pp 178-222, 1995.

[13] V. Bally, E. Pardoux, *Malliavin Calculus for white noise driven SPDEs*, Potential Anal., 9 (1), pp 27-64, 1998.

[14] G. Ben Arous, R. Léandre, *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale (II)*, Probab. Theory Related Fields, 90, pp 377-402, 1991.

[15] J. Bertoin, *Homogeneous fragmentation processes*, Probability Theory and Related Fields, 121, (3), pp 301-318, 2001.

[16] J. Bertoin, *Self-similar fragmentations*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 38 (3), pp 319-340, 2002.

[17] K. Bichteler, J.B. Gravereaux, J. Jacod, *Malliavin calculus for processes with jumps*, Stochastic monographs, Number 2, Gordon and Breach, 1987.

[18] K. Bichteler, J. Jacod, *Calcul de Malliavin pour les diffusions avec sauts, existence d'une densité dans le cas unidimensionel*, Séminaire de Probabilités XVII, L.N.M. 986, pp 132-157, Springer, 1983.

[19] J.M. Bismut, *Calcul des variations stochastiques et processus de sauts*, Z.W. 63, pp 147-235, 1983.

[20] A.V. Bobylev, J.A. Carillo, I. Gamba, *On some properties of kinetic and hydrodynamics equations for inelastic interactions*, J. Statis. Phys., 110, pp 333-375, 2003.

[21] B. Bolker, S. Pacala, *Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems*, Theoretical population biology 52, pp 179-197, 1997.

[22] B. Bolker, S. Pacala, *Spatial moment equations for plant competition: understanding spatial strategies and the advantages of short dispersal*, The American Naturalist 153 (6), pp 575-602, 1999.

[23] E. Carlen, E. Pardoux, *Differential calculus and integration by parts on Poisson space*, in Kluwer ed, Stochastic algebra and analysis in classical and quantum dynamics, pp 63-73, 1990.

[24] J. Carr, *Asymptotic behaviour of solutions to the coagulation-fragmentation equations. I. The strong fragmentation case, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 121, pp 231-244, 1992.*

[25] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The mathematical theory of dilute gases*, Applied Math. Sciences, Springer, 1994.

[26] N. Champagnat, *Convergence and existence for polymorphic adaptative dynamics jump and degenerate diffusion models*, Preprint 03/7 de l'équipe Modal'X, Université Paris X, Nanterre, 2003.

[27] P. Chassaing, R. Marchand, *On the cost of Union-Find algorithms*, bientôt un preprint.

[28] B. Chauvin, *Branching processes, trees and the Boltzmann equation*, Math. Comput. Simulation, 38, (1/3), pp 135-141, 1995.

[29] F.P. da Costa, *Existence and uniqueness of density conserving solutions to the coagulation-fragmentation equations with strong fragmentation, J. Math. Anal. Appl. 192, pp 892–914, 1995.*

[30] M. Deaconu and E. Tanré, *Smoluchowski's coagulation equation: probabilistic interpretation of solutions for constant, additive and multiplicative kernels*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 29, no. 3, pp 549-579, 2000.

[31] L. Denis, *A criterion of density for solutions of Poisson-driven SDEs*, Probab. Theory Related Fields, 118 (3), pp 406-426, 2000.

[32] L. Desvillettes, *About the regularizing properties of the non-cut-off Kac equation*, Comm. Math. Phys. 168 (2), pp 417-440, 1995.

[33] L. Desvillettes, *Regularization properties of the 2-dimensional non radially symmetric non cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules*, Transport Theory Statist. Phys. 26 (3), pp 341-357, 1997.

[34] L. Desvillettes, *Boltzmann's kernel and the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Fluid dynamic processes with inelastic interactions at the molecular scale (Torino, 2000). Riv. Mat. Univ. Parma (6), pp 1–22, 2001.

[35] L. Desvillettes, C. Graham, S. Méléard, *Probabilistic interpretation and numerical approximation of a Kac equation without cutoff*, Stochastic Process. Appl., 84, pp 115-135, 1999.

[36] U. Dieckmann, R. Law, *Relaxation projections and the method of moments*, in *The Geometry of Ecological Interactions*, Eds U. Dieckmann, R. Law and J.A.J. Metz, Cambridge University press 2000.

[37] R.J. DiPerna, P.L. Lions, *On the Cauchy problem for Boltzmann equations, global existence and weak stability*, Ann. Math. 130, pp 321-366, 1989.

