

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
Université Paris Diderot-Paris 7
UFR de mathématiques

Géométrie des courants positifs et dynamique holomorphe

par

Romain Dujardin

Soutenue le 24 novembre 2011, devant le jury composé de :

M. Eric Bedford (Indiana University)
M. Julien Duval (Université Paris-Sud 11)
M. Hakan Eliasson (Université Paris 7 et Institut de Mathématiques de Jussieu)
M. Etienne Ghys (UMPA, ENS de Lyon)
M. Frank Pacard (École Polytechnique)
M. Nessim Sibony (Université Paris-Sud 11)
M. Jean-Christophe Yoccoz (Collège de France)

au vu des rapports de MM. Eric Bedford, Hakan Eliasson, et Étienne Ghys.

Je tiens en premier lieu à remercier les membres du jury, et tout particulièrement les rapporteurs, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux et l'honneur qu'ils me font de participer à cette soutenance.

La richesse de la communauté académique tient essentiellement aux gens qui la composent, et aux liens, bien souvent d'amitié, que ceux-ci peuvent tisser. Je profite donc de cette occasion pour saluer et remercier chaleureusement celles et ceux qui m'ont accompagné ces dernières années. Mes plus proches collaborateurs d'abord : mes éternels "grands frères" Charles Favre et Vincent Guedj, qui ne se lassent jamais (je l'espère !) de me conseiller dans tous les domaines de la vie mathématique, Bertrand Deroin pour son énergie et son enthousiasme, mes coauteurs (avérés ou à venir) Jeffrey Diller, Tien Cuong Dinh, Misha Lyubich et Nessim Sibony pour m'avoir fait partager leurs idées, et enfin Eric Bedford pour avoir toujours suivi mes recherches avec une grande bienveillance. Merci également à mes collègues, à Paris et de part le monde, qui font du métier de mathématicien bien plus qu'un simple "travail".

Je tiens également à remercier les institutions dont j'ai fait partie : l'Université Paris 7 et l'Institut de Mathématiques de Jussieu, l'École Polytechnique et le Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, dans lesquelles j'ai pu bénéficier d'excellentes conditions de recherche, grâce notamment à la qualité et au dévouement du personnel administratif.

Je dédie ce travail à ma femme et mes enfants, sans qui rien de tout cela n'en vaudrait la peine.

Table des matières

Préface	1
Liste des travaux présentés pour l'habilitation	3
1 Prologue : géométrie des courants positifs	5
1.1 Généralités. Représentation intégrale.	6
1.2 Courants géométriques	8
1.2.1 Définitions	8
1.2.2 Construction de courants géométriques	10
1.2.3 Laminarité via les vecteurs tangents	12
1.2.4 Intersection géométrique	12
1.3 Exemples de courants non géométriques	14
2 Dynamique rationnelle sur les variétés complexes	17
2.1 Applications birationnelles et de petit degré topologique sur les surfaces	18
2.1.1 Cadre et résultat principal	18
2.1.2 Classes d'exemples	22
2.1.3 Courants invariants	23
2.1.4 Condition d'énergie et mesure invariante	24
2.1.5 Récurrence de l'ensemble d'indétermination	26
2.1.6 Géométrie des courants invariants et dynamique : le cas birationnel	27
2.1.7 Géométrie des courants invariants et dynamique : le cas général	29
2.2 Directions de Fatou pour les endomorphismes de \mathbb{P}^k	33
2.2.1 Problématique	33
2.2.2 Directions de Fatou	35
2.2.3 Expansion dans la direction transverse	37
2.3 Autres travaux	40
2.3.1 Automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2	40
2.3.2 Spectre des vitesses d'échappement à l'infini	42
3 Courants de bifurcation	47
3.1 Familles de fractions rationnelles	48
3.1.1 Généralités	48
3.1.2 Le courant de bifurcation	49
3.1.3 Courant associé à un point critique marqué	49
3.1.4 Autres résultats, remarques et questions	52
3.2 L'espace des polynômes	53
3.2.1 Courants de bifurcation supérieurs et mesure de bifurcation	53
3.2.2 L'espace des polynômes cubiques	56
3.3 Familles de sous-groupes de Möbius	61
3.3.1 Familles holomorphes de sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$	61
3.3.2 Produits de matrices aléatoires	62

3.3.3	Courant de bifurcation	64
3.3.4	Équidistribution	66
3.4	Représentations du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte.	69
Bibliographie générale		74

Préface

Ce document synthétise l'essentiel de mon activité de recherche depuis la soutenance de ma thèse en décembre 2002, et ce en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches. Ces travaux (pour beaucoup en collaboration) se situent principalement en dynamique holomorphe à une et plusieurs variables complexes, avec pour fil conducteur l'utilisation quasi systématique d'outils de théorie des courants (positifs).

J'avais consacré une part importante de mon travail de thèse à développer une théorie des courants positifs fermés "géométriques", motivée par des applications potentielles en dynamique. Ces applications se sont concrétisées depuis lors et nombre d'entre elles seront exposées ici.

Par ailleurs, les techniques de dynamique holomorphe mutidimensionnelle ont récemment eu des retombées importantes dans l'étude des espaces de paramètres de dynamiques holomorphes de dimension 1, apportant ainsi tout un panel de méthodes nouvelles dans ce sujet classique. C'est le deuxième thème principal qui sera développé dans ce texte.



Détaillons à présent la structure du mémoire. Dans un premier chapitre, à caractère essentiellement préliminaire, après quelques rappels sur la théorie des courants positifs, on développe brièvement la théorie des courants "géométriques" (laminaires et tissés), qui sera d'usage constant dans la suite. Ces résultats se situent dans le droit fil de mon travail de thèse, et pour beaucoup en sont directement issus.

La dernière section, indépendante, du chapitre présente une construction de courants positifs fermés "sans structure géométrique", qui permettent d'exhiber des solutions pathologiques de l'équation de Monge Ampère complexe homogène.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à la dynamique d'une application rationnelle $f : X \rightarrow X$ d'une variété complexe projective dans elle même. On montrera dans diverses situations comment la compréhension fine de la géométrie de certains courants positifs fermés invariants permet d'obtenir des informations dynamiques intéressantes. Les principaux exemples qui seront abordés sont :

- les applications birationnelles et de "petit degré topologique" des surfaces, pour lesquelles l'objectif est de construire l'unique mesure d'entropie maximale ;
- les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k : ici l'objectif est de comprendre ce qu'il advient de la dichotomie de Fatou-Julia, familière en dynamique unidimensionnelle.
- les automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 , et plus généralement, les applications polynomiales dans \mathbb{C}^2 .

Au troisième et dernier chapitre, on montrera comment la théorie des courants intervient naturellement dans l'étude des *espaces de paramètres* de systèmes dynamiques holomorphes.

On considère donc $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de systèmes dynamiques holomorphes, paramétrée par une variété complexe Λ . Le but est de construire et d'étudier certains courants positifs fermés ("courants de bifurcation") sur Λ rendant compte de phénomènes de bifurcation dans la famille.

Nous considérerons successivement :

- les familles d'applications rationnelles de \mathbb{P}^1 ;
- les familles de représentations d'un groupe de type fini dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Dans ces deux situations classiques, les courants de bifurcation apportent un nouveau point de vue sur l'espace des paramètres, de nouveaux résultats et posent de nombreuses questions.

◇

Liste des travaux présentés

1. *Laminar currents and birational dynamics*. Duke Math. J. 131, no. 2 (2006), 219-247.
2. *On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in \mathbb{C}^2* . En collaboration avec **Tien Cuong Dinh** et **Nessim Sibony**. Math. Ann. 333 (2005) pp. 703-739.
3. *Some remarks on the connectivity of Julia sets for 2-dimensional diffeomorphisms*. in Complex Dynamics, 63-84, Contemporary Mathematics, 396 (2006).
4. *Continuity of Lyapunov exponents for polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2* . Ergodic Theory and Dynamical Systems 27 (2007), 1111-1133.
5. *Distribution of rational maps with a preperiodic critical point*. En collaboration avec **Charles Favre**. Amer. J. Math. 130 (2008), 979-1032.
6. *Cubic polynomials : a measurable view on parameter space*. in Complex Dynamics and Friends, A K Peters, Wellesley, MA, 2009.
7. *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree I : from cohomology to currents*. En collaboration avec **Jeffrey Diller** et **Vincent Guedj**. Indiana Univ. Math.J. 59 (2010), pp. 521-562.
8. *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree II : energy and invariant measure*. En collaboration avec **Jeffrey Diller** et **Vincent Guedj**. Comment. Math. Helvet. 86 (2011), pp. 277-316.
9. *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree III : geometric currents and ergodic theory*. En collaboration avec **Jeffrey Diller** et **Vincent Guedj**. Ann. Scient. ENS 43 (2010) 235-278.
10. *Werner examples and currents*. GAFA 20 (2010), pp 498-415.
11. *Fatou directions along the Julia set for endomorphisms of $\mathbb{C}P^k$* . Prépublication (2010), arXiv : 1006.0882.
12. *Random walks, Kleinian groups, and bifurcation currents*. Prépublication (2010), arXiv : 1011.1365. En collaboration avec **Bertrand Deroin**.

En préparation :

13. *Lyapunov exponents for surface group representations*. En collaboration avec **Bertrand Deroin**.

Chapitre 1

Prologue : géométrie des courants positifs

Dans ce chapitre préliminaire, on introduit brièvement les diverses variétés de courants géométriques (courants laminaires, courants tissés) qui seront utilisés par la suite, sans trop entrer dans les détails. On montre comment obtenir de tels courants en contrôlant la géométrie asymptotique de suites de sous variétés, et on donne des conditions suffisantes pour que l'intersection (pluripotentialiste) de tels courants admette une interprétation géométrique.

Beaucoup des résultats qui y sont exposés étaient déjà présents ou en germe dans ma thèse. Les applications en dynamique holomorphe à plusieurs variables seront développées au chapitre suivant.

On donnera également quelques indications sur la “géométrie” des courants positifs généraux. Ce sera l'occasion pour évoquer les résultats que j'ai obtenus dans [D_{WERMER}].

1.1. Généralités. Représentation intégrale.

Nous commençons par quelques brefs rappels sur la théorie des courants positifs, et renvoyons le lecteur à Demailly [Dem2] où Lelong [Lel1] pour plus de détails. Puisque ces notions sont locales, plaçons nous dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^k$. On pose $\beta = i \sum_{i=1}^k dz_i \wedge d\bar{z}_i$ la forme de Kähler standard de \mathbb{C}^k et on se donne p, q deux entiers tels que $p + q = k$. Remarquer que $\frac{\beta^k}{k!} = idz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge idz_k \wedge d\bar{z}_k$.

Rappelons qu'un covecteur ϕ de type (bidegré) (p, p) est dit

- *décomposable* (on dit aussi *simple*) s'il est de la forme $i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$, où les α_j sont de type $(1, 0)$;
- *fortement positif* s'il s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments décomposables ;
- *faiblement positif* si pour tout covecteur ϕ' de type (q, q) , $\phi \wedge \phi'$ est un (k, k) covecteur positif, c'est à dire un multiple positif de β^k .

Une forme différentielle de type (p, p) est (resp. fortement) positive si elle satisfait cette propriété en tout point. Un courant T de bidimension (p, p) est (resp. fortement) positif si pour toute forme test φ fortement (resp. faiblement) positive de bidegré (p, p) , on a $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$.

Dans ce cas T peut s'écrire en coordonnées comme une forme différentielle à coefficients mesures $T = i^{q^2} \sum T_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ où les I, J sont des multi-indices de longueur q et les $(T_{I,J})$ sont des mesures complexes satisfaisant $T_{I,J} = \overline{T_{J,I}}$. Implicitement ici, l'action de T sur les formes test est exprimée sous la forme $\varphi \mapsto \int T \wedge \varphi$. La *mesure trace* de T est définie par la formule $\sigma_T = \sum_{|I|=q} T_{I,I}$. Noter que $T \wedge \frac{\beta^p}{p!} = \sigma_T \frac{\beta^k}{k!}$.

Il existe une constante ne dépendant que du degré de T telle que pour tous I, J , $|T_{I,J}| \leq C_q \sigma_T$, donc par le théorème de Radon Nikodym il existe des fonctions mesurables $f_{I,J}$ telles que $|f_{I,J}| \leq C_q$ et $T_{I,J} = f_{I,J} \sigma_T$; en particulier $\sum f_{I,I} = 1$. Ainsi on peut écrire $T = \phi \sigma_T$, où ϕ est un champ mesurable de (q, q) covecteurs de trace 1.

Une façon peut être plus parlante de reformuler ceci est la suivante : par dualité, il existe un champ de (p, p) vecteurs t_T de trace 1 (définis σ_T presque partout) tels que pour toute forme test de bidegré (p, p) ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \int \langle t_T, \varphi \rangle \sigma_T. \quad (1.1)$$

On se référera dorénavant à cette représentation ou à la représentation $T = \phi \sigma_T$ comme la *représentation intégrale* de T .

Par exemple si T est le courant d'intégration sur un sous ensemble analytique M de dimension p , alors en un point lisse $x \in M$, $t_T(x)$ est bien défini, décomposable, et vaut

$$t_T(x) = i\tau_1 \wedge \bar{\tau}_1 \wedge \cdots \wedge i\tau_p \wedge \bar{\tau}_p,$$

où τ_1, \dots, τ_p est une base orthonormale $T_x M$ (la base n'est pas unique mais $t(x)$ l'est).

Le *rang* de $t_T(x)$ est la dimension du plus petit sous espace de $T_x \Omega$, noté $\text{Span}(t_T(x))$, qui permet de l'engendrer. C'est un entier supérieur ou égal à p , et qui vaut p précisément

lorsque $t_T(x)$ est décomposable. On voit facilement que lorsque T est un courant laminaire (voir ci-après le §1.2.1 pour la définition), il est décomposable p.p. et $t_T(x)$ est le vecteur tangent au disque de la représentation laminaire de T passant par x (voir [BLS1, Lemme 6.5]).

Dans un contexte dynamique, lorsque T est un courant invariant par une application méromorphe, la famille $\text{Span}(t_T(x))$ définit un champ mesurable invariant de sous espaces, donc un objet potentiellement dynamiquement intéressant. Ceci est particulièrement vrai lorsque T est décomposable p.p. Cette idée est au coeur de [D_{FATOU}] (et sera exposée en détail au §2.2).

Dans cette optique il est naturel de chercher à explorer les propriétés du champ t_T . Le théorème suivant (certainement déjà bien connu des spécialistes) est un cas particulier de [D_{FATOU}, Thm 2.3].

Théorème 1.1.1

Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ dans $\Omega \subset \mathbb{C}^k$. Supposons que l'auto-intersection $T \wedge T$ soit bien définie au sens de la théorie du pluripotential.

Alors si $\sigma_T \perp \text{Leb}$ ou $\sigma_{T^2} \perp \text{Leb}$, T est décomposable σ_T -presque partout.

Ainsi, les courants positifs fermés de bidegré $(1, 1)$ sont souvent décomposables p.p. Même si ce n'est pas vrai en général (voir en particulier le §1.3), il est commode d'imaginer les vecteurs tangents $t_T(x)$ comme tangents à des familles de disques holomorphes de dimension $(k - 1)$ engendrant T . Nous qualifierons de “géométriques” les courants ayant cette propriété. C'est cette notion que nous allons aborder maintenant.

1.2. Courants géométriques

1.2.1. Définitions

Commençons par la notion de courant laminaire et ses diverses variantes. Ces notions ont été introduites dans le cadre de la dynamique des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 par Bedford, Lyubich et Smillie [BLS1]. Les définitions sont locales donc on se place dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^k$.

Définition 1.2.1

Un courant positif fermé T de bidimension (p, p) dans Ω est dit localement uniformément laminaire s'il existe une lamination par sous variétés complexes de dimension p , plongée dans Ω , tel que la restriction de T à toute boîte de flot B soit de la forme

$$T|_B = \int_{\tau} [\Delta_t] d\mu(t). \quad (1.2)$$

Ici, τ désigne une transversale de la boîte de flot, les Δ_t , $t \in \tau$ en sont les plaques, et μ est une mesure positive sur τ .

T est un courant laminaire s'il existe une suite croissante de courants T_k , localement uniformément laminaires dans $\Omega_k \subset \Omega$, et qui converge vers T .

Insistons ici sur le fait que la suite T_k est *croissante*. Cela signifie que tous les T_k se “retrouvent” dans T . En particulier, il existe une famille mesurée (\mathcal{A}, μ) de disques holomorphes $(D_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ compatibles, tels que $T = \int [D_\alpha] d\mu(\alpha)$. Cette famille est la réunion disjointe abstraite de tous les disques apparaissant dans les T_k . Deux disques holomorphes sont dits *compatibles* si leur intersection est relativement ouverte (donc éventuellement vide) dans chacun des deux disques. Noter également que T_k n'est en général pas fermé dans Ω : en effet Ω_k est typiquement une subdivision de Ω en petits cubes dont la taille tend vers 0 avec k .

Si S est un courant uniformément laminaire tel que $S \leq T$, on dit que S est *subordonné* à T . Plus généralement, une sous variété V de dimension k est *subordonnée* à un courant laminaire T , s'il existe un courant uniformément laminaire S subordonné à T , et tel que V soit contenu dans une feuille de la lamination sous-jacente à S .

Nous nous sommes limités au cas de courants fermés par simplicité, même s'il est utile dans de nombreuses situations de pouvoir considérer des courants positifs généraux. Pour cela, il suffit de remplacer $[\Delta_t]$ par $h_t[\Delta_t]$ dans (1.2), où h_t est une fonction positive.

Il est important de comprendre que la définition des courant laminaires, toute restrictive qu'elle soit, peut mener à des exemples relativement pathologiques. À l'inverse, les courants dynamiques ne sont pas en général uniformément laminaires. Pour une utilisation pratique de la notion de laminarité, il est donc souvent indispensable de mettre au point des définitions intermédiaires interdisant certaines pathologies. C'est une thématique –assez technique– dans lequel je me suis beaucoup investi pendant ma thèse, et qui apparaît dans beaucoup de mes travaux ultérieurs [D_{STRUCT}, D_{BIRAT}, DDG3]. De même, dans [D_{CONNEX}, D_{LYAP}], un point crucial

est que les courants invariants des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 ont des propriétés de laminarité tout à fait particulières (voir le §2.3.1).

On est aussi amenés à autoriser les disques à se croiser, ce qui mène à la notion de courant *tissé*. La définition suivante a été introduite par Dinh [Din].

Définition 1.2.2

Soit $Z^k(\Omega, C)$ l'ensemble des chaînes holomorphes de dimension k dans Ω , de volume majoré par C . On le munit de la topologie (localement compacte et métrisable) induite par celle des courants.

Un courant T est dit localement uniformément tissé dans Ω si pour tout point de $\text{Supp}(T)$ il existe un voisinage B et une constante C tels que $T|_B$ soit de la forme

$$T|_B = \int_{Z^k(B, C)} [\Delta] dm(\Delta), \quad (1.3)$$

où m est une mesure positive sur $Z^k(B, C)$.

Un courant T est tissé dans Ω s'il existe une suite de courants T_k , localement uniformément tissés dans $\Omega_k \subset \Omega$, qui croît vers T .

Au contraire du cas laminaire, la mesure m apparaissant dans (1.3) n'est pas uniquement déterminée par $T|_B$. Si m est donnée, on dit que $T|_B$ est *marqué* par m . C'est ce marquage, plus que le courant lui-même, qui détermine la structure tissée.

Dans la suite, l'expression *courant (resp. uniformément) géométrique* sera synonyme de courant (resp. uniformément) laminaire ou tissé.

Il est légitime de se demander si la définition 1.2.2 ne couvre pas tout bonnement l'ensemble des courants positifs fermés ! Il semble que c'est l'impression qui prévalait jusqu'au début des années 80. Lelong avait par exemple demandé dans [Lel2] si tous les courants positifs fermés étaient localement uniformément tissés. C'est Demailly [Dem1] qui a fourni le premier contre exemple. Mais l'exemple de Demailly est laminaire ! Il existe néanmoins bel et bien des courants qui ne sont pas de cette forme :

- on peut facilement fabriquer des exemples de courants qui ne sont nulle part localement uniformément tissés en propageant le fait que $dd^c \log^+(|z|^2 + |w^2|)$ n'est pas uniformément tissé au voisinage de la sphère unité (voir [BLS1, p. 101]) ;
- Duval et Sibony observent dans [DuS] que les exemples de Wermer d'enveloppes polynomiales ne contenant aucun disque portent des courants positifs fermés (ceci sera expliqué en détail dans la section 1.3).

À l'inverse, il n'est pas si simple de vérifier en pratique qu'un courant donné est géométrique. Dans le cas où T est lisse, on peut directement calculer la famille de vecteurs tangents t_T et tenter d'appliquer le théorème de Frobenius pour construire un feuilletage subordonné à T . On obtient ainsi des conditions suffisantes de laminarité portant sur les puissances extérieures de T [BK]. Mais cette approche échoue dans le cas général (voir le §1.3).