[38] R.L. Drake, *A general mathematical survey of the coagulation equation, in "Topics in Current Aerosol Research (part 2)," International Reviews in Aerosol Physics and Chemistry, Pergamon Press, Oxford, pp 203-376, 1972.*

[39] P.G.J. van Dongen and M.H. Ernst, *Scaling solutions of Smoluchowski's coagulation equation, J. Statist. Phys. 50, 295-329, 1988.*

[40] P.B. Dubovskiĭ, I.W. Stewart, *Trend to equilibrium for the coagulation-fragmentation equation, Math. Methods Appl. Sci., 19, pp 761-772, 1996.*

[41] E.B. Dynkin, *Branching particle systems and superprocesses*, Ann. Probab., 19, (3), pp 1157-1194, 1991.

[42] A. Eibeck, W. Wagner, *An efficient stochastic algorithm for studying coagulation dynamics and gelation phenomena*, SIAM J. Sci. Comput., 22 (3), pp 802-821, 2000.

[43] A. Eibeck, W. Wagner, *Stochastic particle approximations for Smoluchoski's coagulation equation*, Ann. Appl. Probab. 11 (4), pp 1137-1165, 2001.

[44] J. Engländer, D. Turaev, *A scaling limit theorem for a class of superdiffusions*, Ann. Probab., 30 (2), pp 683-722, 2002.

[45] M. H. Ernst, R. M. Ziff and E. M. Hendriks, *Coagulation Processes with a Phase Transition*, Journal of Colloid and Interface Science, 97 (1), pp 266-277, 1984.

[46] M. Escobedo, P. Laurençot, S. Mishler, *Fast reaction limit of the discrete diffusive coagulation-fragmentation equation*, Comm. Partial Differential Equations 28 (5/6), pp 1113–1133, 2003.

[47] M. Escobedo, S. Mishler, B. Perthame, *Gelation in coagulation and fragmentation models*, Comm. Math. Phys. 231 (1), pp 157-188, 2002.

[48] M. Escobedo, S. Mischler and M. Rodriguez-Ricard, *On self-similarity and stationary problems for fragmentation and coagulation models*, preprint, 2004.

[49] A. Etheridge, *Survival and extinction in a locally regulated population*, preprint, 2001.

[50] S. Ethier, T. Kurtz, *Markov processes : characterization and convergence*, John Wiley and sons, 1986.

[51] R. Ferland, X. Fernique, G. Giroux, *Compactness of the fluctuations associated with some generalized nonlinear Boltzmann equations*, Canad. J. Math. 44, pp 1192-1205, 1992.

[52] P.J. Flory, *Principle of Polymer Chemistry*, Cornell University Press, Ithaca, 1953.

[53] C. Graham, S. Méléard, *Stochastic particle approximations for generalized Boltzmann models and convergence estimates*, Ann. Probab., 25, pp 115-132, 1997.

[54] C. Graham, S. Méléard, *Existence and regularity of a solution to a Kac equation without cutoff using Malliavin Calculus*, Commun. Math. Phys., 205, pp 551-569, 1999.

[55] B. Haas, *Loss of mass in deterministic and random fragmentations*, Stochastic Process. Appl., 106 (2), pp 245–277, 2003.

[56] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Holland, 1979.

[57] Y. Ishikawa, *Asymptotic behaviour of the transition density for jump type processes in small time*, Tohoku Math. J., 46, pp 443-456, 1994.

[58] P.-E. Jabin, B. Niethammer, *On the rate of convergence to equilibrium in the Becker-Döring equations, J. Differential Equations, 191, pp 518-543, 2003.*

[59] J. Jacod, *Equations différentielles linéaires, la méthode de variation des constantes*, Séminaire de Probabilités XVI, L.N.M. 920, pp 442-448, Springer, 1982.

[60] J. Jacod, A.N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 1987.

[61] I. Jeon, *Existence of gelling solutions for coagulation-fragmentation equations*, Comm. Math. Phys. 194 (3), pp 541-567, 1998.

[62] B. Jourdain, *Nonlinear processes associated with the discrete Smoluchowski coagulation-fragmentation equation*, Markov Process. Related Fields, 9 (1), pp 103-130, 2003.

[63] H. Kesten, B. Stigum, *A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes*, Annals Math. Statist., 37, pp 1211-1223, 1966.

[64] T. Kurtz, R. Lyons, R. Pemantle, Y. Peres, *A conceptual proof of the Kesten-Stigum theorem for multi-type branching processes*, Classical and modern branching processes (Minneapolis, 1994), K. Athreya and P. Jagers editors, pp 181-185, IMA Vol. Math. Appl., 84, Springer, New York, 1997.

[65] P. Laurençot, *Global solutions to the discrete coagulation equations*, Mathematika, 46, pp 433-442, 1999.

[66] P. Laurençot, *On a class of coagulation fragmentation equations*, Journal of differential equations, 167 (2), pp 245-274, 2000.

[67] P. Laurençot, S. Mischler, *Global existence for the discrete diffusive coagulation-fragmentation equations in* L^1, Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2), pp 731-745, 2002.

[68] P. Laurençot, S. Mischler, *The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion*, Arch. Ration. Mech. Anal., 162 (1), pp 45-99, 2002.

[69] P. Laurençot, S. Mischler, *On coalescence equations and related models*, Preprint, 2003.

[70] R. Law, U. Dieckmann, *Moment approximations of individual-based models*, in *The Geometry of Ecological Interactions*, Eds U. Dieckmann, R. Law and J.A.J. Metz, Cambridge University press 2000.

[71] R. Law, D.J. Murrell, U. Dieckmann, *Population growth in space and time: spatial logistic equations*, Ecology, 84 (1), pp 252-262, 2003.

[72] R. Léandre, *Densité en temps petit d'un processus de sauts*, Séminaire de Probabilités XXI, L.N.M. 1247, 1987.

[73] R. Léandre, *Strange behaviour of the heat kernel on the diagonal*, in Stochastic processes, physics and geometry, S. Albeverio edit., pp 516-528, 1990.

[74] F. Leyvraz, *Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation*, Physics reports, 383, pp 95-212, 2003.

[75] T. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer, 1985.

[76] A.A. Lushnikov, *Certain new aspects of the coagulation theory*, Izv. Atmos. Ocean. Phys., 14, pp 738-743, 1978.

[77] P. Malliavin, *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*, in Proc. Symp. on SDEs, Kyoto, (1976), Wiley, 1978.

[78] A.H. Marcus, *Stochastic coalescence*, Technometrics 10, pp 133-143, 1968.

[79] S. Méléard, *Asymptotic behaviour of some interacting particle systems, McKean-Vlasov and Boltzmann models*, cours du CIME 95, Probabilistic models for nonlinear pde's, L.N.M. 1627, Springer, 1996.

[80] S. Méléard, *Convergence of the fluctuations for interacting diffusions with jumps associated with Boltzmann equations*, Stochastics and Stoch. Rep., 63, pp 195-225, 1998.

[81] Z.A. Melzak, *A scalar transport equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 85, pp 547-560, 1957.

[82] A. Millet, M. Sanz-Solé, *A simple proof of the support theorem for diffusion processes*, Séminaire de Probabilités XXVIII, L.N.M. 1583, pp 36-48, Springer, 1994.

[83] A. Millet, M. Sanz-Sollé, *Points of positive density for the solution to a Hyperbolic S.P.D.E.*, Potential Anal., 7, pp 623-659, 1997.

[84] J. Moller, *Lectures on random Voronoi tesselations*, L.N. in Statistics 87, Springer, 1994.

[85] K. Nanbu, *Interrelations between various direct simulation methods for solving the Boltzmann equation*, J. Phys. Soc. Japan 52, pp 3382-3388, 1983.

[86] J.R. Norris, *Smoluchowski's coagulation equation: uniqueness, nonuniqueness and hydrodynamic limit for the stochastic coalescent*, Ann. Appl. Probab. 9 (1), pp 78–109, 1999.

[87] J.R. Norris, *Cluster Coagulation*, Comm. Math. Phys. 209 (2), pp 407–435, 2000.

[88] J.R. Norris, Private comunication, 2002.

[89] D. Nualart, *Malliavin Calculus and related topics*, Springer, 1995.

[90] P.J. O'Rourke, *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*, PhD Thesis, Los Alamos National Labo., 1981.

[91] E. Pardoux, T. Zhang, *Absolute continuity for the law of the solution of a parabolic S.P.D.E.*, J. of Funct. Anal., 112, pp 447-458, 1993.

[92] J. Picard, *On the existence of smooth densities for jump processes*, Probab. Theory Related Fields, 105 (4), pp 481-511, 1996.