Une autre idée naturelle, est, lorsque T est la limite au sens des courants d'une suite de sous ensembles analytiques, de tenter de "faire passer la structure analytique à la limite", sous certaines hypothèses. C'est à jour la méthode la plus efficace pour montrer le caractère géométrique d'un courant, et nous allons l'aborder maintenant.

1.2.2. Construction de courants géométriques

On sait depuis Lelong [Lel2] que localement tous les courants positifs fermés de bidegré (1,1) sont limites de suite de courants d'intégration sur des sous ensembles analytiques $T = \lim \frac{1}{d_n} [V_n]$. Ceci a été étendu à de nombreuses situations globales par Demailly [Dem1].

L'idée de ce qui suit est naturelle : en imposant des contraintes géométriques sur les sous ensembles analytiques V_n , le courant limite T aura lui même des propriétés géométriques. Elle a été introduite par Bedford, Lyubich et Smillie [BLS1, BS5]. Un cas "trivial" est lorsque le volume des V_n est localement uniformément borné : alors par le théorème de Bishop T sera un courant d'intégration. Le cas considéré dans [BLS1] est celui d'un courant d'Ahlfors associé à une courbe entière injective dans \mathbb{C}^2 . Les courants limites sont alors laminaires.

Je me suis intéressé à ce type de questions pendant ma thèse. De Thélin [dT1, dT5] et Dinh [Din] y ont également beaucoup contribué. Nous allons brièvement exposer quelques uns de ces résultats, dont nous aurons besoin par la suite.

Une remarque préliminaire importante est que tous les résultats qui vont suivre (ainsi que pour ceux du §1.2.4) sont valables sur une surface rationnelle quelconque, même si pour des raisons de simplicité nous préférons les énoncer dans \mathbb{P}^2 . La raison est que toutes ces notions se transportent bien par transformation birationnelle (voir le [D_{LAMIN}, §5]), donc on peut toujours se ramener à \mathbb{P}^2 .

On peut également directement travailler sur une surface projective quelconque, en remplaçant les projections linéaires par des projections le long de pincesaux de courbes [Ca].

Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe algébrique irréductible, on note $\text{genre}(C)$ le genre géométrique de C . Si C a plusieurs composantes $\text{genre}(C)$ désigne la somme de leurs genres. Si $x \in \text{Sing}(C_n)$ est un point singulier, on note $n_x(C)$ le nombre de composantes irréductibles locales en x .

Voici un critère de laminarité simple à utiliser dans des situations dynamiques [D_{LAMIN}].

Théorème 1.2.3

Soit C_n une suite de courbes algébriques planes de degré d_n . On suppose que

$$\text{genre}(C_n) + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d_n). \quad (1.4)$$

Alors les valeurs d'adhérence de la suite $\frac{1}{d_n} [C_n]$ sont des courants laminaires.

La démonstration de ce théorème (ainsi que celle de tous les suivants) suit le schéma de [BLS1] : pour montrer qu'un courant limite T est laminaire, on se donne une projection linéaire générique π , et on cherche les disques subordonnés à T sous la forme de petits graphes (disjoints) relatifs à cette projection. Il s'agit donc de montrer que pour n assez grand, la plus grande partie de la masse de C_n est constituée de tels graphes, au dessus de familles de disques fixes (les "bonnes composantes"), ce qui se ramène essentiellement à compter les points critiques de $\pi|_{C_n}$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse (1.4)). Pour faire passer ces disques à la limite, on applique ensuite un argument de familles normales.

La variante suivante est un cas particulier d'un théorème dû à T.C. Dinh [Din].

Théorème 1.2.4 (Dinh)

Soit C_n une suite de courbes algébriques planes de degré d_n . On suppose que $\text{genre}(C_n) = O(d_n)$. Alors les valeurs d'adhérence de la suite $\frac{1}{d_n} [C_n]$ sont des courants tissés.

En dimension supérieure, une difficulté nouvelle est que l'ensemble critique de $\pi|_{C_n}$ n'est plus un ensemble fini, ce qui complique sérieusement le décompte des bonnes et mauvaises composantes. Nous utiliserons le résultat suivant au §2.2.

Théorème 1.2.5 (Dinh [Din])

Soient $q < k$ et ι_n une suite d'applications holomorphes finies $\mathbb{P}^q \rightarrow \mathbb{P}^k$, de degré générique 1. On pose $V_n = \iota_n(\mathbb{P}^q)$ et v_n le volume de V_n . Alors les valeurs d'adhérence de la suite de courants $\frac{1}{v_n}[V_n]$ sont des courants tissés.

Comme il a déjà été mentionné au §1.2.1, le caractère géométrique seul n'est souvent pas suffisant pour les applications dynamiques que nous avons en vue. Il se trouve que les courants que l'on obtient grâce aux théorèmes 1.2.3 à 1.2.5 (et plus généralement, comme limites de sous ensembles analytiques de géométrie contrôlée) ont des propriétés supplémentaires. Nous dirons qu'un courant laminaire (resp. tissé) de \mathbb{P}^2 est *fortement approximable* s'il s'écrit $T = \lim \frac{1}{d_n}[C_n]$ où la suite de courbes C_n satisfait les hypothèses du théorème 1.2.3 (resp. 1.2.4). On peut également définir un analogue local de cette notion.

On montre (voir [D_{STRUCT}] et également [D_{INTERS}, DDG3]) que les courants fortement approximables satisfont les deux propriétés suivantes :

1. il y a une estimation explicite de l'écart entre T et ses approximations par des courants uniformément laminaires ;
2. les disques subordonnés à T satisfont une propriété de "prolongement analytique".

Nous donnerons quelques détails sur la première propriété dans le §1.2.4 ci dessous. Pour comprendre la deuxième, considérons le courant de Demailly $T = dd^c \log^+(|z|^2 + |w|^2)$ dans \mathbb{C}^2 . C'est un courant positif fermé laminaire, qui n'est pas uniformément laminaire au voisinage du tore unité. On montre en effet que T s'écrit

$$T = \int_{S^1} [\{e^{i\theta}\} \times \mathbb{D}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [\mathbb{D} \times \{e^{i\theta}\}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [V_\theta] d\lambda(\theta),$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité S^1 , et $V_\theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, z = e^{i\theta}w, |z| > 1\}$. On constate que les disques subordonnés à T "butent" sur le tore unité. La propriété de prolongement analytique dit que ce phénomène est impossible pour les courants fortement approximables. Elle s'exprime formellement de la manière suivante (voir [D_{STRUCT}] et [DDG3] pour le cas tissé)

Théorème 1.2.6

Soit T un courant laminaire (resp. tissé) fortement approximable et \mathcal{L} une lamination (resp. un tissu) par surfaces de Riemann plongé(e) dans $\Omega \subset \mathbb{P}^2$. Alors $T|_{\mathcal{L}}$ est uniformément laminaire (resp. tissé).

Ici la restriction signifie qu'on se restreint aux disques contenus dans des feuilles de la lamination (resp. le tissu) \mathcal{L} . Noter que dans le cas tissé, ceci n'a de sens que lorsque le courant est marqué (puisque la notion de disque subordonné à un tel courant dépend du marquage). Le marquage considéré est ici fourni par les limites des bonnes composantes contenues dans les courbes C_n .

1.2.3. Laminarité via les vecteurs tangents

On a vu que lorsque T est un courant laminaire, le champ de vecteurs tangents t_T est “dirigé”¹ par la famille de disques holomorphes qui sous-tend T .

On peut se demander si réciproquement un courant dont les vecteurs tangents sont dirigés par une famille de disques holomorphes compatibles est laminaire. Je ne connais pas la réponse à cette question.

Dans le cas où la famille de disques forme une lamination, c’est une question que j’avais posée dans ma thèse (voir [D_{THESE}, §2.1], et qui a été résolue par J.E. Fornæss, E. Fornæss-Wold et Y. Wang dans [FWW], après une réponse partielle dans [D_{APPROX}].

1.2.4. Intersection géométrique

Une motivation essentielle, déjà présente dans [BLS1] pour s’intéresser aux propriétés géométriques des courants dynamiques est d’obtenir une interprétation géométrique des produits extérieurs.

Il est facile de démontrer que pour des courants uniformément géométriques, l’intersection au sens de la théorie du pluripotential coïncide avec l’intersection géométrique des laminations/tissus sous-jacents (voir [D_{INTERS}, §3] ou [DDG2, Prop. 2.6]). Ceci suggère la définition suivante.

Définition 1.2.7

Soient S et T des courants positifs fermés dans $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, tels que le produit extérieur $T \wedge S$ soit bien défini, au sens où $u_T \in L^1_{\text{loc}}(\sigma_S)$, u_T désignant un potentiel local de T^2 .

Si T est géométrique, on dira que le produit extérieur $T \wedge S$ est semi-géométrique s’il existe une suite de courants uniformément géométriques T_k croissant vers T comme à la définition 1.2.1 (resp. 1.2.2) telle que $T_k \wedge S$ croisse vers $T \wedge S$.

Si de plus S est géométrique, on dira que $T \wedge S$ est géométrique s’il existe une suite S_k comme au dessus telle $T_k \wedge S_k$ croisse vers $T \wedge S$.

En dimension 2, j’avais donné dans ma thèse des conditions suffisantes pour que le produit extérieur de deux courants laminaires admette une telle description (voir [D_{INTERS}]). On y montre que deux ingrédients sont nécessaires : il faut que les courants soient fortement approximables et il faut une hypothèse de régularité sur les potentiels. Ces résultats ont été par la suite successivement raffinés dans [D_{BIRAT}] et [DDG2]. L’intérêt de la notion d’intersection semi-géométrique en dynamique a été mis en évidence par De Thélin [dT3].

Le théorème suivant, que l’on peut aisément extraire de [DDG2], est la version la plus aboutie de ces résultats. Dans un but de simplicité nous l’énonçons pour une intersection de courants dans \mathbb{P}^2 , mais on pourrait travailler localement.

Théorème 1.2.8

Soient S et T des courants géométriques fortement approximables dans \mathbb{P}^2 , tels tel que la mesure $T \wedge S$ soit bien définie et ne charge pas les ensembles pluripolaires. Alors l’intersection $T \wedge S$ est géométrique.

Si seul T est un courant géométrique, l’intersection $T \wedge S$ est semi-géométrique.

1. Cette terminologie a été introduite par B. Berndtsson et N. Sibony [BSib].

2. C’est une observation de Sibony que cette hypothèse est en fait symétrique en T et S (voir [D_{THESE}, §4.1])

Pour montrer le théorème, on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ (que l'on pourra supposer être contenu dans une carte affine). On se donne deux projections linéaires transverses π_1 et π_2 , et des subdivisions \mathcal{S}_i , $i = 1, 2$ des bases de projection en carrés de taille r . On obtient alors une subdivision

$$\mathcal{Q} = \{ \pi_1^{-1}(s_1) \cap \pi_2^{-1}(s_2), (s_1, s_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \}$$

de Ω en cubes de taille r . On dira que la subdivision est générique si les projections et les carrés le sont. On déduit facilement de la preuve des théorèmes 1.2.3 et 1.2.4 que si T est un courant géométrique fortement approximable, et $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ est un ouvert inclus dans une carte affine, alors pour une subdivision générique de Ω en cubes de taille r , il existe un courant $T_{\mathcal{Q}}$, uniformément géométrique dans chacun des cubes de la subdivision, tel que

$$\mathbf{M}(T - T_{\mathcal{Q}}) = O(r^2). \quad (1.5)$$

Ensuite, on estime l'écart entre $T \wedge S - T_{\mathcal{Q}} \wedge S$ en injectant l'hypothèse que $T \wedge S$ ne charge pas les pluripolaires. On obtient ainsi le caractère semi-géométrique. Si S est lui même un courant géométrique, on refait le même raisonnement avec $T_{\mathcal{Q}} \wedge S - T_{\mathcal{Q}} \wedge S_{\mathcal{Q}}$ pour conclure.

◇

En dimension supérieure la thématique de l'intersection géométrique est en revanche complètement ouverte, et semble poser de sérieuses difficultés. Appelons *fortement approximable* un courant T de bidimension (q, q) dans \mathbb{P}^k de la forme $T = \lim \frac{1}{v_n} [V_n]$, où la suite V_n vérifie les hypothèses du théorème 1.2.5. On voudrait alors démontrer que sous des hypothèses adéquates sur les fonctions quasi-psh u_i , $i = 1, \dots, s$, $s \leq q$, les produits de la forme $T \wedge dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_s$ sont semi-géométriques. Par exemple, pour démontrer la conjecture principale de $[D_{\text{FATOU}}]$, il suffirait savoir que les produits de la forme $T \wedge (dd^c u)^q$, où u est une fonction quasi-psh hölderienne, sont semi-géométriques (voir ci après le §2.2.3).

Un cas simple est lorsque T est de bidimension $(1, 1)$. On peut alors essentiellement recopier la démonstration du théorème 1.2.8, et conclure que les produits de la forme $T \wedge dd^c u$, où u est, disons, continue, sont semi-géométriques $[D_{\text{FATOU}}, \S 4.3]$.

En revanche, dès que $q > 1$, l'argument ne s'adapte plus. J'ai montré dans $[D_{\text{FATOU}}]$ que les courants fortement approximables de bidimension (q, q) satisfont l'estimée (1.5), ce qui est un premier pas certainement utile. Il semble néanmoins qu'une estimation de la *masse* des mauvaises composantes ne soit plus suffisante pour conclure dans ce cas, et qu'il faudrait remplacer la masse par une notion de *capacité* idoine.

1.3. Exemples de courants non géométriques

1.3.1. Voici un exemple fameux dû à J. Wermer [W].

Théorème 1.3.1 (Wermer)

Il existe un compact K de $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dont l'enveloppe polynomiale $\widehat{K} \subset \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}$

- *se surjecte sur \mathbb{D} par la première projection $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$;*
- *ne contient aucun disque holomorphe.*

Nous allons en expliquer la construction, en suivant l'approche de Duval et Sibony [DuS]. On se donne une suite dense $(a_n)_{n \geq 1}$ dans le disque unité, et une suite (r_n) telle que $D(a_n, r_n) \Subset \mathbb{D}$. On pose $P_0(z, w) = w$, $\delta_0 = 1/2$, $X_0 = \{|P_0| < \delta_0\}$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$P_{n+1} = P_n^2 - \varepsilon_{n+1}(z - a_{n+1}) \tag{1.6}$$

et $X_n = \{|P_n| < \delta_n\}$, où les nombres ε_n et δ_n sont choisis inductivement assez petits pour que :

- $\overline{X_{n+1}} \subset X_n$;
- X_{n+1} ne contienne aucun graphe holomorphe au dessus de $D(a_{n+1}, r_{n+1})$, ni aucun disque vertical de taille r_{n+1} .

Il est alors clair que $X = \bigcap X_n$ est un fermé ne contenant aucun disque holomorphe, et on vérifie aisément que X est l'enveloppe polynomiale de sa trace sur le bord. Ainsi $K = \overline{X} \cap (\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ répond au problème.

Il est évident que X supporte des courants positifs fermés, puisque toute valeur d'adhérence de la suite $\frac{1}{2^n}[P_n = 0]$ est à support dans X . Ceci montre qu'il existe des courants qui ne sont pas géométriques. Noter que si δ_n est assez petit, la mesure trace σ_T est singulière, et donc par le théorème 1.1.1, T est simple p.p.

De Thélin observe dans sa thèse qu'une légère modification de cet exemple montre que le critère de laminarité (1.4) est optimal.

En effet, lorsque la suite P_n est définie par (1.6) on peut estimer facilement le genre (somme des genres des composantes) de la courbe $\{P_n = 0\}$ par la formule de Riemann-Hurwitz. Celui-ci est de l'ordre de $n2^n$.

Si maintenant on se donne une suite u_n quelconque tendant (lentement) vers l'infini, on peut s'arranger pour que le genre croisse moins vite que $u_n 2^n$. Pour cela, il suffit de modifier la définition de P_n , en posant $P_{n+1} = P_n^2 - \varepsilon_n$ pour la plupart des valeurs de n (cette opération ne crée pas de nouveaux points de ramification pour la projection π_1 , donc essentiellement ne change pas le genre), et sporadiquement $P_{n+1} = P_n^2 - \varepsilon_{n+1}(z - a_{n+1})$ (pour que la limite ne contienne aucun disque!).

1.3.2. Nous avons vu que si T est un courant positif fermé lisse, ses propriétés de laminarité se lisent sur ses puissances extérieures. Voici un résultat précis : soit $T = dd^c u$ un courant positif fermé de bidegré (1,1) dans $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, alors si u est de classe C^3 , et $T \wedge T = (dd^c u)^2 = 0$,

alors T est localement uniformément laminaire. C'est une conséquence immédiate du théorème de Frobenius. On pourra consulter [BK] pour plus de résultats dans cette direction, et [DG] pour une introduction générale à cette thématique.

Il est naturel de se demander ce qui se passe lorsque u est moins régulière. La régularité "critique" pour ce problème est le cas où u est de classe $C^{1,1}$, puisque c'est la régularité des solutions de l'équation de Monge-Ampère homogène à donnée au bord lisse. La question (classique, voir par exemple [Be]) est de savoir si ces solutions admettent une interprétation géométrique. Quand un tel "feuilletage de Monge-Ampère" existe, c'est une source d'informations précieuse sur les propriétés des solutions (une occurrence récente de cette philosophie est l'article de Chen et Tian [CT]).

Étonnamment, on ne sait quasiment rien sur cette question. Une construction de Sibony (rapportée dans [BF]), basée sur l'exemple de Wermer ci-dessus, montre qu'il existe une fonction psh u de classe $C^{1,1}$, telle que $(dd^c u)^2 = 0$, et tel que $dd^c u$ ne soit pas un courant partout uniformément laminaire. Néanmoins il se pourrait que dans ces exemples $dd^c u$ soit tout de même laminaire.

Si l'on ajoute un peu de régularité, en supposant par exemple que u est de classe C^2 (voire même $C^{3-\varepsilon}$), on peut imaginer que $dd^c u$ est uniformément laminaire, puisque le champ de vecteurs tangents devient continu. À l'exception d'un résultat positif de Kruzhilin [Kr] portant sur les fonctions psh C^2 ayant une invariance par rotation (i.e. $u(z, w) = u(|z|, w)$), c'est là encore un problème complètement ouvert.

Le théorème suivant, qui est le résultat principal de [D_{WERMER}], montre qu'on ne peut en tout cas absolument pas diminuer la régularité si l'on veut espérer trouver un feuilletage.

Théorème 1.3.2

Il existe un courant positif fermé $T = dd^c u$ dans le bidisque unité de \mathbb{C}^2 tel que

- i. u est de classe $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha < 1$;*
- ii. $T^2 = (dd^c u)^2 = 0$;*
- iii. le support de T ne contient aucun disque holomorphe.*

On peut être plus précis sur la régularité de u , qui peut par exemple être choisie de classe $C^{1+\psi}$, où ψ est n'importe quelle fonction telle que $\frac{\psi(r)}{r|\log r|} \rightarrow \infty$ quand $r \rightarrow 0$. Ceci suggère que l'on devrait pouvoir trouver de tels exemples de classe $C^{1,1}$, même si notre démonstration ne peut pas (par principe) en produire. Notons qu'il n'est pas possible de construire un tel exemple de classe C^2 car alors $\text{Supp}(dd^c u)$ serait d'intérieur non vide.

La démonstration est un raffinement de la construction de Wermer. Une difficulté est de faire en sorte que l'ensemble X ne soit pas trop "fin". Le théorème répond ainsi par l'affirmative à une question de Fornæss et Levenberg [FL], qui avaient demandé s'il existait des exemples de Wermer non-pluripolaires.

Pour minorer la "taille" (au sens de de la théorie du pluripotentiel) de l'exemple de Wermer X , il faut contrôler précisément les constantes (telles que les δ_n) apparaissant dans la démonstration. Fâcheusement, on peut en fait montrer que si X est construit comme au §1.3, X ne supporte aucun courant positif fermé à potentiel Hölderien (car sa dimension de Hausdorff est trop petite), donc ne peut pas convenir pour le théorème 1.3.2. On modifie alors la construction en introduisant avant l'étape de *ramification* (qui fait passer de P_n à P_{n+1}) une étape de *subdivision* qui en quelque sorte "vaporise" l'ensemble X_n en une multitude de

composantes. Ceci a pour effet de préserver (quasiment) la taille de X_n lors du passage de X_n à X_{n+1} .

En pratique, pour estimer les potentiels, on utilise une méthode en deux étapes :

1. On se place dans un bidisque légèrement plus grand et on s'arrange pour que près du bord, la structure de X soit simple à décrire : c'est est une lamination par graphes horizontaux dont les transversales sont des ensembles de Cantor. On analyse alors la géométrie de ces ensembles de Cantor grâce à des méthodes de géométrie conforme (théorème de Koebe, etc.), et des idées simples de théorie géométrique de la mesure mènent à la régularité $C^{1+\psi}$ du potentiel dans cette zone.
2. On montre que $T \wedge T = 0$ et pour estimer la régularité du potentiel dans le bidisque initial (où la géométrie de X est "sauvage"), on utilise des estimées a priori sur les solutions de l'équation de Monge-Ampère homogène $(dd^c u)^2 = 0$, qui permettent de propager la régularité depuis le bord.