[93] J. Picard, *Density in small time at accessible points for jump processes*, Stochastic Process. Appl., 67, pp 251-279, 1997.

[94] R.G. Pinsky, *Transience, reccurence and local extinction properties of the support for supercritical finite measure-valued diffusions*, the Annals of Probability, vol. 24, no 1, 237-267, 1996.

[95] A. Pulvirenti, B. Wennberg, *A Maxwellian lowerbound for solutions to the Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys., 183, pp 145-160, 1997.

[96] A. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.

[97] E. Saint Loubert Bié, *Etude d'une EDPS conduite par un bruit Poissonnien*, Manuscrit de thèse, 1998.

[98] T. Simon, *Support theorem for jump processes*, Stochastic Process. Appl., 89 (1), pp 1-30, 2000.

[99] M. Smoluchowski, *Drei vortäge über diffusion, Brownsche Molekularbewegung und koagulation von kolloidteilchen*, Physik. Zeitschr., 17, pp 557-559, 1916.

[100] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, *On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle*, Proc. 6th Berkley Symp. Math. Stat. Prob., vol III, University California Press, 1972.

[101] A.S. Sznitman, *Équations de type de Boltzmann, spatialement homogènes*, Z.W., 66, pp 559-592 1984.

[102] H. Tanaka, *On the uniqueness of Markov process associated with the Boltzmann equation of Maxwellian molecules*, Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto, pp 409-425, 1976.

[103] H. Tanaka, *Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules*, Z.W., 66, pp 559-592, 1978.

[104] G. Toscani, *One dimensional kinetic models of granular flows*, RAIRO Model. Math. Anal. Numer. 34, pp 1277-1292, 2000.

[105] G. Toscani, C. Villani, *Probability metrics and uniqueness of the solution to the Boltzmann equation for a Maxwell gas*, J. Stat. Phys., 94, pp 619-637, 1999.

[106] C. Villani, *Contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas*, Thèse de l'université Paris 9, 1998.

[107] C. Villani, *Contribution à l'étude mathématique des collisions en théorie cinétique*, Thèse d'habilitation de l'université Paris 9, 2000.

[108] C. Villani, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*, Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I, pp 71–305, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[109] P. Villedieu, O. Simonin, *Modeling of coalescence in turbulent gas-droplet flows*, preprint, 2003.

[110] W. Wagner, *A convergence proof for Bird's direct simulation method for the Boltzmann equation*, J. Stat. Phys., 66, pp 1011-1044, 1992.

[111] J.B. Walsh, *A stochastic model for neural response*, Adv. appl. probab., 13, pp 231-281, 1981.

[112] J.B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Ecole d'été de Probabilité de Saint Flour 14, L.N.M 1180, pp 265-439, Springer, 1986.

Publications par ordre chronologique de rédaction

[113] N. Fournier, *Calcul des variations stochastiques sur l'espace de Poisson, applications à des E.D.P.S. paraboliques à sauts et à certaines équations de Boltzmann*, Thèse de l'univesité Paris 6, 1999.

[114] N. Fournier, *Malliavin calculus for parabolic SPDEs with jumps*, Stochastic Process. Appl., 87, pp 115-147, 2000.

[115] N. Fournier, *Existence and regularity study for 2D Kac equation without cutoff by a probabilistic approach*, Ann. Appl. Probab., 10 (2), pp 434-462, 2000.

[116] N. Fournier, *Strict positivity of the density for a Poisson driven SDE*, Stoch. Stoch. Reports, 68, pp 1-43, 1999.

[117] N. Fournier, *Strict positivity of a solution to a 1D Kac equation without cutoff*, J. Statist. Phys., 99 (3/4), pp 725-749, 2000.

[118] N. Fournier, *Support theorem for the solution of a white-noise-driven driven parabolic SPDE with temporal Poissonian jumps*, Bernoulli, 7 (1), pp 165-190, 2001.

[119] N. Fournier, *Strict positivity of a 2D spatially homogeneous Boltzmann equation without cutoff*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 37 (4), pp 481-502, 2001.

[120] N. Fournier, S. Méléard, *A stochastic particle numerical method for 3D Boltzmann equations without cutoff*, Math. Comp., 71, pp 583-604, 2002.

[121] N. Fournier, *Strict positivity of the density for simple jump processes using the tools of support theorems. Application to the Kac equation without cutoff*, Ann. Probab. 30 (1), pp 135-170, 2002.