Le lecteur est renvoyé à [D_{WERMER}] pour la preuve complète, qui est assez technique (on pourra également consulter [DG] pour une introduction un peu plus détaillée).

1.3.3. Dans tous ces exemples, la non-laminarité est conséquence de la non-existence de disques holomorphes dans le support de T . Pour espérer améliorer la régularité dans le théorème 1.3.2 (pourquoi pas au delà de C^2 , où le support serait d'intérieur non-vide!), il serait intéressant de trouver une autre manière de démontrer qu'un courant n'est pas laminaire.

À titre de motivation, nous terminerons ce chapitre par la question spécifique suivante : existe t'il un courant T dans la boule $B(0,1) \subset \mathbb{C}^2$, tel que

- T est de potentiel, disons, borné, et $T \wedge T = 0$;
- T n'est pas laminaire ;
- $\text{Supp}(T) = B(0,1)$?

Chapitre 2

Dynamique rationnelle sur les variétés complexes

Dans ce chapitre nous allons aborder des questions de dynamique holomorphe à plusieurs variables, en mettant l'accent sur l'interaction entre la géométrie des courants et les applications dynamiques. On verra ainsi la diversité des applications possibles de ce type de techniques.

2.1. Applications birationnelles et de petit degré topologique sur les surfaces

2.1.1. Cadre et résultat principal

Dans ce paragraphe nous présentons quelques faits de base sur l'itération rationnelle en dimension supérieure. Nous limitons la discussion au cas de la dimension 2, qui est le cadre de nos travaux. Tout ceci est maintenant bien connu et le lecteur est renvoyé à l'article de synthèse de V. Guedj [Gu3] pour une présentation plus détaillée. De notre point de vue, ce panorama de V. Guedj a en outre la particularité intéressante de dresser l'état de l'art dans le domaine à l'époque où nous avons initié le travail dont il va être rendu compte ici.

Soit X une surface complexe compacte connexe, que nous supposons en outre Kählérienne (et rapidement projective), munie d'une application méromorphe dominante $f : X \dashrightarrow X$. On fixe une forme de Kähler ω . Nous considérons (X, f) comme un système dynamique, c'est à dire que nous voulons étudier le comportement asymptotique des itérés $f^n = f \circ \dots \circ f$.

Rappelons que f est formellement définie comme une correspondance de graphe $\Gamma_f \subset X \times X$. On considère alors $\tilde{\Gamma}$ une désingularisation de Γ_f , et il y a des projections holomorphes naturelles π_1 (birationnelle) et π_2 qui font commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Gamma} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ceci permet de définir l'action de f sur les formes différentielles : on pose $f^*\alpha = (\pi_1)_*\pi_2^*\alpha$ (resp. $f_*\alpha = (\pi_2)_*\pi_1^*\alpha$), où les images directes sont prises au sens des courants (on obtient une forme différentielle à coefficients L^1_{loc}). Ces définitions ne dépendent pas du choix de $\tilde{\Gamma}$ et préservent les bidegrés et le caractère fermé, donc induisent des actions sur les espaces de cohomologie $H^{q,q}(X, \mathbb{R})$. On note I_f l'ensemble d'indétermination de f , qui est dans notre cas un ensemble fini de points.

On peut attacher des quantités numériques à f en définissant pour $k = 1, 2$ le k^{e} degré dynamique de f par la formule

$$\lambda_k(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X \setminus I_{f^n}} (f^n)^* \omega^k \wedge \omega^{2-k} \right)^{1/n}.$$

On peut montrer que les degrés dynamiques sont des invariants de conjugaison birationnelle et que la limsup est en fait une limite. Dans notre cas, $\lambda_2 = d_{\text{top}}(f)$ est le degré topologique de f , c'est à dire le nombre de préimages d'un point générique. On a toujours $1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1^2$, et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles.

Dans le cas –déjà extrêmement riche– où $X = \mathbb{P}^2$, le premier degré dynamique s'exprime comme $\lambda_1(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg(f^n))^{1/n}$, où $\deg(f)$ est le degré de l'image réciproque d'une droite générique. Plus généralement, lorsque X est projective, λ_1 est le taux de croissance

des degrés des préimages des sections hyperplanes génériques (alors que λ_2 est le taux de croissance du nombre de préimages des points).

Il y a une description conjecturale de la manière dont les degrés dynamiques façonnent la dynamique, qui est un moteur important de la recherche en dynamique holomorphe à plusieurs variables. Elle vise à généraliser les résultats classiques de Lyubich [Ly1] et Freire-Lopes-Mañé [FLM] en dimension supérieure. En dimension 2, elle prend la forme suivante :

Conjecture 2.1.1 (Guedj)

Soit $f : X \dashrightarrow X$ une application méromorphe dominante d'une surface complexe compacte Kählerienne dans elle même. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

- i. L'entropie topologique de f vaut $h_{\text{top}}(f) = \max(\log \lambda_1, \log \lambda_2)$.
- ii. Il existe une unique mesure d'entropie maximale μ_f , qui est mélangeante.
- iii. – si $\lambda_2 > \lambda_1$ [grand degré topologique], μ_f est répulsive au sens où ses deux exposants de Lyapunov (complexes) sont minorés par $\frac{1}{2} \log(\lambda_2/\lambda_1)$ et les points périodiques répulsifs s'équidistribuent selon μ .
- si $\lambda_1 > \lambda_2$ [petit degré topologique], μ_f est de type selle et ses exposants de Lyapunov satisfont

$$\chi^-(\mu_f) \leq -\frac{1}{2} \log(\lambda_1/\lambda_2) < 0 < \frac{1}{2} \log(\lambda_1) \leq \chi^+(\mu_f), \quad (2.1)$$

et les points périodiques selles s'équidistribuent selon μ .

L'entropie topologique est ici définie à la Bowen, en se restreignant à $X \setminus \bigcup_{n \geq 1} I(f^n)$. L'inégalité $h_{\text{top}}(f) \leq \max(\log \lambda_1, \log \lambda_2)$ est connue et due à Gromov [Gr] et Friedland [Fr] (et à Dinh et Sibony [DS2, DS3] en dimension supérieure). L'égalité $h_{\text{top}}(f) = \max(\log \lambda_1, \log \lambda_2)$ est parfois connue sous le nom de *conjecture de Friedland*.

On pourrait préciser le point *ii.* en conjecturant que dans tous les cas, la mesure μ_f a la propriété de Bernoulli, c'est à dire qu'elle est mesurablement conjuguée à un décalage de Bernoulli. C'est en un sens la plus forte des notions d'ergodicité.

Nous verrons également que dans le cas de petit degré topologique, la notion d'exposant de Lyapunov est à prendre avec précautions.

Dans le cas de grand degré topologique, la conjecture a été complètement établie, et ce en toute dimension, par V. Guedj [Gu2] après des contributions essentielles de Briend-Duval [BrDu2] et Dinh-Sibony [DS1]. La mesure μ_f y est construite comme limite des mesures équidistribuées aux préimages des points génériques. Il est intéressant de noter que dans ce cas, cette mesure est "régulière" au sens de la théorie du pluripotential, au sens où elle intègre les fonctions psh.

À l'inverse, le cas de petit degré topologique est en toute généralité toujours ouvert, et nous allons présenter dans cette section les résultats que nous avons obtenus dans [D_{BIRAT}] et dans la série d'articles [DDG1, DDG2, DDG3], en collaboration avec Jeffrey Diller et Vincent Guedj, et qui sont à ce jour les meilleurs disponibles dans ce cadre.

Une classe particulièrement intéressante d'applications de petit degré topologique est celle des applications birationnelles ($\lambda_2 = 1$). Parmi celles ci, les automorphismes de \mathbb{C}^2 , et les automorphismes des surfaces complexes compactes ont attiré beaucoup d'attention. La conjecture ci dessus a été respectivement démontrée dans ces cas par Bedford, Lyubich et Smillie [BLS1] et Cantat [Ca]. L'idée d'utiliser la structure laminaire des courants invariants pour étudier les propriétés dynamiques de μ_f a été introduite dans [BLS1].

En dimension arbitraire, cette conjecture a également suscité de nombreux travaux. Il nous faut en particulier mentionner ceux de De Thélin et Vigny [dT4, dTV], qui permettent de construire une mesure d'entropie maximale, satisfaisant les bornes attendues sur les exposants de Lyapunov, sous des hypothèses assez générales. On obtient ainsi une voie alternative à certains résultats de [D_{BIRAT}, DDG3]. Dinh et Sibony ont étudié dans [DS3, DS6] le cas des automorphismes des variétés Kähleriennes compactes.

Voici notre résultat principal. Le sens précis des hypothèses, ainsi que leur degré de généralité, seront discutés dans les paragraphes suivants.

Théorème 2.1.2

Soit X une surface complexe projective connexe et $f : X \dashrightarrow X$ une application rationnelle de petit degré topologique. On suppose que f satisfait les hypothèses suivantes :

$$f \text{ est 1-stable} \tag{H1}$$

et

$$f \text{ est d'énergie dynamique finie.} \tag{H2}$$

Alors on peut définir une mesure de probabilité invariante μ_f mélangeante, telle que

i. Pour μ_f presque tout p il existe un vecteur tangent non nul e^s en p , tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |df^n(e^s(p))| \leq -\frac{\log(\lambda_1/\lambda_2)}{2}. \tag{2.2}$$

ii. De même, pour μ_f presque tout p , il existe un vecteur tangent e^u en p , et un sous ensemble $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ de densité 1 tels que

$$\liminf_{\mathbb{N}' \ni n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |df^n(e^u(p))| \geq \frac{\log \lambda_1}{2}. \tag{2.3}$$

iii. μ_f est d'entropie $\log \lambda_1$, elle est en particulier d'entropie maximale et $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_1$.

iv. L'extension naturelle de μ admet une structure de produit local, et a la propriété de Bernoulli.

Si de plus on suppose que

$$p \mapsto \log \text{dist}(p, I_f \cup C_f) \in L^1(\mu_f), \tag{H3}$$

où C_f désigne l'ensemble critique, alors on a

v. pour tout n il existe un ensemble $\mathcal{P}_n \subset \text{Supp}(\mu)$ de points périodiques selles de période n , tel que $\#\mathcal{P}_n \sim \lambda_1^n$, et

$$\frac{1}{\lambda_1^n} \sum_{q \in \mathcal{P}_n} \delta_q \longrightarrow \mu_f. \tag{2.4}$$

La condition de 1-stabilité (H1) a été introduite par Fornæss et Sibony dans [FS2]. Elle peut se formuler ici de la manière suivante : pour tout n , $f^{-n}(I(f))$ est un ensemble fini (i.e. ne contient pas de courbe). Elle assure que l'action de f sur $H^2(X, \mathbb{R})$ satisfait $(f^n)^* = (f^*)^n$.

Dans le cas des applications birationnelles ($\lambda_2 = 1$), un résultat fondamental de Diller et Favre [DiF] affirme que f est birationnellement conjuguée à une application satisfaisant

(H1). Comme les conjugaisons birationnelles préservent les caractéristiques principales de la dynamique, lorsque f est birationnelle, on pourra toujours supposer que (H1) est vérifiée.

L'hypothèse d'énergie finie (H2) est de nature technique, et sera discutée plus en détail au §2.1.4. Il suffira de retenir pour le moment qu'elle est satisfaite pour la plupart des exemples connus.

On comprend à la lecture de l'énoncé que même lorsque μ_f est bien définie, on ne peut pas en général affirmer que la fonction $\log \text{dist}(\cdot, I_f \cup C_f)$ est μ_f -intégrable. De fait il existe des exemples d'applications satisfaisant (H1) et (H2) mais pas (H3) (voir le §2.1.5). En particulier dans ce cas on ne peut pas assurer que la fonction $\log \|df\|$ soit intégrable, et les exposants de Lyapunov ne sont pas *a priori* définis, ce qui est une différence manifeste avec le cas de grand degré topologique. Ceci explique la formulation quelque peu inhabituelle des conclusions *i.* et *ii.* Lorsque les exposants de Lyapunov ont un sens, celles ci se ramènent bien entendu à l'inégalité conjecturée (2.1) sur les exposants de Lyapunov.

Il est naturel de se demander si (2.4) implique effectivement que les points périodiques selles sont équidistribués. Pour ceci il suffit de montrer que le nombre total de points périodiques isolés est de l'ordre de λ_1^n , ce que malheureusement nous ne savons pas faire en général. La proposition suivante dit néanmoins que c'est le cas pour de nombreux exemples intéressants.

Proposition 2.1.3

Soit f une application de petit degré topologique sur une surface projective X . Soit Per_n l'ensemble de ses points périodiques isolés de période n . Alors sous l'une des deux hypothèses suivantes :

- *f n'a pas de courbe de points périodiques*
- *ou $X = \mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,*

on a $\#\text{Per}_n \sim \lambda_1^n$.

En particulier si f satisfait (H1), (H2) et (H3), les points selles s'équidistribuent selon μ_f .

Dans le cas birationnel on a une réponse complète grâce à un résultat récent de Junyi Xie [X] :

Théorème 2.1.4 (Xie)

Soient f une application birationnelle 1-stable sur une surface projective X , et Per_n l'ensemble de ses points périodiques isolés de période n . Alors $\#\text{Per}_n \sim \lambda_1^n$.

En particulier si f satisfait (H1), (H2) et (H3), les points selles s'équidistribuent selon μ_f .

On voit que pour les applications satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) et (H3), la conjecture 2.1.1 est essentiellement démontrée, à l'exception notable de l'unicité de la mesure d'entropie maximale.

◇

L'idée qui sous-tend la construction de μ_f est la suivante : on prend deux courbes génériques C et C' et on veut donner un sens à l'idée que la suite de mesures

$$\mu_n = \frac{1}{\lambda_1^{2n}} \sum_{x \in f^{-n}(C) \cap f^n(C')} \delta_x.$$

converge vers une mesure μ_f qui répond au problème. La suite μ_n joue le rôle des mesures équidistribuées aux préimages d'un point générique que l'on considère en grand degré topologique. On comprend alors aisément pourquoi les aspects géométriques de la construction de μ_f prennent une place prépondérante ici.

Le schéma général de la preuve remonte aux travaux fondateurs de Bedford, Lyubich et Smillie [BS1, BS3, BLS1] et Fornæss et Sibony [FS2, FS3] sur les automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Celle-ci peut se découper grossièrement en trois étapes :

1. construire des courants T^\pm tels que respectivement $f^*T^+ = \lambda_1 T^+$ et $f_*T^- = \lambda_1 T^-$ qui attirent les préimages (resp. images) des courbes génériques ;
2. définir μ_f comme $T^+ \wedge T^-$;
3. analyser les propriétés géométriques et dynamiques de μ_f .

La mise en œuvre de chacune de ces étapes présente de fait des difficultés de nature assez différente. La première est la plus classique. Pour celle-ci il est nécessaire entre autres d'avoir une bonne compréhension de l'action de f^n sur la cohomologie, et c'est ici qu'intervient la condition (H1) (voir le §2.1.3 pour les détails).

Le deuxième point est un problème d'analyse. On verra au §2.1.4 qu'il faut pousser la théorie du pluripotentiel dans ses retranchements pour espérer donner un sens au produit extérieur $T^+ \wedge T^-$ en toute généralité. Ici encore, on ne sait pas traiter le cas général, ce qui mène à l'introduction de l'hypothèse (H2).

La troisième étape, qui sera expliquée aux §2.1.6 et 2.1.7, est celle où l'on tire parti des propriétés géométriques des courants invariants. Il s'agit là certainement de l'aspect le plus original de nos travaux.

2.1.2. Classes d'exemples

Nous allons commencer par passer en revue un certain nombre d'exemples redevables de notre théorème. Une première classe importante est celle des applications polynomiales de \mathbb{C}^2 . Si X est n'importe quelle compactification projective de \mathbb{C}^2 , une telle application polynomiale s'étend comme une application rationnelle de X . On l'a vu, la condition de 1-stabilité (H1) n'est pas invariante par conjugaison birationnelle, donc le choix d'une compactification adaptée est fondamental. Dans ce contexte, un résultat récent de Favre et Jonsson [FJ2] affirme qu'il existe une compactification de \mathbb{C}^2 dans laquelle (H1) (légèrement affaiblie), (H2) et (H3) sont satisfaites. De plus, la mesure μ_f ne charge pas le diviseur à l'infini. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.5

Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ une application polynomiale de petit degré topologique. Alors les conclusions i. à v. du théorème 2.1.2 valent pour f .

Il est classique (voir [DDG1, §4] pour les détails) que les seules surfaces complexes admettant des endomorphismes rationnels de petit degré topologique sont les surfaces rationnelles et les surfaces de dimension de Kodaira égale à 0 (qui sont les tores, les surfaces K3 et leurs quotients finis). On voit assez facilement que pour les surfaces de dimension de Kodaira 0, quitte à faire un changement birationnel de coordonnées, les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées.

Corollaire 2.1.6

Soit f une application rationnelle de petit degré topologique sur une surface de dimension de Kodaira 0. Alors les conclusions i. à v. du théorème 2.1.2 valent pour f .

Soit maintenant f une transformation birationnelle. La condition de 1-stabilité (H1) s'écrit ici : $\forall n \geq 1, f^n(I_{f^{-1}}) \cap I_f = \emptyset$. On a vu que quitte à faire un changement birationnel de coordonnées, on peut toujours supposer cette condition satisfaite, et alors les courants invariants T^+ et T^- sont bien définis (voir le prochain paragraphe). C'est un fait connu depuis longtemps que le degré de régularité de ces courants dépend de la façon dont $f^n(I_{f^{-1}})$ approche I_f (voir par exemple [Dil]). Bedford et Diller ont étudié en détail dans [BeDi] les applications birationnelles telles que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_1^n} |\log \text{dist}(f^n(I_{f^{-1}}), I_f)| < \infty. \quad (\text{BD})$$

Un intérêt de cette hypothèse est qu'elle a lieu génériquement (hors d'un pluripolaire) dans l'espace des paramètres des applications birationnelles de \mathbb{P}^2 ([BeDi, Prop. 4.5] et aussi [dTV])

Bedford et Diller montrent que sous (BD) la mesure μ_f est bien définie, mélange et satisfait l'hypothèse (H3). On obtient ainsi le corollaire suivant, qui était le résultat principal de [D_{BIRAT}].

Corollaire 2.1.7

Soit f une application birationnelle satisfaisant la condition (BD). Alors les conclusions i. à v. du théorème 2.1.2 valent pour f .

L'article de Bedford et Diller a été une source d'inspiration importante pour [DDG2], et il faut comprendre la condition d'énergie finie (H2) comme étant une sorte de généralisation "abstraite" de la condition (BD).

2.1.3. Courants invariants

Ce paragraphe est un résumé des résultats principaux de [DDG1]. Il est à noter que dans le cas des applications birationnelles, tout ceci se trouve déjà dans l'article de Diller et Favre [DiF]. Soit donc f une application de petit degré topologique sur une surface projective X , satisfaisant l'hypothèse de 1-stabilité (H1). L'objet ici est de construire des courants invariants et de montrer des théorèmes de convergence.

Théorème 2.1.8

Soit f une application de petit degré topologique sur une surface projective X , satisfaisant l'hypothèse de 1-stabilité (H1). Il existe des courants positifs fermés T^+ et T^- sur X tels que pour toute $(1,1)$ forme fermée lisse ω on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} (f^n)^* \omega = c_+ T^+ \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} (f^n)_* \omega = c_- T^-, \quad (2.5)$$

où les c_{\pm} sont des constantes (cohomologiques).

Ce type de résultat est tout à fait classique en dynamique holomorphe, et a été démontré sous des hypothèses variées sur X ou f par de nombreux auteurs (comme par exemple [Sib2, Ca, DiF, Gu1, DiG, DS3], mais la liste est loin d'être exhaustive).

La difficulté qu'il faut prendre en compte pour traiter le cas qui nous intéresse ici est la suivante : même si l'on s'intéresse à la dynamique une application rationnelle de \mathbb{P}^2 , la recherche d'un modèle X dans lequel f devient 1-stable peut nous mener sur une surface rationnelle X dont on ne maîtrise pas la géométrie. Comme on l'a déjà dit, si f est birationnelle ou polynomiale, on sait qu'un tel modèle existe, et c'est une question ouverte dans le cas général.

Les résultats de [DiF] impliquent que sous nos hypothèses, il existe une unique classe nef $\alpha^+ \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ telle que $f^*\alpha^+ = \lambda_1\alpha^+$, et les autres valeurs propres de f^* sont dominées par $\sqrt{\lambda_2}$. De même f_* admet une classe invariante α^- aux propriétés analogues. On normalise la situation en imposant que $\alpha^+ \cdot \alpha^- = 1$.

Si la classe $\alpha^+ \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est à l'intérieur du cône nef (i.e. représentée par une forme de Kähler), le théorème 2.1.8 est déjà essentiellement contenu dans les travaux susmentionnés.

À l'inverse, lorsque une classe est au bord du cône nef, c'est un problème délicat en général de trouver un courant positif représentant cette classe et ayant de bonnes propriétés de régularité. Ici, le problème admet une solution assez simple, qui jouera un rôle important au §2.1.4.