[122] N. Fournier, S. Méléard, *Monte Carlo approximations and fluctuations for 2D Boltzmann equations without cutoff*, Markov Process. Related Fields, 7, pp 159-191, 2001 (proceedings, Inhomogeneous random systems, Cergy-Pontoise, 2000).

[123] N. Fournier, S. Méléard, *Monte Carlo approximations for 2D Boltzmann equations without cutoff and for non Maxwell molecules*, Monte Carlo Methods Appl., 7 (1-2), pp 177-192, 2001 (proceedings, Monte Carlo and probabilistic methods for partial differential equations, Monte Carlo, 2000).

[124] N. Fournier, S. Méléard, *A Markov process associated with a Boltzmann equation without cutoff and for non Maxwell molecules*, J. Statist. Phys., 104 (1/2), pp 359-385, 2001.

[125] M. Deaconu, N. Fournier, E. Tanré, *A pure jump Markov process associated with Smoluchowski's coagulation equation*, Ann. Probab., 30 (4), pp 1763-1796, 2002.

[126] M. Deaconu, N. Fournier, E. Tanré, *Rate of convergence of a stochastic particle system associated with the Smoluchowski coagulation equation*, Methodol. Comput. Appl. Probab., 5, pp 131-158, 2003.

[127] N. Fournier, S. Méléard, *A weak criterion of absolute continuity for jump processes: application to the Boltzmann equation*, Bernoulli, 8 (4), pp 537-558, 2002.

[128] N. Fournier, *Jumping SDEs: absolute continuity using monotonicity*, Stochastic Process. Appl., 98 (2), pp 317-330, 2002.

[129] M. Deaconu, N. Fournier, *Probabilistic approach of some discrete and continuous coagulation equations with diffusion*, Stochastic Process. Appl., 101 (1), pp 83-111, 2002.

[130] N. Fournier, J.S. Giet, *On small particles in coagulation-fragmentation equations*, J. Statist. Phys., 111 (5/6), pp 1299-1329, 2003.

[131] N. Fournier, B. Roynette, *On long time a.s. asymptotics of renormalized branching diffusion processes*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 39 (6), pp 979-991, 2003.

[132] N. Fournier, J.S. Giet, *Convergence of the Marcus-Lushnikov process*, Methodol. Comput. Appl. Probab., 6, 219-231, 2004.

[133] N. Fournier, J.S. Giet, *Exact simulation of nonlinear coagulation processes*, Monte Carlo Methods and Applications, 10 (2), pp 95-106, 2004.

[134] N. Fournier, S. Méléard, *A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations*, Preprint 03/5 de l'Equipe MODAL'X, Paris 10, accepté aux Ann. Appl. Probab.

[135] N. Fournier, S. Mischler, *On a discrete Boltzmann-Smoluchowski equation with rates bounded in the velocity variable*, Comm. Math. Sci., Supplemental issue 1, 2004 (proceedings des journées Coagulation-Fragmentation, Paris, 2003).

[136] N. Fournier, B. Roynette, E. Tanré, *On long time behavior of some coagulation processes*, Stochastic Processes and their Applications, 110, 1-17, 2004.

[137] N. Fournier, S. Mischler, *Trend to equilibrium for discrete coagulation equations with strong fragmentation and without balance condition*, Proceedings of the Royal Soc. of London, series A, Vol. 460, no 2049, 2477-2486, 2004.

[138] N. Fournier, S. Mischler, *A Boltzmann equation for elastic, inelastic, and coalescing collisions*, Preprint 2003/49 du Ceremade, accepté sous réserve d'une profonde modification au Journal de Math. Pures et Appl.

[139] R. Ferrière, S. Méléard, N. Fournier, N. Champagnat, *The mathematics of Darwinian evolution: from stochastic individual processes to adaptative dynamics*, Preprint, soumis à Journal of Mathematical Biology, 2004.

[140] N. Fournier, P. Laurençot, *Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation*, Preprint 2004/08 de l'Institut Elie Cartan, accepté à Communications in Mathematical Physics.

[141] N. Fournier, J.S. Giet, *Existence of densities for jumping SDEs*, Preprint 2004/16 de l'Institut Elie Cartan.

[142] N. Fournier, P. Laurençot, *Local properties of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation with sum kernel*, Preprint 2004 de l'Institut Elie Cartan.