Théorème 2.1.9

Sous les hypothèses du théorème 2.1.8, les classes α^+ et α^- sont représentées par des courants positifs fermés à potentiels bornés.

Ce résultat acquis, l'existence d'un courant invariant T^+ (resp. T^-) cohomologue à α^+ (resp. α^-) découle directement des arguments de Sibony [Sib2]. Le résultat de convergence pour $(f^n)^*$ dans (2.5) est assez délicat, mais s'appuie sur des arguments qui n'étonneront pas les spécialistes (contrôle des nombres de Lelong de T^+ , estimées volumiques). Enfin, on obtient l'autre assertion de (2.5) par un argument de dualité. Noter que le caractère projectif de X n'intervient pas dans ce théorème.

À partir de (2.5), un argument de Sibony [Sib2, Th. 1.10.1] montre que si L est une section hyperplane générique (au sens de la mesure de Lebesgue), la suite de courants $\frac{1}{\lambda_1^n} (f^{\pm n})^*[L]$ converge vers cT^\pm . Les théorèmes 1.2.3 et 1.2.4 et une estimation du genre montrent alors que les courants invariants sont géométriques (et fortement approximables par construction).

Théorème 2.1.10

Sous les hypothèses précédentes, le courant T^+ est laminaire, et le courant T^- tissé.

2.1.4. Condition d'énergie et mesure invariante

Nous abordons maintenant les résultats de [DDG2], qui visent à définir la mesure $T^+ \wedge T^-$ dans un cadre aussi général que possible. Une bonne part de cet article consiste à développer une théorie générale de "l'intersection non pluripolaire" des courants positifs fermés sur les surfaces Kähleriennes, inspirée des travaux de Guedj et Zeriahi [GZ]. Nous nous limiterons ici au cas des courants invariants T^\pm , ce qui simplifie certains énoncés.

La notion d'intersection non pluripolaire des courants positifs fermés remonte aux travaux de Bedford et Taylor [BT]. L'idée est qu'il est possible de donner un sens à

$$\mathbf{1}_{\{u > -\infty\}} \cap \{v > -\infty\} dd^c u \wedge dd^c v$$

pour toute paire de fonctions psh u, v , cette mesure étant par définition la partie non pluripolaire du produit extérieur $dd^c u \wedge dd^c v$. Dans le cas global, il est intéressant de combiner ceci avec le fait qu'on connaît *a priori* la masse d'un produit de courants positifs fermés pour des raisons cohomologiques. Ainsi, si la masse de

$$\mathbf{1}_{\{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}} (\omega + dd^c u) \wedge (\omega + dd^c v)$$

coïncide avec la valeur attendue, il est licite de déclarer cette mesure comme étant $(\omega + dd^c u) \wedge (\omega + dd^c v)$. Cette idée a été introduite par Guedj et Zeriahi [GZ], qui ont utilisé ce formalisme pour résoudre des équations de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes (voir aussi plus récemment [BEGZ]).

Plaçons nous sous les hypothèses du paragraphe précédent, c'est à dire que f est une application rationnelle 1-stable de petit degré topologique sur une surface projective X . D'après le théorème 2.1.9, il existe des courants positifs fermés à potentiels bornés ω^\pm et des potentiels négatifs g^\pm tels que $T^\pm = \omega^\pm + dd^c g^\pm$. On dira que $T^- \in \mathcal{E}(T^+)$ s'il existe une fonction convexe croissante $\chi : (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0]$ telle que

$$\chi \circ g^- \in L^1(\omega^- \wedge T^+) \text{ et } \int \chi' \circ g^- dg \wedge d^c g^- \wedge T^+ < \infty. \quad (2.6)$$

Cette condition ne dépend pas du choix de la décomposition $T^- = \omega^- + dd^c g^-$. Dans le cas où $\chi(t) = t$, l'intégrale dans (2.6) est l'énergie à la Dirichlet de g^- relativement à T^+ . Ce formalisme est le cœur technique de l'article de Bedford et Diller [BeDi]. Noter que $T^- \in \mathcal{E}(T^+)$ n'implique pas que $g^- \in L^1(\sigma_{T^+})$.

Nous pouvons maintenant préciser le sens de l'hypothèse (H2).

Définition 2.1.11

On dira que f est d'énergie dynamique finie si $T^- \in \mathcal{E}(T^+)$ et $T^+ \in \mathcal{E}(T^-)$.

Le théorème suivant motive cette définition.

Théorème 2.1.12

Soit (X, f) une application rationnelle 1-stable de petit degré topologique. Si f est d'énergie dynamique finie, on peut définir une mesure de probabilité $\mu_f = T^+ \wedge T^-$ qui ne charge pas les ensembles pluripolaires.

Même si cela n'apparaît pas directement à la lecture de (2.6), la construction de μ_f repose sur le formalisme de l'intersection non pluripolaire présenté ci dessus. Insistons sur le fait que la dynamique n'y joue aucun rôle.

On peut légitimement se demander pourquoi nous introduisons une nouvelle définition du produit extérieur des courants. Rappelons que si $g^+ \in L^1(\sigma_{T^-})$, on définit classiquement

$$T^+ \wedge T^- = \omega^+ \wedge T^- + dd^c(g^+ T^-),$$

qui ne dépend pas de la décomposition $T^+ = \omega^+ + dd^c g^+$ et est symétrique en T^+ et T^- . On dira alors que $T^+ \in L^1(T^-)$. Le point est que sous certaines hypothèses on sait vérifier que f est d'énergie dynamique finie, sans pour autant savoir montrer que $T^+ \in L^1(T^-)$ (voir le §2.1.5).

La proposition suivante clarifie quelque peu les relations entre ces deux notions. Elle dit aussi que si f ne satisfait pas (H2), il faut s'attendre à ce que la dynamique intéressante soit concentrée sur un pluripolaire.

Proposition 2.1.13

Soit (X, f) une application rationnelle 1-stable de petit degré topologique, et supposons que $T^+ \in L^1(T^-)$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est d'énergie dynamique finie} &\Leftrightarrow T^+ \wedge T^- \text{ ne charge pas } \{g^+ = -\infty\} \cup \{g^- = -\infty\} \\ &\Leftrightarrow T^+ \wedge T^- \text{ ne charge pas les pluripolaires.} \end{aligned}$$

Passons maintenant aux propriétés géométriques et dynamiques de μ_f .

Théorème 2.1.14

Soit (X, f) une application rationnelle 1-stable de petit degré topologique et d'énergie dynamique finie. La mesure μ_f est invariante et mélangeante, et c'est l'intersection géométrique des courants T^+ et T^- .

La preuve du caractère mélangeant est classique et l'assertion d'intersection géométrique provient du théorème 1.2.8. C'est le seul endroit où on utilise le caractère projectif de X .

2.1.5. Récurrence de l'ensemble d'indétermination

Nous avons affirmé au §2.1.2 que pour les applications birationnelles, la régularité des courants invariants dépend de la façon dont $f^n(I_{f^{-1}})$ approche I_f . L'objet de ce paragraphe est de préciser cette philosophie sur quelques exemples. Nous supposons pour simplifier que f est *birationnelle*, même si on pourrait donner un sens à la plupart de nos assertions dans le cas général, modulo quelques difficultés techniques supplémentaires.

Le cas le plus simple, qui s'apparente à celui des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 est celui où $\overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(I_{f^{-1}})} \cap \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(I_f)} = \emptyset$ (pas de récurrence). Dans ce cas T^+ et T^- sont à potentiels continus au voisinage de $\text{Supp}(T^+) \cap \text{Supp}(T^-)$, et les conditions (H1), (H2) et (H3) sont bien sûr satisfaites.

Il est utile de clarifier l'interaction entre la condition d'énergie finie et celle de Bedford-Diller (BD). Le premier résultat est le suivant.

Théorème 2.1.15 (Bedford-Diller [BeDi, Thms 3.6 et 4.4])

Soit f une application birationnelle 1-stable. Si f satisfait la condition (BD) alors f est d'énergie finie et de plus $T^+ \in L^1(T^-)$.

Réciproquement, on peut caractériser parmi les applications birationnelles d'énergie finie celles qui satisfont (BD). Pour cela, plaçons nous dans un modèle birationnel de X dans lequel, outre la 1- stabilité, la condition suivante est satisfaite :

$$\text{pour tout } p \in I_f \{f(p)\} \cdot \alpha^- > 0 \text{ et pour tout } q \in I_{f^{-1}} \{f^{-1}(q)\} \cdot \alpha^+ > 0 \quad (2.7)$$

(“pas de points d'indétermination fallacieux” selon la terminologie de [DDG2]). Ceci est toujours possible, en vertu de [BeDi, Prop. 4.1].

Théorème 2.1.16 (Diller-Guedj)

Soit (X, f) une application birationnelle 1-stable et satisfaisant la condition (2.7) ci-dessus. On suppose que f est d'énergie dynamique finie. Alors

$$f \text{ satisfait la condition (BD)} \Leftrightarrow \log \text{dist}(\cdot, I_f \cup C_f) \in L^1(\mu_f) \text{ (condition (H3))}.$$

Cet énoncé ne se trouve pas tel quel dans [DDG2], mais il se déduit aisément de [DiG, Prop. 5.4] et des résultats de [DDG2, §4]. Noter que les auteurs dans [DiG] ne mentionnent que l'intégrabilité de la fonction $\log \text{dist}(\cdot, I_f)$; néanmoins comme la condition (BD) est symétrique en f et f^{-1} , on obtient également le résultat pour $\log \text{dist}(\cdot, I_{f^{-1}})$, et on conclut que $\log \text{dist}(\cdot, C_f) \in L^1(\mu_f)$ par l'invariance de μ_f , le fait que $f(C_f) = I_{f^{-1}}$, et les inégalités de Lojaciewicz.

C.Favre a exhibé dans [F] des exemples d'applications birationnelles dont le degré de récurrence de l'ensemble d'indétermination est essentiellement arbitraire. Pour cela il suffit que I_f et $I_{f^{-1}}$ soient situés sur un cercle invariant sur lequel f est conjuguée à une rotation irrationnelle dont on puisse moduler l'angle. Voici, en coordonnées homogènes $[x : y : z]$ sur \mathbb{P}^2 , une variante due à Diller et Guedj [DiG] de ce type d'exemple :

$$f_{b,c}[x : y : z] = [bcx(-cx + icy + z) : icy(x - iy + ibz) : ibz(bcx + y - bz)], \quad (2.8)$$

où $b = -se^{2i\pi\theta}$, $c = i/s$, avec $s > 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On vérifie que sous ces conditions, $f|_{(t=0)}$ est conjuguée à une rotation d'angle θ , avec deux points appartenant respectivement à I^+ et I^- diamétralement opposés sur un cercle invariant, et f est 1-stable si et seulement si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En outre, Diller et Guedj montrent que pour ces exemples, la mesure $\mu_f = T^+ \wedge T^-$ est bien définie (au sens où $T^+ \in L^1(T^-)$), mélange, et ne charge pas les courbes. La condition (BD) peut alors s'exprimer comme une condition arithmétique (de type "petits diviseurs") portant sur l'angle θ .

Nous ne savons exprimer la condition d'énergie finie en termes de petits diviseurs. Il est en revanche possible de trouver des conditions intermédiaires entre (H2) et (BD), et qui s'expriment en termes de petits diviseurs (classes dites \mathcal{E}^p , $p < 1$). En particulier, il existe des valeurs explicites de θ violant la condition (BD), mais pour lesquelles (H2) est satisfaite [DDG2, §4]. En particulier pour ces exemples, comme d'après le théorème 2.1.16, la condition (H3) est violée on ne peut pas appliquer le théorème d'Oseledets, donc parler d'exposants de Lyapunov au sens habituel, ni *a fortiori* utiliser le formalisme de la théorie de Pesin. Ceci justifie en quelque sorte l'utilisation des courants géométriques comme substituts à la théorie de Pesin.

Il serait intéressant de savoir si les "exposants de Lyapunov", tels que définis au théorème 2.1.2 peuvent prendre des valeurs infinies.

Mieux, répondant à une question que nous avons laissé ouverte dans [DDG2], X. Buff a démontré par un joli argument de catégorie de Baire le résultat suivant [Buff].

Théorème 2.1.17 (Buff)

Soit $f_{b,c}$ définie comme en (2.8), avec $b = -se^{2i\pi\theta}$, $c = i/s$. Il existe des valeurs de l'angle θ pour lesquelles $f_{b,c}$ est 1-stable, mais ne satisfait pas la condition d'énergie finie (H2).

D'après la proposition 2.1.13, la mesure μ_f a alors des propriétés exceptionnelles. Plus précisément, on peut montrer que pour ces exemples, les courants T^\pm , ainsi que la mesure μ_f donnent masse totale à un ensemble pluripolaire. Nous ne savons pas si ces exemples satisfont la conjecture 2.1.1.

2.1.6. Géométrie des courants invariants et dynamique : le cas birationnel

Nous allons maintenant procéder à l'analyse dynamique de la mesure μ_f dont la construction a été présentée au §2.1.4, dans le cas où f est birationnelle. Nous supposons donc que f

est une application birationnelle satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2), et suivons l'article [D_{BIRAT}].

L'idée de la méthode est d'étudier l'action de f sur les structures laminaires de T^+ et T^- pour en déduire des propriétés d'expansion. C'est en quelque sorte la démarche inverse de la théorie de Pesin, où c'est la non-nullité des exposants de Lyapunov qui permet de construire des "laminations" invariantes.

Le point de départ est le résultat suivant, qui est l'exact analogue du lemme de Lyubich-Briend-Duval [Ly1, BrDu2] dans notre contexte.

Lemme 2.1.18

Soit $\mathcal{L} = \{D_t, t \in \tau\}$ une boîte de flot subordonnée à T^- . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ et une transversale $\tau(\varepsilon) \subset \tau$, telle que $\mathbf{M}(T^- \wedge \tau(\varepsilon)) \geq (1 - \varepsilon)\mathbf{M}(T^- \wedge \tau)$ et

$$\forall n \geq 1, \forall t \in \tau(\varepsilon), \text{Aire}(f^{-n}(D_t)) \leq \frac{C(\varepsilon)n^2}{\lambda_1^n}.$$

Ici, une boîte de flot est par définition une lamination biholomorphe à une lamination par graphes au dessus du disque unité. Elle est dite subordonnée à T lorsque $\text{Supp}(T|_{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$. On sait d'après le théorème 1.2.6 qu'alors $T|_{\mathcal{L}}$ est uniformément laminaire, et on note $T^- \wedge \tau$ la mesure induite sur la transversale τ . L'énoncé dit que quitte à retirer un ensemble de plaques de petite mesure transverse (qui correspond au petit nombre de mauvaises préimages du lemme de Lyubich-Briend-Duval), on a contraction exponentielle de l'aire par f^{-n} . En réduisant un peu la taille des disques, on obtiendra une contraction exponentielle du diamètre, d'après [BrDu2, appendice].

L'idée de la démonstration est que $f^{-n}(\mathcal{L})$ est à peu de choses près également une boîte de flot pour T^- , dont la masse transverse est $\mathbf{M}(T^- \wedge f^{-n}\tau) = \lambda_1^n \mathbf{M}(T^- \wedge \tau)$, à cause de la relation d'invariance de T^- . Comme la masse totale de la boîte de flot $f^{-n}(\mathcal{L})$ est majorée par celle de T^- , il faut bien que la plupart des disques soient d'aire $\lesssim \lambda_1^{-n}$.

Comme T^- est extrémal, étant donnés deux fermés de mesure transverse positive quelconques, on peut trouver une "longue boîte de flot" qui les connecte, et on en déduit ainsi que toutes les mesures de la forme $\frac{T^- \wedge \tau}{\mathbf{M}(T^- \wedge \tau)}$ s'équidistribuent selon f^{-n} .

Jusqu'ici nous n'avons pas fait intervenir la mesure invariante μ_f . Rappelons que grâce à nos hypothèses, μ_f est l'intersection géométrique de T^+ et T^- . Plus précisément, il existe une famille de fermés de mesure positive P_i disjoints telle que $\mu_f(\bigcup_i P_i) = 1$, et pour chaque i , des boîtes de flot \mathcal{L}_i^+ et \mathcal{L}_i^- respectivement subordonnées à T^+ et T^- , telles que¹

$$\mu|_{P_i} = \int [\Delta^+ \cap \Delta^-] d\mu_i^+(\Delta^+) d\mu_i^-(\Delta^-), \text{ où on a noté } T^\pm|_{\mathcal{L}_i^\pm} = \int [\Delta^\pm] d\mu_i^\pm. \quad (2.9)$$

Nous pouvons maintenant esquisser point par point la démonstration du théorème 2.1.2 (propriétés dynamiques de μ_f)

- i.* et *ii.* Un point μ_f -générique p appartient à un des fermés P_i , et on pose $e^{u/s}(p)$ un vecteur unitaire tangent au disque subordonné à $T^{-/+}$ passant par p . Ces vecteurs sont respectivement dilatés et contractés par la dynamique, à la vitesse $\lambda_1^{n/2}$, en vertu du lemme 2.1.18.

1. Cette formulation particulièrement précise de l'intersection géométrique utilise de façon essentielle toute la structure des courants laminaires fortement approximables.

- iv.* La propriété d'équidistribution des mesures de la forme $\frac{T^- \wedge \tau}{\mathbf{M}(T^- \wedge \tau)}$ mène à une preuve géométrique du caractère mélangeant de μ_f , dans l'esprit de l'argument de Hopf pour le flot géodésique. D'après (2.9), la mesure est le produit local de ses conditionnelles stables et instables. Les travaux d'Ornstein et Weiss [OW] montrent qu'une telle mesure a alors la propriété de Bernoulli. On peut interpréter la structure de produit local de μ_f comme un analogue du caractère équilibré ($f^* \mu = d_{\text{top}} \mu$) qui est familier en grand degré topologique.
- iii.* Enfin, la structure géométrique de μ_f permet de calculer son entropie. En effet, en suivant [LedS] on peut construire des partitions invariantes ξ^s et ξ^u comme en théorie de Pesin, dont les pièces sont respectivement des ouverts des variétés stables et instables. Les conditionnelles de μ_f le long de ces partitions sont induites par les mesures transverses associées aux courants invariants (i.e. les mesures μ^\pm de (2.9), ou de manière équivalente les mesures $T^\pm \wedge \tau$ du lemme 2.1.18), qui satisfont une relation d'invariance explicite. La valeur de l'entropie de μ_f est alors donnée par une formule de Rokhlin².

Remarque 2.1.19 Les résultats qui viennent d'être présentés (ainsi que ceux du paragraphe suivant) n'utilisent pas directement le fait que f est d'énergie dynamique finie. Il suffit simplement de savoir que les courants laminaires T^+ et T^- ont une intersection géométrique (il n'est pas non plus nécessaire de savoir définir le produit extérieur $T^+ \wedge T^-$ pour donner un sens à ce concept).

En particulier on pourrait imaginer qu'il soit possible de démontrer cette propriété (par un argument géométrique ?) pour les exemples qui violent la condition (H2), auquel cas les conclusions du théorème 2.1.2 seraient également valables dans ce cas.

Enfin, pour démontrer l'équidistribution des points selles (point v . du théorème) sous l'hypothèse d'intégrabilité (H3) on applique directement la preuve de [BLS2]. L'existence d'orbites selles provient du fait que si p est un point générique, un petit bidisque centré en p reviendra sur lui même comme une application d'allure Hénon de degré 1 (i.e. l'horizontale est dilatée et la verticale contractée, voir le §2.3.2 pour une définition formelle). On a donc besoin de passer de l'existence de directions dilatées/contractées le long de l'orbite de p au contrôle de l'action de f^n sur un petit voisinage. C'est typiquement ce que permet la théorie de Pesin, d'où la nécessité d'introduire l'hypothèse (H3).

À l'inverse, je ne vois pas comment obtenir un tel contrôle sans utiliser le fait que les orbites μ_f génériques s'approchent sous-exponentiellement vite de l'ensemble d'indétermination, ce qui est justement le contenu de (H3).

2.1.7. Géométrie des courants invariants et dynamique : le cas général

Nous supposons maintenant que f est une application de petit degré topologique satisfaisant (H1) et (H2), et suivons [DDG3]. L'approche est essentiellement la même qu'au paragraphe précédent, mais sa mise en œuvre est beaucoup plus délicate. Nous allons expliquer de manière informelle les idées de la démonstration

D'après ce qui précède, il va falloir montrer que les disques subordonnés à T^+ sont des variétés stables, donc contractées en temps positif, et ceux subordonnés à T^- sont des variétés instables. On sait que pour un système dynamique non inversible, il y a a priori toute une famille de variétés instables passant par un point donné, dépendant de la famille des histoires

2. C'est cette même formule qui dit qu'une mesure telle que $f^* \mu = d_t \mu$ est d'entropie $\log d_t$.

possibles de ce point. Ce phénomène explique intuitivement pourquoi le courant T^- n'est que tissé, et non pas laminaire.

Pour la direction stable, on peut raisonner comme au lemme 2.1.18, en tenant compte du fait que les itérés positifs d'une boîte de flot subordonnée à T^+ se recouvrent, de façon contrôlée par le degré topologique. L'énoncé précis est le suivant.

Lemme 2.1.20

Soit $\mathcal{L} = \{D_t, t \in \tau\}$ une boîte de flot subordonnée à T^+ . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ et une transversale $\tau(\varepsilon) \subset \tau$, telle que $\mathbf{M}(T^+ \wedge \tau(\varepsilon)) \geq (1 - \varepsilon)\mathbf{M}(T^+ \wedge \tau)$ et

$$\forall n \geq 1, \forall t \in \tau(\varepsilon), \text{Aire}(f^n(D_t)) \leq \frac{C(\varepsilon)n^2\lambda_2^n}{\lambda_1^n}.$$

Comme sous nos hypothèses μ_f est l'intersection géométrique de T^+ et T^- , on en déduit directement l'assertion *i.* du théorème 2.1.2.

À l'inverse, dans la direction instable, on ne dispose pas de notion de mesure transverse, ni d'une description aussi précise des boîtes de flot subordonnées à T^- , et je ne sais pas comment étendre directement l'argumentation du lemme 2.1.18.

En outre, l'analyse des préimages μ_f -génériques fait apparaître un phénomène nouveau : la mesure μ_f peut être ou ne pas être totalement invariante. Voici un exemple :

Exemple 2.1.21 Soit f une application de Hénon de degré $d \geq 3$, de la forme $f(z, w) = (aw + p(z), az)$. On considère un entier $1 < e < d$ et pour $b \ll a$ l'application $f_b(z, w) = (aw + p(z), az + bz^e)$. Il est facile de voir que f_b is 1-stable dans \mathbb{C}^2 , avec $\lambda_1 = d$ et $\lambda_2 = e$. Il existe un grand bidisque B dans lequel f_b est une application d'allure Hénon $[D_{\text{HL}}]$, en particulier elle y est injective. Ainsi il y a une unique mesure d'entropie maximale $\log d$ dans B , et il est aisé de voir que cette mesure s'écrit $\mu = T^+(f_b) \wedge T^-(f_b)$, où $T^\pm(f_b)$ sont les courants invariants globaux.

On voit en particulier avec cet exemple qu'il serait inadapté de montrer des propriétés de contraction portant sur $(1-\varepsilon)\lambda_2^n$ branches inverses, puisque la plupart des préimages des points de $\text{Supp}(\mu)$ en sortent (f est injective au voisinage de $\text{Supp}(\mu)$), et donc ne contribuent pas à la dynamique dans l'extension naturelle. La méthode que nous allons développer permettra effectivement d'identifier les préimages significatives.

Pour cela nous nous inspirons de la démarche que De Thélin utilise dans [dT3]. Plutôt que de travailler directement le long de T^- , on considère une approximation

$$f^k : \frac{1}{d^n} [f^n(L)] \wedge T^+ \longrightarrow \frac{1}{d^{n+k}} [f^{n+k}(L)] \wedge T^+,$$

où L est une section hyperplane générique³. Pour cette approximation : le problème de la définition d'une mesure transverse pour T^- ne se pose pas, de même que celui de la sélection des préimages, car pour L générique $f^k : f^n(L) \rightarrow f^{n+k}(L)$ est essentiellement injective. Posons f_{-k} l'inverse de cette application (qui est définie hors d'un nombre fini de points), et notons que si $\Delta \subset f^{n+k}(L)$ est un disque, $f_{-k}|_\Delta$ se prolonge à travers ces points. On a alors le lemme suivant, qui est essentiellement dû à De Thélin :

3. Je triche un peu ici : en réalité on fait le produit extérieur géométrique avec un courant uniformément laminaire qui approche T^+ car on ne sait pas si les produits $[f^n(L)] \wedge T^+$ sont bien définis.

Lemme 2.1.22

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r(\varepsilon)$ et un sous ensemble $A_{n+k,\varepsilon} \subset f^{n+k}(L)$ constitué de disques Δ de géométrie bornée et de taille $r(\varepsilon)$, et tel que

$$(d^{-(n+k)}[f^{n+k}(L)] \wedge T^+)(A_{n+k,\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon,$$

et pour chacun de ces disques, $\|df_{-k}|_{\Delta}\| \leq C(\varepsilon)d^{-k/2}$.

Pour démontrer le lemme on utilise le fait que par intersection géométrique, la plus grande partie de la masse de $d^{-(n+k)}[f^{n+k}(L)] \wedge T^+$ est situé sur les bonnes composantes de $d^{-(n+k)}[f^{n+k}(L)]$, et que le nombre relatif de bonnes composantes Δ telles que l'aire de $f_{-k}(\Delta)$ est trop grande (i.e. $\gg d^{-k}$) est négligeable. Par intersection géométrique, ces composantes représentent une masse négligeable pour la mesure $d^{-(n+k)}[f^{n+k}(L)] \wedge T^+$. Enfin, pour obtenir le contrôle de la dérivée, on utilise le lemme de comparaison aire-diamètre de Briend-Duval (voir la figure 2.2 pour une illustration de cet argument).

On passe ensuite à la limite pour $n \rightarrow \infty$, en utilisant le fait que $\frac{1}{d^n}[f^n(L)] \wedge T^+$ converge "géométriquement" vers $T^- \wedge T^+$. Le degré topologique éventuel de $f^k|_{\text{Supp}(\mu)}$ réapparaît à cette étape. On obtient ainsi un courant uniformément géométrique T_ε^- subordonné à T^- , et un ensemble de *préhistoires distinguées*, dont on montre qu'elles forment un ensemble de mesure $1 - \varepsilon$ dans l'extension naturelle de μ , et qui chacune contractent exponentiellement un disque subordonné à T_ε^- . On en déduit l'assertion *ii.* du théorème 2.1.2.

Pour obtenir les points *iii.* et *iv.* du théorème, il faut analyser plus finement la structure de $\widehat{\mu}$. Pour cela, on fabrique à partir des structures géométriques un système dynamique mesuré abstrait, "l'extension tautologique" $\check{X} = (\check{f}, \check{\mu})$, qui se projette sur (f, μ) , et dans lequel la structure de $\check{\mu}$ est facile à décrire.

Le principe de la construction est simple (même si les détails sont un peu fastidieux) : on sépare artificiellement les feuilles de T^- , en relevant chaque boîte de flot (courant uniformément tissé élémentaire) $\int[Z]dm(Z)$ (ici m est une mesure sur l'espace $Z(\Omega, C)$ des chaînes holomorphes de volume $\leq C$ dans un certain ouvert Ω) à son "fibré tautologique"

$$\{(p, Z) \in \Omega \times Z(\Omega, C), p \in Z\},$$

dans lequel les feuilles sont disjointes par définition. On prend ensuite une sorte de limite inductive selon le système des boîtes de flot subordonnées à T^- (ordonnées par la subordination). La mesure μ admet une relevée naturelle $\check{\mu}$ à cet espace, qui admet une structure produit.

Une autre façon de voir cette construction est de dire que l'on a remplacé la dynamique f (agissant sur les points de X) par la dynamique sur l'espace des paires (p, D) , où D est un germe de disque subordonné à T^- passant par p .

L'étape suivante est de relier \check{X} à l'extension naturelle \widehat{X} . Pour cela, on considère l'extension naturelle $\widehat{\check{X}}$, qui est donc l'espace des suites $(p_n, D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $p_n \in D_n$ comme au dessus, et on montre que $\widehat{\check{X}}$ est isomorphe à \widehat{X} . Pour ce faire, on remarque d'abord que pour (p_n) générique, la suite (D_n) ne dépend que de D_0 , puisque (p_n) détermine la suite des branches inverses telles que $f^{-n}(p_0) = p_n$. Ensuite on montre que D_0 est également déterminé par (p_n) (unicité de la variété instable locale) ce qui découle de la contraction dans la direction transverse. Ainsi on a fabriqué une flèche $\widehat{X} \rightarrow \widehat{\check{X}}$, $(p_n) \mapsto (p_n, D_n)$ qui inverse la projection naturelle de $\widehat{\check{X}}$ dans \check{X} . On conclut que $\widehat{\check{X}} \simeq \widehat{X}$.

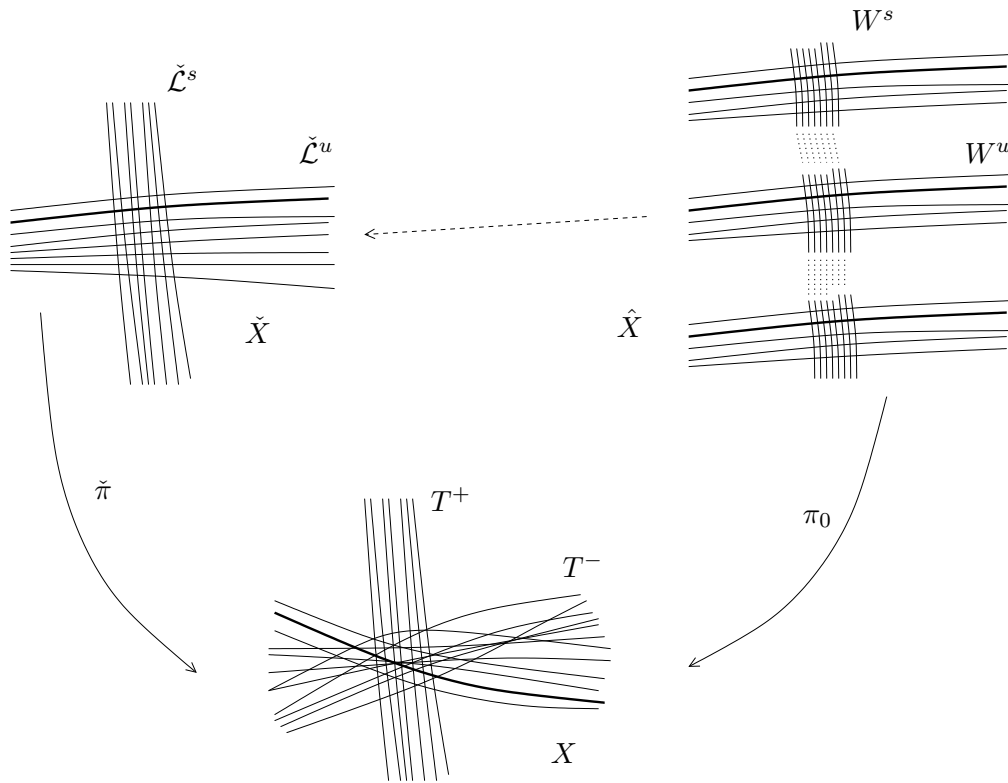


FIGURE 2.1 – Représentation schématique des extensions naturelle et tautologique

La figure 2.1 aide à se représenter les relations entre ces divers espaces.

Arrivés à ce point, on peut construire les partitions invariantes $\hat{\xi}^s$ et $\hat{\xi}^u$ dans l'extension naturelle, comme dans le cas birationnel. Pour calculer l'entropie, on montre comme précédemment que les conditionnelles de $\hat{\mu}$ selon la partition $\hat{\xi}^u$ sont induites par le courant T^+ (noter qu'on ne sait pas faire de même pour $\hat{\xi}^s$). Enfin, un argument assez délicat, mêlant le Théorème 1.2.6 de prolongement analytique des feuilles de T^- et des considérations de théorie ergodique montre que la mesure $\hat{\mu}$ est le produit de ses conditionnelles stables et instables (point *iv.* du théorème).

Une fois la structure produit obtenue, l'équidistribution des points selles sous (H3) ne requiert pas d'idées nouvelles par rapport au cas birationnel. \square

2.2. Directions de Fatou pour les endomorphismes de \mathbb{P}^k

2.2.1. Problématique

Dans cette section, on s'intéresse à la dynamique des applications holomorphes (i.e. sans points d'indétermination) de \mathbb{P}^k . Soit donc f une telle application, et d son degré (premier degré dynamique). Le degré topologique est $d_{\text{top}} = d^k$. L'objet est de comprendre ce qu'il advient en dimension supérieure de la dichotomie de Fatou-Julia, familière en dimension 1.

Rappelons quelques définitions et faits classiques. On appelle ensemble de Fatou F le plus grand ouvert sur lequel la suite des itérés f^n est localement équicontinue, et ensemble de Julia son complémentaire, de sorte que $\mathbb{P}^k = F \cup J$. On définit la *mesure d'équilibre* μ_f de f comme la limite

$$\mu_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^{kn}} \sum_{f^n(y)=x} \delta_y, \text{ où } x \text{ est un point générique.}$$

C'est l'unique mesure d'entropie maximale de f , elle est *répulsive*, au sens où tous ses exposants de Lyapunov valent au moins $\frac{\log d}{2}$ et décrit la répartition asymptotique des points périodiques répulsifs (ceci est un condensé de résultats de [Ly1, FLM] en dimension 1 et [BrDu1, BrDu2] en dimension supérieure).

En dimension 1, le support de μ_f est exactement J , donc génériquement sur J (en un sens mesurable) on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n\| \geq \frac{\log d}{2},$$

alors que sur F la suite des dérivées est localement uniformément bornée.

En dimension supérieure, il est très facile de voir qu'en général $\text{Supp}(\mu_f) \subsetneq J$. Intuitivement la raison est claire : le support de μ_f est un lieu où la dynamique est "répulsive dans toutes les directions" ⁴, alors qu'il suffit d'une seule direction instable pour être dans J .

Par exemple, pour les applications polynomiales de \mathbb{C}^2 qui admettent un prolongement holomorphe à \mathbb{P}^2 , on a toujours une inclusion stricte $\text{Supp}(\mu_f) \subsetneq J$, puisqu'on voit facilement que dans \mathbb{C}^2 , $\text{Supp}(\mu_f)$ est compact alors que J ne l'est pas.

On définit comme précédemment le courant de Green

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} (f^n)^* \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} [f^{-n}(H)],$$

où H est un hyperplan générique. Il est lié à la mesure d'équilibre par l'équation $\mu_f = T^k$ (on rappelle T est à potentiel continu). Fornæss et Sibony d'une part et Ueda d'autre part [FS2, U] ont démontré indépendamment que J est précisément le support de T (le point délicat étant de montrer que $J \subset \text{Supp}(T)$).

4. Noter qu'il ne s'agit que d'une inclusion : il existe des applications holomorphes possédant des points répulsifs hors de $\text{Supp}(\mu_f)$ [HP].

Nous pouvons maintenant préciser un peu l'objet de notre étude. On peut considérer la dynamique sur $\text{Supp}(\mu_f)$ comme étant raisonnablement bien comprise. À l'inverse, on ne sait que peu de choses en général sur ce qui se passe hors de $\text{Supp}(\mu_f)$. Laissant de côté la question de la compréhension globale de la dynamique dans l'ensemble de Fatou (classification des composantes, etc.), qui est un problème largement ouvert, nous nous proposons d'étudier la dynamique sur $J \setminus \text{Supp}(\mu_f)$.

Supposons temporairement pour simplifier que $k = 2$. Posons $J_1 = J$ et $J_2 = \text{Supp}(\mu_f)$ de sorte que $J_2 \subset J_1$. Nous dirons qu'un disque holomorphe Δ est *un disque de Fatou* si la suite des itérés $f^n|_{\Delta}$ est normale. De nombreux auteurs, à commencer par Fornæss et Sibony [FS1, FS2], ont proposé d'expliquer la différence entre J_1 et J_2 par la présence de tels disques de Fatou, "remplissant" $J_1 \setminus J_2$ en un sens à définir. Ainsi, la dynamique le long de $J_1 \setminus J_2$ serait de type Fatou "dans la direction tangentielle" et de type Julia dans les directions transverses. Par contraste la dynamique sur J_2 est de Julia dans toutes les directions.

Dans [FS4], les auteurs montrent que si f satisfait (une version adaptée de) l'axiome A de Smale, on a effectivement une telle description de J .

Dans le cas général on peut au mieux espérer que $J_1 \setminus J_2$ est rempli par des disques de Fatou en un sens mesurable. La mesure "ambiante" naturelle le long de J_1 est la mesure trace σ_T , mais il faut prendre garde au fait que ce *n'est pas* une mesure invariante. Une question légèrement plus précise est celle de savoir si $T|_{J_1 \setminus J_2}$ est un courant laminaire.

La laminarité du courant de Green a été démontrée dans le bassin de l'infini pour les applications polynomiales par Bedford et Jonsson [BJ]. Cette question était également le sujet de la thèse de De Thélin, qui a montré que $T|_{J_1 \setminus J_2}$ est laminaire lorsque f est critiquement finie, et donné des indices tendant à la laminarité (estimations du genre des courbes $f^{-n}(L)$ approchant T , loin de $\text{Supp}(\mu_f)$) dans le cas général [dT2]. Néanmoins le problème de l'existence de ces disques de Fatou reste entier, et semble extrêmement délicat.

En dimension arbitraire k , on pose pour $1 \leq q \leq k$, $J_q = \text{Supp}(T^q)$. On obtient alors une filtration

$$\mathbb{P}^k \supset J = J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_k = \text{Supp}(\mu_f). \quad (2.10)$$

Il faut comprendre cette filtration comme étant le bon analogue de la dichotomie de Fatou-Julia en dimension supérieure. Intuitivement, le nombre de "directions de Fatou" devrait décroître de $k - 1$ sur $J_1 \setminus J_2$ à 0 sur J_k . On peut ainsi espérer que $J_q \setminus J_{q+1}$ est rempli par des disques de Fatou de codimension q .

Sans nous attaquer de front à cette question ambitieuse, nous proposons dans [D_{FATOU}] un modèle infinitésimal des différents régimes dynamiques le long de la filtration de Julia (2.10), dans l'esprit du théorème d'Oseledets.

Conjecture 2.2.1

Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k et T son courant de Green. Soit q un entier tel que $1 \leq q \leq k - 1$. Alors pour σ_{T^q} -presque tout $x \in J_q \setminus J_{q+1}$ il existe un sous espace vectoriel $\mathcal{F}_x \subset T_x \mathbb{P}^k$ de codimension q , tel que

- i. si $v \in \mathcal{F}_x$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v)\| \leq 0$;
- ii. si $v \notin \mathcal{F}_x$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v)\| \geq \frac{\log d}{2}$.

Ici, la notation $\|\cdot\|$ désigne n'importe quelle norme sur le fibré tangent. Un vecteur $v \in T_x\mathbb{P}^k$ tel que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v)\| \leq 0$ sera dit *de Fatou*. L'ensemble de ces vecteurs est un sous espace vectoriel \mathcal{F}_x de $T_x\mathbb{P}^k$, appelé *sous espace de Fatou*. Ainsi, la conjecture prédit que σ_{T^q} -p.p. sur $J_q \setminus J_{q+1}$, le sous espace de Fatou \mathcal{F}_x est de codimension q .

Noter que si T^q était un courant laminaire, formé de disques de Fatou de codimension q , alors pour obtenir *i*. il suffirait de prendre la collection des vecteurs tangents à ces disques.

Si l'on convient que $J_0 = \mathbb{P}^k$ et $J_{k+1} = \emptyset$, alors la conjecture est vraie pour $q = 0$ (par définition de l'ensemble de Fatou) et pour $q = k$ (d'après les estimations pour les exposants de Lyapunov de μ_f). Ainsi, l'énoncé *ii*. doit être compris comme une généralisation en codimension supérieure de la borne de Briend et Duval sur les exposants de μ_f . Toutefois, σ_{T^q} n'est pas une mesure invariante, donc *ii*. n'est pas une assertion portant sur des exposants de Lyapunov. On ne peut donc pas espérer la déduire de techniques de théorie ergodique (théorème d'Osele-dets, etc.). Nos résultats dans cette direction découleront des techniques mises en place dans les sections précédentes, basées sur l'interaction entre courants géométriques et dynamique.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus dans [D_{FATOU}], qui donnent une construction de la famille de sous espaces de Fatou, ainsi que des bornes pour l'expansion dans la direction transverse. En conséquence, on obtient une preuve complète de la conjecture pour $q = 1$ (couvrant ainsi le cas de dimension 2), ainsi qu'une stratégie (étayée) de preuve dans le cas général.

2.2.2. Directions de Fatou

Voici notre premier résultat :

Théorème 2.2.2

Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k et q un entier tel que $1 \leq q \leq k$. Alors pour σ_{T^q} -p.t. $x \in J_q \setminus J_{q+1}$, le sous espace de Fatou est de dimension au moins q en x .

L'idée de la démonstration est très naturelle : si l'on savait que T^q était un courant laminaire, les directions de Fatou seraient données par les directions tangentes aux disques subordonnés à T^q . Par conséquent, le candidat naturel pour la famille des sous espace de Fatou dans le cas général est donné par la famille des sous espaces tangents à T^q , donnée par sa représentation intégrale (introduite au §1.1) Il s'agit donc de comprendre comment la dynamique agit sur ces sous espaces, et (idéalement) d'estimer leur dimension⁵.

Soient donc f et q comme dans le théorème. Sur J_q , le courant T^q induit un champ mesurable df_* -invariant de sous espaces \mathcal{T}^q , définis en σ_{T^q} -presque tout x par $\mathcal{T}_x^q = \text{Span}(t_{T^q}(x))$. En particulier $\dim \mathcal{T}_x^q \geq k - q$, avec égalité si et seulement si T^q est décomposable en x . Le théorème 2.2.2 est alors une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.2.3

Soient f , q , T , \mathcal{T}^q comme ci-dessus. Alors pour σ_{T^q} -p.t. $x \in J_q \setminus J_{q+1}$, si $v \in \mathcal{T}_x^q$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(v)\| \leq 0.$$

En particulier $\mathcal{T}_x^q \subset \mathcal{F}_x$, et \mathcal{F}_x est de dimension au moins $k - q$ en x .

5. C'est une idée qui était certainement présente dès l'introduction des courants en dynamique holomorphe, mais qui est à ma connaissance utilisée effectivement pour la première fois.

Nous donnons dans [D_{FATOU}] deux preuves de ce résultat : l'une, étonnamment simple mais peu parlante, est reproduite ici. L'autre, géométrique, ne fonctionne que pour $k = 2$ et $q = 1$ mais a le mérite de bien montrer comment les vecteurs tangents à $f^{-n}(L)$ (L une droite générique) approchent ceux de T hors de $\text{Supp}(\mu_f)$.

Démonstration. Nous supposons pour simplifier que $k = 2$ et $q = 1$, mais la preuve s'adapte au cas général. D'après le théorème 1.1.1, T est décomposable p.p. hors de $J_2 = \text{Supp}(T \wedge T)$, donc $\mathcal{T}^1|_{J_1 \setminus J_2}$ est un champ mesurable de droites complexes. Soit N un voisinage de J_2 . Soit $x \in J_1 \setminus J_2$ un point σ_T générique et $v \in \mathcal{T}_x^1$ un vecteur unitaire. Alors on a

$$\begin{aligned} \|df_x^n(v)\|^2 &\leq \text{trace}((df_x^n)_*(iv \wedge \bar{v})) = \text{trace}((df_x^n)_*(t_T(x))) \\ &= \langle (df_x^n)_*(t_T(x)), \omega(f^n(x)) \rangle = \langle t_T(x), (df_x^n)^*\omega(f^n(x)) \rangle, \end{aligned}$$

d'où en intégrant il vient

$$\int_{N^c} \|df_x^n|_{\mathcal{T}_x^1}\|^2 \sigma_T(x) \leq \int_{N^c} \langle t_T(x), (df_x^n)^*\omega(f^n(x)) \rangle \sigma_T(x) = \int_{N^c} T \wedge (f^n)^*\omega. \quad (2.11)$$

Si l'on sait montrer que cette suite d'intégrales est uniformément bornée, alors par l'inégalité de Markov, on déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_T \left(\left\{ x, \|df_x^n|_{\mathcal{T}_x^1}\|^2 \geq n^2 \right\} \right) < \infty,$$

d'où par le lemme de Borel-Cantelli on sort que pour presque tout $x \in J_1 \setminus J_2$, pour n assez grand on a $\|df_x^n|_{\mathcal{T}_x^1}\|^2 \leq n^2$, ce qui implique la proposition.

Pour contrôler l'intégrale de droite dans (2.11), on utilise une petite astuce qui est bien utile pour caractériser les supports de certains courants (par exemple pour montrer que $\text{Supp}(T) = J$) et qui interviendra à plusieurs reprises dans ce mémoire. On rappelle que pour construire le courant de Green, on écrit $\frac{1}{d}f^*\omega = \omega + dd^c g_0$, d'où en posant $g_n = \sum_{i=0}^{n-1} g_0 \circ f^i$ on obtient $d^{-n}(f^n)^*\omega = \omega + dd^c g_n$ et $T = \omega + dd^c g$, où $g = \lim g_n$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \int_{N^c} T \wedge (f^n)^*\omega &\leq \int \chi T \wedge (f^n)^*\omega \text{ où } \chi \text{ est une fonction plateau telle que } \chi = 0 \text{ sur } N \\ &= \int \chi T \wedge ((f^n)^*\omega - T) \text{ car } T^2 = 0 \text{ hors de } N \\ &= d^n \int \chi T \wedge dd^c(g_n - g) \\ &= d^n \int (g_n - g) T \wedge dd^c \chi \\ &= O(1) \text{ car } |g_n - g| = O\left(\frac{1}{d^n}\right), \end{aligned}$$

ce qui était l'estimation voulue. □

On a vu au théorème 1.1.1 qu'en fait T est décomposable p.p. dès que $T \wedge T$ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. [BeDu] ont montré que $T \wedge T$ est absolument continue si et seulement si f est une application de Lattès (i.e. un quotient d'une application linéaire sur un tore complexe). Ainsi, à l'exception de cette famille d'exemples, T est toujours décomposable p.p., y compris sur J_2 . On peut alors pousser un peu plus loin l'analyse

précédente et montrer que le taux de croissance de l'action de f^n sur les vecteurs tangents de T y est majoré par $\frac{\log d}{2}$. Si l'on combine ceci avec les bornes sur les exposants de μ_f , on obtient le joli corollaire suivant, qui est sorte une version de codimension 1 du cas d'égalité dans l'inégalité de Ruelle.

Proposition 2.2.4

Soit f un endomorphisme de \mathbb{P}^2 de degré d . Si $\mu_f \ll \sigma_T$ alors μ_f admet un exposant minimal, c'est à dire égal à $\frac{\log d}{2}$.

Nous ne savons pas si la réciproque est vraie, ni s'il est possible de caractériser les applications telles que $\mu_f \ll \sigma_T$, dans l'esprit du théorème de Berteloot-Dupont.

2.2.3. Expansion dans la direction transverse

On sait maintenant qu'il y a pour σ_{T^q} -presque tout point de $J_q \setminus J_{q+1}$ il existe un sous espace de Fatou $\mathcal{F}_x \subset T_x \mathbb{P}^k$ de dimension au moins $k - q$. De manière assez surprenante, la difficulté principale est de montrer qu'il n'y a pas *trop* de directions de Fatou, c'est à dire que la dimension est exactement $k - q$. Même lorsque $q = 1$, où il s'agit simplement de montrer que $\mathcal{F}_x \neq T_x \mathbb{P}^k$, et même si l'on sait que $\text{Supp}(T) = J$, il n'est pas du tout évident de démontrer que *ponctuellement*, \mathcal{F}_x est un sous espace strict.

La stratégie pour montrer que $\dim(\mathcal{F}_x) = k - q$ est de montrer la deuxième moitié de la conjecture 2.2.1, c'est à dire que si $V \subset T_x \mathbb{P}^k$ est un sous espace linéaire générique de dimension q , alors pour tout $v \in V$, $\limsup \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v)\| \geq \log d/2$ (strictement positif suffirait). Cela interdit bien sûr à \mathcal{F}_x d'être de dimension $> k - q$. Pour cela, on utilise les méthodes présentées dans la section précédente (en particulier l'étude du courant T^- en petit degré topologique §2.1.7), qui ont été introduites pour la première fois dans ce contexte par De Thélin [dT3]. On rappelle que les mesures considérées ici ne sont pas invariantes, donc contrairement aux résultats de la section 2.1 il semble difficile d'envisager une approche qui reposerait sur des méthodes de théorie ergodique.

L'idée est que si L est un sous espace linéaire de \mathbb{P}^k de dimension q , si l'on peut montrer par un argument géométrique que la dérivée de f^n dans tous les vecteurs contenus dans la direction de L est génériquement $\gtrsim d^{n/2}$ (relativement à la mesure $T^q \wedge [L]$), alors par la "formule de Crofton" $\sigma_{T^q} = \int T^q \wedge [L] dL$, en moyennant sur l'ensemble des L on obtiendra le résultat voulu⁶.

Considérons d'abord le cas où $q = 1$, qui est tout à fait similaire à ce que nous avons fait au §2.1.7. Nous devons montrer que si L est une droite générique, alors pour tout ε il y a un ensemble $A_{n,\varepsilon}$ tel que de $(T \wedge [L])(A_{n,\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$ tel que si $x \in A_{n,\varepsilon}$, la dérivée df_x^n dilate les vecteurs tangents à L d'un facteur au moins $C(\varepsilon)d^{n/2}$. Noter que $(f^n)_*$ envoie $T \wedge [L]$ sur $T \wedge \frac{1}{d^n}[f^n(L)]$ et que pour L générique, $f^n|_L$ est injective. Posons $L_n = f^n(L)$ et $L_n[r]$ la partie de L_n qui est de géométrie bornée à l'échelle r . Plus précisément, $x \in L_n[r]$ si L_n contient un graphe passant par x de diamètre borné par une constante D fixée une fois pour toutes, au dessus un disque de taille r dans $T_x L_n$ (relativement à la projection orthogonale sur $T_x L_n$). La constante D peut être fixée à $1/10$ du diamètre de \mathbb{P}^k et on considère toujours $r \ll D$. Nous n'interdisons pas à L_n d'avoir plusieurs composantes en x .

6. Un point un peu subtil ici est que la direction d'expansion pour $T^q \wedge [L]$ dépend de L , alors qu'au final on veut expansion dans presque toutes les directions pour presque tout point. En réalité il faut donc un peu plus que ce simple argument de moyenne, mais cela marche de la même façon.

Le théorème 1.2.5 dit que pour r assez petit, $L_n[r]$ est d'aire prépondérante dans L_n . Mieux, comme T est à potentiels continus, la théorie de l'intersection géométrique dit que $T \wedge \frac{1}{d^n}[L_n[r]]$ est de masse prépondérante dans $T \wedge \frac{1}{d^n}[L_n]$. On applique alors une version adaptée du lemme 2.1.22 pour conclure que l'estimation attendue pour l'expansion est satisfaite. Rappelons que l'idée de ce lemme est de ne garder de $T \wedge \frac{1}{d^n}[L_n[r]]$ que les composantes (disques de géométrie bornée de taille r) telles que $\text{Aire}(f_{-n}(\Delta)) \lesssim d^{-n/2}$, et de montrer que la partie que l'on a éliminée est de masse négligeable. La figure 2.2 en donne une représentation imagée.

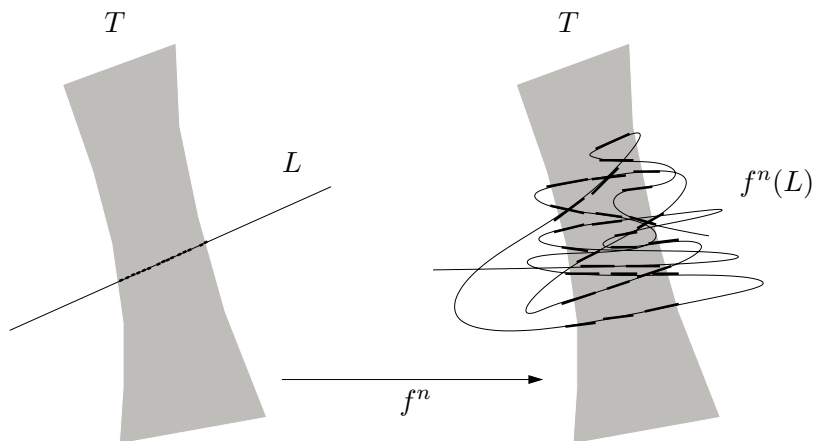


FIGURE 2.2 – Quelques disques de géométrie bornée et leurs préimages par f^n

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.2.5

Pour σ_T presque tout x , pour presque tout $v \in T_x \mathbb{P}^k$, on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v)\| \geq \frac{\log d}{2}$.

Comme expliqué plus haut, le théorème borne également la dimension du sous espace de Fatou.

Corollaire 2.2.6

La conjecture 2.2.1 est vraie pour $q = 1$.

En codimension supérieure, on cherche bien sûr à appliquer la même méthode. Cette fois, L est un sous espace linéaire générique de codimension q , et avec les mêmes notations que précédemment $(f^n)_*(T^q \wedge [L]) = d^{-nq} T^q \wedge [L_n]$. D'après le théorème 1.2.5, on sait ici encore que $L_n[r]$ est d'aire prépondérante dans L_n (on peut même démontrer que l'estimée (1.5) est satisfaite, i.e. $\mathbf{M}(L_n \setminus L_n[r]) \leq Cr^2$ [D_{FATOU}, Thm 4.3]). Malheureusement, je n'ai pas été capable de montrer en toute généralité que que l'intersection $T^q \wedge d^{-nq}[L_n]$ est asymptotiquement portée par la partie de géométrie bornée de L_n (voir aussi la discussion à la fin du §1.2.4). Nous allons donc admettre ce résultat pour le moment et montrer que cette information est suffisante pour conclure.

Posons en effet l'hypothèse (un peu plus faible) suivante :

(H_q) Pour presque tout sous espace linéaire L de dimension q (au sens de la mesure de Haar), il existe une suite à décroissance sous-exponentielle (r_n) telle que

$$\mathbf{M} \left(\frac{1}{d^{nq}} T^q \wedge [(f^n L)[r_n]] \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.12)$$

On a alors :

Théorème 2.2.7

Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k satisfaisant l'hypothèse (H_q). Alors pour σ_{T^q} -presque tout x et presque tout sous espace vectoriel $V \subset T_x \mathbb{P}^k$, si $v \in V$ est un vecteur non-nul, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v)\| \geq \frac{\log d}{2}. \quad (2.13)$$

Corollaire 2.2.8

Si (H_q) est satisfaite, alors pour σ_{T^q} presque tout $x \in J_q \setminus J_{q+1}$, le sous espace de Fatou est de codimension q .

Ainsi la conjecture 2.2.1 est satisfaite en codimension q . De plus le courant T^q est décomposable p.p. sur $J_q \setminus J_{q+1}$, puisque $\text{Span}(t_{T^q}(x)) \subset \mathcal{F}_x$.

La démonstration du théorème 2.2.7 suit le même schéma que précédemment, mais avec quelques difficultés supplémentaires. La plus évidente est qu'en dimension $q > 1$ l'aire ne contrôle plus le diamètre. Ainsi, il ne s'agit plus de jeter les composantes Δ telles que l'aire de $f_{-n}(\Delta)$ est trop grande, mais celles violant une certaine condition intégrale. Pour contrôler le diamètre de $f_{-n}(\Delta)$, on adapte alors une méthode de Dinh et Sibony [DS1] basée sur un argument de slicing et le théorème de Sibony-Wong [SW]. Une deuxième difficulté se situe dans l'estimation de la masse relativement à la mesure $T^q \wedge d^{-nq}[f^n(L)]$ des composantes que l'on a supprimées. Nous n'entrerons pas dans les détails.

Ces résultats soulèvent naturellement le problème de la vérification pratique de l'hypothèse (H_q). Nous montrons dans [D_{FATOU}, Thm 4.8] qu'elle est satisfaite dans le bassin d'un attracteur (en un sens faible) algébrique de dimension q . Il paraît raisonnable qu'elle sera également satisfaite sous des hypothèses de type Axiome A. Pour le cas général, il faudra vraisemblablement envisager une approche mêlant considérations géométriques et dynamiques, mais le problème semble extrêmement délicat.

2.3. Autres travaux

2.3.1. Automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2

Nous allons ici brièvement exposer certains des résultats que nous avons obtenus dans [D_{CONNEX}] et [D_{LYAP}]. Le cadre ici est celui des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Nous considérons donc un automorphisme $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, *régulier* au sens de Sibony, c'est à dire que si on le voit comme une application birationnelle de \mathbb{P}^2 , on a $I(f) \cap I(f^{-1}) = \emptyset$. D'après les travaux de Friedland et Milnor [FM], f est alors conjuguée à un produit d'applications de Hénon $(z, w) \mapsto (aw + p(z), az)$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et p est un polynôme. Nous normalisons f de sorte que $I(f) = [0 : 1 : 0]$ et $I(f^{-1}) = [1 : 0 : 0]$ (ici les coordonnées homogènes sont $[z : w : t]$ et la droite à l'infini est $t = 0$). Quitte à changer f en f^{-1} on pourra supposer que $|\text{Jac}(f)| \leq 1$.

Une telle application vérifie les conclusions du théorème 2.1.2 (c'est dans ce cadre un résultat de [BLS1, BLS2] , mais la compréhension de la dynamique est bien sûr beaucoup plus fine dans ce cas.

On pose classiquement $K^\pm = \{p \in \mathbb{C}^2, f^{\pm n}(p) \text{ est bornée}\}$, $J^\pm = \partial K^\pm$, $K = K^+ \cap K^-$ et $J = J^+ \cap J^-$. Dans un article fondamental, Bedford et Smillie [BS6] étudient les propriétés de connexité de J . Ils montrent qu'en de nombreux aspects, la dichotomie J connexe/ J non connexe, est similaire à sa variante, plus familière, associée aux polynômes d'une variable complexe.

L'objet principal de l'article [D_{CONNEX}] est de donner une nouvelle condition suffisante de connexité pour J et de simplifier et d'étendre certains résultats de [BS6]. Nous ne nous attarderons pas sur cet aspect ici, et mettrons plutôt l'accent sur certains résultats en rapport avec la géométrie des courants invariants.

Si $\mathbb{B} = D(0, R)^2$ est un bidisque suffisamment grand, alors $K \subset B$ et $f|_B$ est une "application d'allure Hénon", c'est à dire qu'à l'échelle de B elle dilate la direction horizontale et contracte la verticale (voir le §2.3.2 pour une définition précise). Il est classique que les courants invariants T^\pm sont extrémaux dans \mathbb{C}^2 [FS3] (i.e. ce sont des points extrémaux du cône des courants positifs fermés).

Nous montrons dans [D_{CONNEX}] que l'on a une dichotomie pour l'extrémalité T^- dans \mathbb{B} qui suit celle de la connexité de J .

Théorème 2.3.1

Soit f un automorphisme régulier de \mathbb{C}^2 tel que $|\text{Jac}(f)| \leq 1$ et \mathbb{B} comme ci dessus. Alors on a

$$T^-|_{\mathbb{B}} \text{ extrémal} \Leftrightarrow J \text{ connexe.}$$

De plus si J n'est pas connexe, $T^-|_{\mathbb{B}}$ est l'intégrale d'une famille disjointe de sous variétés globales dans \mathbb{B} , $T^-|_{\mathbb{B}} = \int [V_\alpha] d\nu(\alpha)$.

La deuxième assertion du théorème peut sembler être une simple propriété technique; néanmoins elle signifie que quand J n'est pas connexe, la géométrie globale de T^- est très bien comprise, ce qui est une information précieuse dans de nombreux problèmes.

Cette décomposition apparaît par exemple comme un ingrédient technique crucial du théorème suivant, qui est le résultat principal de [D_{LYAP}].

Théorème 2.3.2

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe d'automorphismes réguliers de degré d . Alors les exposants de Lyapunov $\chi^\pm(\lambda)$ de la mesure d'entropie maximale μ_λ sont des fonctions continues de λ .

Le même résultat vaut lorsque (f_λ) est une famille holomorphe d'automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 de degré d qui dégénère sur un polynôme de dimension 1.

Il serait inutilement fastidieux de préciser ici ce qu'est en toute généralité une famille dégénérant sur un polynôme de dimension 1. Un exemple représentatif est la famille des applications de Hénon $(aw + p(z), az)$ lorsque a tend vers 0. Noter que nous ne faisons pas d'hypothèse⁷ sur le polynôme limite p .

C'est un résultat intéressant à plusieurs titres. D'abord, la continuité des exposants de Lyapunov est une thématique qui a été étudiée dans de nombreux contextes. En dimension 1, l'exposant de Lyapunov s'exprime comme l'intégrale $\int \log |f'_\lambda| d\mu_\lambda$, donc pour étudier ses propriétés de continuité, il suffit de montrer la continuité de $\lambda \mapsto \mu_\lambda$ dans une topologie appropriée⁸. Il en va de même lorsqu'on veut comprendre la somme des exposants en dimension supérieure (voir [DS6, §2.5] ou [Ph]).

Une telle approche n'est pas possible en revanche pour étudier les exposants individuels, puisque leur calcul fait intervenir les directions stables et instables du théorème d'Oseledets. Pour citer un exemple "bidimensionnel", dans le cadre des produits aléatoires de matrices dans $SL(2, \mathbb{C})$ (voir ci après le §3.3 pour une introduction à cette thématique), la continuité des exposants de Lyapunov a été obtenue par Furstenberg [Fur1] pour les paramètres génériques, et tout récemment par Bocker et Viana en toute généralité [BV]. La démonstration repose sur une compréhension fine de la famille des directions stables et instables.

Par ailleurs, la continuité de l'exposant de Lyapunov pour les familles d'applications rationnelles est un point important de l'étude des courants de bifurcation (voir le chapitre suivant). Il est vraisemblable qu'il en sera de même dans une "théorie" (pour l'instant hypothétique) des courants de bifurcation pour les automorphismes de \mathbb{C}^2 .

La démonstration de ce théorème repose sur une formule de Bedford et Smillie [BS5] qui exprime χ^+ comme une intégrale faisant intervenir les *points critiques instables*, qui sont les points critiques de la fonction G^+ restreinte aux variétés instables de Pesin (i.e. les feuilles de T^-). Cette formule généralise la formule de Manning-Przytycki-Sibony [Mann, Pr, Sib1]

$$\chi^+(f_\lambda) = \log d + \sum_{c \text{ critique}} G_\lambda(c), \quad (2.14)$$

pour les polynômes unitaires d'une variable. L'idée de notre démonstration est de montrer que la formule de Bedford et Smillie varie continûment dans l'espace des paramètres. Pour cela, il faut une bonne compréhension de la famille des points critiques, qui sont *grosso modo*

7. En général, les petites perturbations des polynômes d'une variable dans les applications de Hénon sont étudiées sous des hypothèses d'hyperbolicité pour p

8. Pour les familles de fractions rationnelles de \mathbb{P}^1 , la continuité de l'exposant de Lyapunov de la mesure d'entropie maximale est un théorème originellement dû à Mañé [Mañé], et qui a été redémontré par plusieurs auteurs.

les “tangences verticales” des feuilles de T^- . C’est justement ce que permet la décomposition de T^- fournie par le théorème 2.3.1.

De même, pour la deuxième moitié du théorème, il faut comprendre en quel sens la formule de Bedford et Smillie dégénère sur la formule (2.14) quand le jacobien tend vers 0 (T^- converge alors vers un courant d’intégration). Ceci nécessite un contrôle précis de la géométrie du courant T^- lorsque celui ci dégénère sur un courant d’intégration. C’est encore une fois la décomposition de T^- qui permet cette analyse. Noter qu’on obtient ainsi des informations sur la géométrie des petites perturbations des polynômes d’une variable, sans hypothèse d’hyperbolicité.

◇

Nous terminons ce paragraphe par le joli énoncé suivant, tiré de [D_{CONNEX}], qui est une généralisation 2-dimensionnelle d’un résultat bien connu pour les polynômes d’une variable.

Théorème 2.3.3

Soit f un automorphisme régulier de \mathbb{C}^2 tel que $|\text{Jac}(f)| \leq 1$. Si J est connexe et f est uniformément hyperbolique sur J alors f possède des cycles attractifs.

On obtient en particulier une nouvelle preuve du résultat suivant de Bedford et Smillie [BS7, Cor. 5.9] :

Corollaire 2.3.4

Sous les hypothèses du théorème, $|\text{Jac}(f)| < 1$.

La preuve n’a rien à voir avec ce qui précède, et repose sur un théorème de Brunella [Bru] affirmant qu’un tel automorphisme ne peut jamais préserver un feuilletage holomorphe singulier de \mathbb{P}^2 .

A l’inverse, les résultats de [D_{CONNEX}] suggèrent la conjecture suivante :

Conjecture 2.3.5

Soit f un automorphisme régulier de \mathbb{C}^2 tel que $|\text{Jac}(f)| \leq 1$, uniformément hyperbolique sur J . Si f ne possède aucun cycle attractif, alors J est un ensemble de Cantor.

2.3.2. Spectre des vitesses d’échappement à l’infini

Soit f une application polynomiale dans \mathbb{C}^2 , pour laquelle l’infini est attirant. Si f admet un prolongement holomorphe à \mathbb{P}^2 , Bedford et Jonsson ont analysé dans [BJ] la structure du courant de Green au voisinage de la droite à l’infini L_∞ . La droite L_∞ est dans ce cas un attracteur, et la dynamique induite $f|_{L_\infty}$ est une application rationnelle de degré $d = \deg(f)$. Ainsi la mesure d’équilibre de $f|_{L_\infty}$ est pour f admet une mesure selle μ_∞ , admettant un exposant positif dans la direction de L_∞ et un exposant égal à $-\infty$ transversalement.

Les auteurs montrent alors que la restriction de T au bassin de L_∞ est laminaire, les feuilles étant des variétés stables de Pesin pour μ_∞ , mesure qui joue le rôle de mesure transverse pour $T|_{\text{Bassin}(L_\infty)}$.

Dans [DDS], en collaboration avec Tien Cuong Dinh et Nessim Sibony, nous étudions la situation où il y a un ensemble d’indétermination $I(f) = \{I_1, \dots, I_m\} \subset L_\infty$ constitué de

$m \geq 2$ points, et $f(L_\infty \setminus I(f))$ est un point $q_\infty \notin I(f)$. Nous étudions la structure du courant de Green (qui existe bien dans ce cas car f est 1-stable [Sib2]) dans le bassin de l'infini et mettons en évidence un phénomène nouveau : la possibilité de l'existence d'un *continuum de vitesses d'échappement vers l'infini*.

Soyons plus précis. Si $p \in \mathbb{C}^2$ est un point s'échappant vers l'infini, sa *vitesse d'échappement*, est le nombre $\bar{\ell}(p)$ défini par $\log \bar{\ell}(p) = \limsup \frac{1}{n} \log^+ \log^+ \|f^n(p)\|$. Si la limsup est une limite on note simplement $\ell(p)$ la vitesse. Il est facile de voir que si $(f^n(p))$ tend vers q_∞ , $\ell(p) = d$.

On suppose qu'en chaque point d'indétermination I_i est définie une vitesse locale $\ell_i \geq 1$, au sens où il existe des constantes C_1, C_2 , et des voisinages $V(I_i)$ and $V(q_\infty)$ tels que

$$\text{pour tout } p \in V(I_i) \text{ tel que } f(p) \notin V(q_\infty), \quad C_1 \|p\|^{\ell_i} \leq \|f(p)\| \leq C_2 \|p\|^{\ell_i}.$$

Noter que certains ℓ_i peuvent être égaux à 1. L'infini étant supposé attirant, on aura dans ce cas $C_1 > 1$.

Nous montrons dans [DDS] le résultat suivant :

Théorème 2.3.6

Sous les hypothèses précédentes,

i. l'ensemble des vitesses d'échappement vers l'infini est $[\min \ell_i, \max \ell_i] \cup \{d\}$;

ii. pour σ_T presque tout point dans le bassin de l'infini, $\ell(p)$ existe et vaut $\ell(p) = \prod_{i=1}^m \ell_i^{\frac{d_i}{d}}$.

Voici un exemple où ceci se produit, et dont l'étude a motivé nos travaux. Posons $f(z, w) = (z^\gamma(w - z)^\delta, w^\alpha + z^\beta)$, avec $\gamma + \delta > \beta > \alpha \geq 2$. Alors $\deg(f) = \gamma + \delta$, $I(f) = \{I_1, I_2\}$, avec en coordonnées homogènes $[z : w : t]$, $I_1 = [0 : 1 : 0]$ et $I_2 = [1 : 1 : 0]$, et $f(L_\infty \setminus I) = q_\infty = [1 : 0 : 0]$. On voit facilement que $d_1 = \gamma$ et $d_2 = \delta$. Il est un peu plus délicat de montrer que $\ell_1 = \alpha$ et $\ell_2 = \beta$. Ainsi pour cet exemple, le spectre des vitesses est $[\alpha, \beta] \cup \{\gamma + \delta\}$.

Le théorème 2.3.6 repose sur le formalisme des applications d'allure horizontale, que j'avais développé au cours de ma thèse [D_{HL}]. Soit B un bidisque ouvert dans \mathbb{C}^2 et notons $\partial_v B$ et $\partial_h B$ les portions respectivement verticale et horizontale du bord. Soient maintenant B_1 et B_2 deux bidisques et f une application méromorphe dominante définie au voisinage de $\overline{B_1}$ et telle que $f(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. On dit que (f, B_1, B_2) est une *application d'allure horizontale* si

i. f n'a pas de point d'indétermination dans $\partial_v B_1$ et $f(\partial_v B_1) \cap \overline{B_2} = \emptyset$;

ii. $f(\overline{B_1}) \cap \partial B_2 \subset \partial_v B_2$.

C'est une généralisation de la notion d'application d'allure polynomiale, qui a été inspirée par la définition des *applications croisées* de Hubbard et Oberste-Vorth [HO2]. On peut également autoriser B_1 et B_2 à être seulement des ouverts biholomorphes à des bidisques. La caractéristique la plus importante de ces applications est qu'on peut définir leur action sur les courants positifs fermés par transformée de graphe : f^* agit sur les courants verticaux, et f_* sur les courants horizontaux. Rappelons qu'un courant T dans un bidisque B est vertical (resp. horizontal) si son support l'est, i.e. $\text{Supp}(T) \cap \partial_v B = \emptyset$ (resp. $\text{Supp}(T) \cap \partial_h B = \emptyset$).

Une sous variété horizontale V dans B admet un degré qui est le degré de la première projection $\pi_1|_V$. On peut ainsi définir le *degré* d'une application d'allure horizontale comme le degré de l'image d'une droite horizontale générique. Ce sera aussi le degré (vertical) de la préimage d'une droite verticale.

Revenons à nos applications polynomiales dans \mathbb{C}^2 . L'observation fondamentale est la suivante :

Proposition 2.3.7

Il existe une famille de bidisques $B_i \ni I_i$ (dont la direction verticale est transverse à L_∞), contenus dans le bassin de l'infini, et des entiers d_i tels que $\sum d_i = d$, et tels que pour tout couple (i, j) , $f_{i,j} = (f, B_i, B_j)$ définit une application d'allure horizontale de degré d_i .

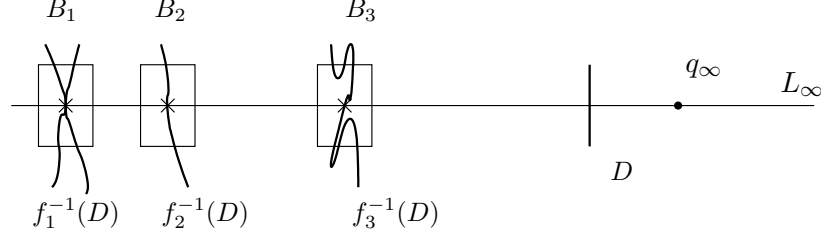


FIGURE 2.3 – Image réciproque d'un disque D transverse à L_∞ , avec $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ et $d_3 = 3$

On en déduit que si le point $p \in \mathbb{C}^2$ s'échappe vers l'infini sans converger vers q_∞ , il admet un itinéraire symbolique $\alpha(p) \in \Sigma$, où l'on a noté $\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$ l'espace des symboles. Soit \mathcal{K} le complémentaire du bassin d'attraction de q_∞ ; le support de T est contenu dans \mathcal{K} . On pose alors pour $\alpha \in \Sigma$,

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ p \in \bigcup B_i, \alpha(p) = \alpha \right\}$$

l'ensemble des points d'itinéraire α . Il est aisé de voir que pour tout α , \mathcal{K}_α est un fermé vertical non vide dans $B_{\alpha(0)}$. De cela, on tire facilement que l'ensemble des vitesses d'échappement possibles pour les points de \mathcal{K} est $[\min \ell_i, \max \ell_i]$, d'où la première assertion du théorème 2.3.6.

Soit ν la mesure autosimilaire sur Σ qui donne masse $\frac{d_i}{d}$ au cylindre des suites commençant par $\{i\}$. Si $\alpha \in \Sigma$, on note $i\alpha$ la suite concaténée $(i, \alpha_0, \alpha_1, \dots)$.

Théorème 2.3.8

Pour ν -presque tout α , \mathcal{K}_α porte un courant positif fermé naturel T_α . Les courants T_α vérifient la relation d'équivariance $f^*T_\alpha|_{\bigcup B_i} = \sum_i d_i T_{i\alpha}$, et le courant de Green se décompose en

$$T = \int_{\Sigma} T_\alpha d\nu(\alpha). \quad (2.15)$$

Nous expliquerons dans un instant ce que signifie le caractère "naturel" de T_α . La deuxième assertion du théorème 2.3.6 se déduit facilement de la décomposition (2.15) de T . En effet, si $p \in \mathcal{K}_\alpha$,

$$\ell(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ell_{\alpha_0} \cdots \ell_{\alpha_n})^{\frac{1}{n}},$$

pourvu que la limite existe. Par ailleurs, d'après le théorème de Birkhoff, cette suite converge pour ν presque tout α vers $\prod_{i=1}^m \ell_i^{\frac{d_i}{d}}$, d'où le résultat.

Si pour tout i , $d_i = 1$, toutes les applications d'allure horizontale $f_{i,j}$ sont de degré 1, d'où il suit que pour tout α , \mathcal{K}_α est un disque holomorphe transverse à L_∞ –c'est une situation comparable à celle considérée par Yamagishi [Y]. Le courant T est alors uniformément laminaire dans $\bigcup B_i$. Dans le cas général on ne sait pas si T admet une structure laminaire, mais on peut donner des informations sur le compact \mathcal{K}_α .

Théorème 2.3.9

- i. Si $\prod_{i=1}^m \left(\frac{\ell_i}{d_i}\right)^{\frac{d_i}{d}} > 1$, alors pour ν -presque tout α , \mathcal{K}_α est pluripolaire.
- ii. Si $\prod_{i=1}^m \left(\frac{\ell_i}{d_i}\right)^{\frac{d_i}{d}} < 1$, alors pour ν -presque tout α , T_α est de potentiel continu hors de L_∞ .
- En particulier \mathcal{K}_α n'est pas pluripolaire.

Le cœur technique du théorème 2.3.8 consiste à établir des théorèmes de convergences pour des suites (essentiellement) arbitraires d'applications d'allure horizontale $\{(f_i, B_i, B_{i+1})\}_{i \geq 1}$, définies dans des chaînes abstraites de bidisques.. On note d_i le degré de f_i , et pour la simplicité, on suppose que la suite (f_i) prend ses valeurs dans un nombre fini d'applications. On considère l'opérateur de transformée de graphe \mathcal{L}_i , qui à un courant T vertical dans B_{i+1} associe le courant $\frac{1}{d_i}((f_i)^*T)|_{B_i}$.

Le problème est le suivant : étant donné une suite de courants verticaux T_i normalisés (en un sens que je ne préciserai pas ici), étudier la convergence de la suite $\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_i T_{i+1}$. C'est déjà un problème non trivial en dimension 1, lorsque les f_i sont des applications d'allure polynomiale (on demanderait ici que $f_i^{-1}(D_{i+1}) \Subset D_i$).

Dans le cas où l'on itère une seule application, inversible de surcroît, la convergence a été établie dans [DHL].

Nous montrons dans l'article plusieurs théorèmes de convergence de ce type, qu'il serait fastidieux de détailler ici. Nous étudions aussi les propriétés des courants limites, ce qui mène au théorème 2.3.9.

La démonstration du théorème 2.3.8 se fait alors comme suit. Soit S un courant positif fermé vertical lisse dans $\bigcup B_i$. Avec des notations évidentes, au voisinage de l'infini, on peut écrire

$$\frac{1}{d} f^* S = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{d} \mathcal{L}_i S,$$

d'où par itération

$$\frac{1}{d^k} (f^k)^* S = \sum_{\{\alpha(0), \dots, \alpha(k-1)\} \in \{1, \dots, m\}^k} \frac{d_{\alpha(0)} \cdots d_{\alpha(k-1)}}{d^k} \mathcal{L}_{\alpha(0)} \cdots \mathcal{L}_{\alpha(k-1)} S,$$

qui est une suite convergeant vers T . Nos théorèmes de convergence montrent que pour α hors d'un sous-ensemble au plus dénombrable de Σ , la suite $\mathcal{L}_{\alpha(0)} \cdots \mathcal{L}_{\alpha(k-1)} S$ converge, vers un courant qui sera noté T_α . L'existence de la décomposition $T = \int T_\alpha d\nu(\alpha)$ suit.

◇

Travaux ultérieurs. Ces théorèmes de convergence pour les suites d'applications d'allure horizontale ont été par la suite généralisés par Dinh, Nguyen et Sibony [DS4, DNS] en dimension supérieure. L'idée essentielle de la preuve (qui se trouvait déjà dans [DHL]), qui est de considérer des familles holomorphes de courants positifs fermés, et d'utiliser les propriétés de sous-harmonicité de telles familles, a été systématisée par Dinh et Sibony, devenant ainsi un rouage essentiel de la théorie des superpotentiels des courants de bidegré supérieur, développée dans [DS5, DS6].

Dans [V], Vigny étudie le spectre des vitesses de convergence vers l'infini dans un cas intermédiaire entre [BJ] et [DDS], et montre qu'il peut être réduit à un intervalle (i.e. sans "trou spectral").

La question de la détermination de la vitesse de convergence générique vers l'infini pour les applications polynomiales de \mathbb{C}^2 (qui est d dans notre cas) a été résolue par Favre et Jonsson [FJ1, FJ2] qui montrent que c'est une quantité algébrique qui peut se lire dans une bonne compactification de l'espace affine.

Chapitre 3

Courants de bifurcation

Ces dernières années, l'introduction de techniques de dynamique holomorphe à plusieurs variables (notamment la théorie des courants positifs) a permis de jeter un regard neuf sur les espaces de paramètres de systèmes dynamiques holomorphes (unidimensionnels).

Nous allons dans ce chapitre passer en revue nos contributions à ce sujet en devenir.

Nous nous intéressons dans un premier temps à une famille quelconque de fractions rationnelles de \mathbb{P}^1 , et construisons des courants associés aux bifurcations de cette famille. Ces courants apparaissent comme limites de sous variétés dynamiquement définies.

Dans le cas où cette famille est l'espace des polynômes d'un degré donné, ces techniques permettent de généraliser de manière assez élégante certains résultats qui n'étaient connus que pour la famille quadratique $\{z^2 + c, c \in \mathbb{C}\}$.

Nous considérons ensuite le cas d'une famille holomorphe de sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, qui est l'analogie du précédent dans le fameux "dictionnaire de Sullivan". Nous montrons que des courants de bifurcation peuvent y être définis en utilisant des idées probabilistes, et satisfont des propriétés analogues au cas rationnel.

3.1. Familles de fractions rationnelles

3.1.1. Généralités

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles $f_\lambda : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré $d \geq 2$, paramétrée par une variété complexe connexe Λ . Un *point critique marqué* est par définition une application holomorphe $c : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ telle que $f'_\lambda(c(\lambda)) = 0$ pour tout λ . Dans une famille holomorphe générale (f_λ) , les points critiques ne sont pas nécessairement marqués, néanmoins on peut toujours s'y ramener si besoin en faisant un revêtement ramifié de Λ . On notera avec un indice λ les objets dynamiques associés à f_λ : ensemble de Julia, mesure de Lyubich, etc.

Les célèbres travaux de Mañé-Sad-Sullivan [MSS], et indépendamment Lyubich [Ly2], montrent l'existence d'une décomposition

$$\Lambda = \text{Bif} \cup \text{Stab}$$

de l'espace des paramètres en un lieu de bifurcation (fermé) et un lieu de stabilité (ouvert) qui est similaire à la décomposition de Fatou-Julia de l'espace des phases.

Son existence est basée sur le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 (Mañé-Sad-Sullivan, Lyubich)

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles dans \mathbb{P}^1 de degré $d \geq 2$. Soit $\Omega \subset \Lambda$ un ouvert connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. les points périodiques de (f_λ) ne changent pas de nature (attractif, répulsif, indifférent) dans Ω ;
- ii. l'ensemble de Julia J_λ se déplace par un mouvement holomorphe ;
- iii. l'application $\lambda \mapsto J_\lambda$ est continue pour la topologie de Hausdorff ;
- iv. pour tous λ, λ' dans Ω , $f_\lambda|_{J_\lambda}$ est conjuguée à $f_{\lambda'}|_{J_{\lambda'}}$.

Si de plus les points critiques $\{c_1, \dots, c_{2d-2}\}$ sont marqués, ces conditions sont équivalentes à :

- v. pour $1 \leq i \leq 2d - 2$ la famille des applications méromorphes $(f_\lambda^n(c_i(\lambda)))_{n \geq 0}$ de Λ dans \mathbb{P}^1 , est normale.

Si $\Omega \subset \Lambda$ satisfait les conclusions de ce théorème, on dira que la famille (f_λ) est *stable* dans Ω (J -stable est une autre terminologie communément employée). On définit alors Stab comme la réunion de tous les ouverts de stabilité, et le lieu de bifurcation Bif comme étant son complémentaire.

Si l'on combine le théorème précédent avec le fait qu'il y a une borne uniforme sur le nombre de cycles non répulsifs, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1.2 (Mañé-Sad-Sullivan, Lyubich)

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ comme ci dessus. L'ouvert de stabilité Stab est dense dans Λ .

Si, par exemple, (f_λ) est la famille des polynômes de degré d ou des fractions rationnelles de degré d , on conjecture que $\lambda \in \text{Stab}$ si et seulement si tous les points critiques sont attirés par des cycles attractifs (*conjecture d'hyperbolicité*). Plus généralement, les travaux de C. McMullen et D. Sullivan [McMS] mènent à une description conjecturale des composantes lieu de stabilité dans n'importe quelle famille holomorphe (f_λ) (conjecture “no invariant line fields”), mais sa validité n'est connue dans *aucune* famille non-triviale d'applications rationnelles. Il s'agit là sans nul doute du problème le plus étudié et le plus important en dynamique holomorphe.

3.1.2. Le courant de bifurcation

C'est une observation classique que dans une famille holomorphe de systèmes dynamiques, les exposants de Lyapunov ont des propriétés de sous-harmonicité (cette idée joue par exemple un rôle important dans [He]). Dès les années 80, de nombreux auteurs font intervenir des idées de théorie du potentiel dans l'étude des espaces de paramètres en dynamique holomorphe, en particulier pour la famille quadratique.

L. DeMarco [DeM1, DeM2] systématise en quelque sorte cette idée en posant la définition suivante.

Proposition-Définition 3.1.3 (DeMarco)

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré $d \geq 2$. Pour tout λ , on note μ_λ sa mesure d'entropie maximale. Alors la fonction

$$\chi : \lambda \mapsto \chi(f_\lambda) = \int \log |f'_\lambda| d\mu_\lambda$$

est psh sur Λ .

Le courant de bifurcation T_{bif} de la famille (f_λ) est par définition $T_{\text{bif}} = dd^c \chi$.

Le bien-fondé de cette définition est justifié par le résultat suivant :

Théorème 3.1.4 (DeMarco)

Le support de T_{bif} est égal à Bif .

L'inclusion non-triviale dans ce théorème est le fait que $\text{Supp}(T_{\text{bif}}) \supset \text{Bif}$. La démonstration repose sur une formule reliant la dynamique des points critiques et l'exposant de Lyapunov (voir également la proposition 3.1.7 ci-après). De Marco montre que si la fonction χ est harmonique dans Ω , alors la dynamique des points critiques y est stable. On conclut que la famille est stable par le théorème 3.1.1.

Une fois construit le courant de bifurcation, il est naturel de se demander si ses puissances extérieures admettent une interprétation dynamique. G. Bassanelli et F. Berteloot se penchent sur cette question dans [BB1] et montrent que si $\lambda_0 \in \text{Supp}(T_{\text{bif}}^k)$, alors λ_0 est la limite d'une suite de paramètres pour lesquels f_λ admet k cycles indifférents. La caractérisation exacte du support de T_{bif}^k est une question intéressante sur laquelle nous reviendrons dans les paragraphes suivants.

3.1.3. Courant associé à un point critique marqué

Nous abordons maintenant certains résultats de [DF], un travail réalisé en collaboration avec Charles Favre. Considérons une famille holomorphe de fractions rationnelles comme ci-dessus, munie d'un point critique marqué $(f, c) = (f_\lambda, c(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$. On dit que le point critique

marqué est *passif* dans Ω si la famille $(f_\lambda^n(c(\lambda)))_{n \geq 0}$ y est normale, *actif* sinon (cette terminologie est due à C. McMullen). Il y a donc un lieu de bifurcation associé à (f, c) qui est le lieu d'activité du point critique.

Nous allons associer un courant de bifurcation à la donnée (f, c) . Il serait possible de le faire en prenant des relevés à $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ de la fonction de Green, dans l'esprit de [DeM1], mais il est plus satisfaisant de travailler de manière intrinsèque.

On pose $\widehat{\Lambda} = \Lambda \times \mathbb{P}^1$. La famille f_λ se relève en une application holomorphe $\widehat{f} : \widehat{\Lambda} \rightarrow \widehat{\Lambda}$ envoyant (λ, z) sur $(\lambda, f_\lambda(z))$. On note $\pi_1 : \widehat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ et $\pi_2 : \widehat{\Lambda} \rightarrow \mathbb{P}^1$ les projections naturelles. On pose également ω_{FS} la forme de Fubini-Study de \mathbb{P}^1 et $\widehat{\omega} = \pi_2^* \omega_{FS}$.

Proposition-Définition 3.1.5

Soit (f, c) une famille de fractions rationnelles de degré $d \geq 2$ avec un point critique marqué comme ci dessus. La suite de courants $d^{-n} \widehat{f}^{n*} \widehat{\omega}$ admet une limite \widehat{T} dans $\widehat{\Lambda}$.

Ce courant admet des potentiels locaux continus, donc on peut le restreindre à l'hyper-surface $\widehat{c} = \{(\lambda, c(\lambda)), \lambda \in \Lambda\}$. Le courant de bifurcation associé à (f, c) est par définition $(\pi_1)_*(\widehat{T}|_{\widehat{c}})$.

Le courant \widehat{T} "interpole" en quelque sorte les mesures d'équilibres des f_λ . On peut caractériser le support de T_c :

Théorème 3.1.6

Soit $(f, c) = (f_\lambda, c(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fractions rationnelles avec un point critique marqué c , et T_c son courant de bifurcation. Alors le support de T_c est égal au lieu d'activité de c .

Noter que le fait que c soit un point critique ne joue pas de rôle ici. On pourrait ainsi associer un courant de bifurcation à n'importe quel point variant de manière holomorphe et obtenir un résultat analogue.

Ici encore, le point délicat est de montrer que si Ω est un ouvert disjoint de $\text{Supp}(T_c)$, le point critique c est passif dans Ω , i.e. que la suite de fonctions $(f_\lambda^n(c(\lambda)))_{n \geq 0}$ y est équicontinue. Sans donner les détails de la preuve, il est intéressant de mentionner qu'elle utilise une idée similaire à celle que nous avons rencontrée page 36, basée sur l'estimée $|g_n - g| = O(d^{-n})$.

La proposition suivante, qui découle de la formule de DeMarco pour χ , fait le lien avec le courant T_{bif} du paragraphe précédent.

Proposition 3.1.7

Si la famille (f_λ) a tous ses points critiques marqués $\{c_1, \dots, c_{2d-2}\}$, alors $T_{\text{bif}} = \sum T_i$, où T_i est le courant associé au point critique c_i .

Une application classique du théorème de Montel montre que c est actif en λ_0 , il est approché par des paramètres pour lesquels c est périodique (resp. c tombe sur un cycle répulsif). Le premier résultat principal que nous obtenons dans [DF] est une version quantitative de ce résultat.

Dans Λ , si $n > m \geq 0$ sont des entiers on note $\text{Per}(n, m)$ la variété analytique définie par l'équation (non nécessairement réduite) $f_\lambda^n(c(\lambda)) = f_\lambda^m(c(\lambda))$. On supposera que pour tous m, n , $\text{Per}(n, m) \neq \Lambda$ (sinon le point critique est passif et il n'y a rien à dire). On pose $e \in \{0, 1\}$ le cardinal de l'ensemble exceptionnel d'une application f_λ générique. Si $e = 1$, f_λ est une famille de polynômes. Le cas $e = 2$ est exclu car la famille est alors triviale.

Théorème 3.1.8

Soit (f, c) une famille non triviale de fractions rationnelles de \mathbb{P}^1 de degré d avec un point critique marqué. On suppose que c n'est pas stablement préperiodique. On suppose en outre que l'hypothèse technique suivante est satisfaite :

(H) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe une courbe (immergée) $\Gamma \subset \Lambda$ contenant λ telle que le complémentaire de $\{\lambda, c(\lambda)\}$ est attiré par un cycle} est relativement compact dans Γ .

Alors pour toute suite $0 \leq k(n) < n$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\text{Per}(n, k(n))]}{d^n + d^{(1-e)k(n)}} = T_c$$

Selon toute vraisemblance, l'hypothèse globale (H) ne devrait pas être réellement nécessaire.

Si f_λ est la famille quadratique (avec $c(\lambda) = 0$), on obtient l'équidistribution des centres des composantes de l'ensemble de Mandelbrot, un résultat qui avait auparavant été obtenu –sans que nous le sachions à l'époque– par Levin [Lev] et McMullen [McM1].

Comme les variétés $\text{Per}(n)$ et $\text{Per}(n, k)$ ont en général beaucoup de composantes irréductibles, (par exemple $\text{Per}(n - k) \subset \text{Per}(n, k)$), et qu'on ne contrôle pas les multiplicités, le théorème n'implique pas directement que T_c est approché par des paramètres où c est réellement préperiodique (ce dont nous aurons besoin par la suite). Pour s'en assurer on va utiliser une petite astuce basée sur le fait que T_c ne charge pas les courbes.

Posons $\text{Preper}(n, k) \subset \text{Per}(n, k)$ l'adhérence de l'ensemble des paramètres tels que c est strictement préperiodique.

Corollaire 3.1.9

Sous les hypothèses du théorème, si $k \geq 1$ est fixé on a

$$\frac{1}{d^n + d^{(1-e)(n-k)}} [\text{Preper}(n, n - k)] \rightarrow T_c.$$

Démonstration. $[\text{Per}(n, n - k)] - [\text{Preper}(n, n - k)] = [D_n]$ est une suite de diviseurs effectifs portés par $\text{Per}(k)$. Si le résultat du corollaire n'avait pas lieu, T_c chargerait $\text{Per}(k)$, ce qui est absurde. \square

Voici un argument qui permet de se convaincre du bien-fondé du théorème 3.1.8, mais que nous n'avons pas su rendre rigoureux. Pour chaque λ , les points (pré-)périodiques s'équidistribuent selon μ (le cas préperiodique, moins connu, se trouve dans [Ly1]). De cela, on "déduit" que dans $\Lambda \times \mathbb{P}^1$, la suite de courants d'intégration sur les hypersurfaces

$$\left\{ (\lambda, z) \in \Lambda \times \mathbb{P}^1, f_\lambda^n(z) = f_\lambda^{k(n)}(z) \right\},$$

convenablement normalisés, converge vers \hat{T} . En restreignant cette convergence au graphe \hat{c} (c'est là bien sûr le point qui pose réellement problème), on obtient le résultat voulu.

La véritable démonstration du théorème repose sur un argument de théorie du potentiel, et n'est pas sans rappeler celle du théorème de Brolin [Bro]. Un des arguments basé sur le principe du maximum requiert une certaine hypothèse de compacité qui mène à l'hypothèse (H).

3.1.4. Autres résultats, remarques et questions

Bassanelli et Berteloot ont étudié dans [BB2, BB3] la distribution des paramètres admettant un point périodique de multiplicateur donné. Plus précisément, soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fractions rationnelles et pour $w \in \mathbb{C}$, notons $\text{Per}_n(w)$ l'hypersurface des paramètres admettant un cycle de longueur n et de multiplicateur w . Ils obtiennent les résultats suivants (noter que *i.* et *ii.* ne nécessitent pas d'hypothèse sur Λ) :

Théorème 3.1.10 (Bassanelli-Berteloot)

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d .

i. $\frac{1}{d^n} [\text{Per}_n(0)] \rightarrow T_{\text{bif}}$;

ii. $\frac{1}{d^n} \int [\text{Per}_n(e^{i\theta})] d\theta \rightarrow T_{\text{bif}}$;

iii. pour presque tout $w \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{d^n} [\text{Per}_n(w)] \rightarrow T_{\text{bif}}$.

Si $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est la famille des polynômes de degré d ,

iv. Pour tout w tel que $|w| \leq 1$, $\frac{1}{d^n} [\text{Per}_n(w)] \rightarrow T_{\text{bif}}$.

La vitesse de convergence dans les théorèmes d'équidistribution 3.1.8 et 3.1.10 n'est pas connue, sauf dans le cas des familles unicritiques $z^d + c$, où C. Favre et J. Rivera-Letelier [FRL] estiment la vitesse d'équidistribution de la suite $\frac{1}{d^n} [\text{Per}_n(0)]$ à l'aide de méthodes arithmétiques (équidistribution des points de petite hauteur).

En codimension supérieure, on peut espérer pouvoir étudier la distribution asymptotique des paramètres où plusieurs points critiques marqués sont préperiodiques. Par exemple est-il vrai que si (f, c_1, \dots, c_k) est une famille de fractions rationnelles avec k points critiques marqués non stablement préperiodiques, la suite de variétés $\{\lambda, \forall 1 \leq i \leq k, f^n(c_i) = c_i\}$ se distribue selon $T_{c_1} \wedge \dots \wedge T_{c_k}$?

Des résultats dans cet esprit peuvent être obtenus par applications successives du théorème 3.1.8 (voir le théorème 3.2.1), mais ils ne sont pas très satisfaisants.

Dans le cas où Λ est l'espace des polynômes avec points critiques marqués et la codimension $k = d - 1$ est maximale, on peut se demander si les paramètres de Misiurewicz –par exemple ceux pour lesquels $f^n(c)$ est un point fixe répulsif pour tout point critique c – s'équidistribuent selon $\mu_{\text{bif}} = T_{\text{bif}}^{d-1}$ (voir le paragraphe suivant pour plus de détails sur ces notions). Il est vraisemblable que des méthodes de théorie des hauteurs pourraient donner un éclairage intéressant sur cette question.

Enfin, l'existence de théorèmes d'équidistribution analogues pour des systèmes dynamiques de dimension supérieure (endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k ou automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 par exemple) est un problème complètement ouvert, mais qui ne paraît pas hors d'atteinte.

3.2. L'espace des polynômes

3.2.1. Courants de bifurcation supérieurs et mesure de bifurcation

Les résultats de ce paragraphe sont issus de [DF]. L'espace \mathcal{P}_d des polynômes de degré d dont tous les points critiques sont marqués, modulo conjugaison affine est une variété algébrique affine (singulière). Pour travailler en pratique sur cet espace nous allons utiliser une “paramétrisation orbifolde” (non injective) $\pi : \mathbb{C}^{d-1} \rightarrow \mathcal{P}_d$, définie de la manière suivante : π envoie $(c_1, \dots, c_{d-2}, a) \in \mathbb{C}^{d-1}$ sur la primitive de $z \prod_{i=1}^{d-2} (z - c_i)$ dont la valeur en 0 est a^d . En coordonnées, on obtient (en notant $c = (c_1, \dots, c_{d-2})$)

$$\pi(c, a) = P_{c,a}(z) = \frac{1}{d} z^d + \sum_{j=2}^{d-1} (-1)^{d-j} \sigma_{d-j}(c) \frac{z^j}{j} + a^d, \quad (3.1)$$

où $\sigma_i(c)$ est le polynôme symétrique élémentaire en les $\{c_j\}_1^{d-2}$ de degré i . Les points critiques de $P_{c,a}$ sont $\{0, c_1, \dots, c_{d-2}\}$. On pose $c_0 = 0$.

Le choix de cette paramétrisation, inspirée par celle utilisée par Branner et Hubbard [BH1], est motivé par le fait que les courants de bifurcation $T_i := T_{c_i}$ ont la même masse projective. De manière plus générale, nous allons devoir comprendre le comportement à l'infini de certains sous ensembles remarquables de paramètres –par exemple pour vérifier l'hypothèse (H) du théorème 3.1.8–, et pour cela le choix de la paramétrisation est déterminant ¹

Dans \mathbb{C}^{d-1} on définit le lieu de connexité \mathcal{C} qui est compact par [BH1]. On définit également pour $0 \leq i \leq d-2$ les fermés \mathcal{C}_i par

$$\mathcal{C}_i = \{(c, a), \text{ l'orbite de } c_i \text{ est bornée}\}.$$

Il est clair que $\mathcal{C} = \bigcap_i \mathcal{C}_i$ et que $\partial \mathcal{C}_i$ est le lieu d'activité du point critique c_i .

On pose également $g_{c,a}$ la fonction de Green du polynôme $P_{c,a}$, qui dépend continûment de (c, a) , et on vérifie sans peine que $T_i = dd^c g_i$ où $g_i : (c, a) \mapsto dd^c g_{c,a}(c_i)$. On rappelle que la formule de Manning-Przytycki-Sibony (2.14) affirme que $\chi = \log d + \sum_{i=0}^{d-2} g_i$, d'où $T_{\text{bif}} = \sum_{i=0}^{d-2} T_i$, comme déjà indiqué.

Un aspect fondamentalement nouveau lorsqu'on passe de un à plusieurs paramètres est l'existence d'une hiérarchie de bifurcations, qui est assez délicate à formaliser. En première approximation, on peut considérer que les “bifurcations d'ordre supérieur” se caractérisent par l'existence de plusieurs points critiques bifurcant simultanément.

On a vu qu'il découle simplement du théorème de Montel que si c est un point critique actif en λ_0 , on peut le perturber de sorte qu'il devienne (pré-)periodique. Il est naturel de se demander si lorsque, plusieurs points critiques sont actifs, il existe un paramètre proche où ils deviennent simultanément périodiques ou préperiodiques.

1. Nous ferons d'ailleurs un choix différent dans le paragraphe sur les polynômes cubiques.

C'est une difficulté classique en dynamique à plusieurs variables que le théorème de Montel est faux en dimension supérieure (phénomène de Fatou-Bieberbach), et de fait, la réponse à la question précédente est "non", comme le montre l'exemple suivant [DF, Exemple 6.13], qui nous avait été communiqué par A. Douady :

Soit P le polynôme cubique défini par $P(z) = z + \frac{z^2}{2} + z^3$. Comme P est réel, par symétrie le point fixe parabolique 0 attire les deux points critiques, qui sont donc tous deux actifs. Néanmoins, on peut montrer que toute petite perturbation de P admet un cycle attractif (non superattractif), donc pour aucun paramètre proche de P les deux points critiques ne sont simultanément prépériodiques.

En dynamique à plusieurs variables complexes, l'introduction des courants et de la théorie du pluripotential a été un moyen de passer outre l'absence du théorème de Montel en dimension supérieure. Nous allons voir que la situation est analogue ici. Le théorème suivant montre par exemple que les courants de bifurcation successifs T_{bif}^k détectent bien les bifurcations "indépendantes" des points critiques.

Théorème 3.2.1

Il existe une suite de réels positifs α_n et une suite de sous ensembles analytiques W_n de codimension k , supportés par l'ensemble des paramètres où k points critiques sont périodiques (resp. strictement prépériodiques) et tels que $\alpha_n[W_n] \rightarrow T_{\text{bif}}^k$.

Comme T_{bif}^k est une somme de produits extérieurs du type $T_{i_1} \wedge \cdots \wedge T_{i_k}$ (où les i_j sont distincts car $T_i \wedge T_i = 0$), le cas périodique du théorème découle de la proposition suivante :

Proposition 3.2.2

Fixons une collection d'entiers distincts $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, d-2\}$, et pour tous $(n_1, \dots, n_k) \in (\mathbb{N}^)^k$ définissons le sous ensemble analytique $W_{n_1, \dots, n_k} = \bigcap_{j=1}^k [P^{n_j}(c_{i_j}) = c_j]$.*

Alors W_{n_1, \dots, n_k} est de codimension pure k et

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \cdots \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{d^{n_k + \dots + n_1}} [W_{n_1, \dots, n_k}] = T_{i_1} \wedge \cdots \wedge T_{i_k} . \quad (3.2)$$

Pour démontrer la proposition, on ne peut évidemment pas simplement appliquer le théorème 3.1.8 à k points critiques distincts et prendre le produit extérieur. La méthode consiste à raisonner par récurrence sur $\ell \leq k$ en appliquant successivement le théorème 3.1.8 en prenant comme espace de paramètres $\Lambda = W_{n_1, \dots, n_\ell}$. La difficulté est de vérifier à chaque étape l'hypothèse (H), ce qui nécessite une bonne compréhension de la géométrie à l'infini de l'espace des paramètres.

Pour le cas strictement prépériodique, on applique la même idée qu'au corollaire 3.1.9 en utilisant le fait que les puissances successives de T_{bif} ne chargent pas les ensembles analytiques.

Intéressons nous de plus près au cas de codimension maximale $k = d - 1$. On pose $\mu_{\text{bif}} = T_0 \wedge \cdots \wedge T_{d-2} = \frac{1}{(d-1)!} T_{\text{bif}}^{d-1}$, qui est une mesure de probabilité portée par le bord du lieu de connexité \mathcal{C} . Les résultats qui vont suivre montrent que μ_{bif} est en de nombreux aspects l'analogue naturel en dimension supérieure de la mesure harmonique de l'ensemble de Mandelbrot.

Proposition 3.2.3

La mesure de bifurcation est la mesure d'équilibre pluripotentialiste du lieu de connexité. En particulier, $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$ est la frontière de Shiloff de \mathcal{C} .

C'est une question ouverte bien connue de savoir si le lieu de connexité est l'adhérence de son intérieur. Le théorème 3.2.1 (pour les points critiques périodiques) montre donc que la frontière de Shiloff de \mathcal{C} est dans l'adhérence de $\text{Int}(\mathcal{C})$.

Il est intéressant de chercher une caractérisation plus dynamique de $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$. L'exemple de Douady mentionné plus haut montre que $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}}) \subsetneq \bigcap_{i=0}^{d-2} \text{Supp}(T_i)$.

On rappelle qu'un point de Misiurewicz est un paramètre pour lequel tous les points critiques sont strictement préperiodiques. Le théorème 3.2.1 dit que

$$\text{Supp}(\mu_{\text{bif}}) \subset \overline{\{\text{points de Misiurewicz}\}}.$$

En fait, comme en dimension 1, il s'agit d'une égalité.

Théorème 3.2.4

Supp(μ_{bif}) est l'adhérence de l'ensemble des points de Misiurewicz.

Notre démonstration repose sur une description de la mesure μ_{bif} comme la mesure d'aboutissement d'une famille mesurée de rayons externes, qui sont définis comme suit. Soit P un polynôme dont la fonction de Green prend la même valeur $r > 0$ en tous les points critiques ($J(P)$ est alors un Cantor). L'ensemble Θ des arguments externes des rayons aboutissants aux points critiques permet de décrire de manière naturelle la combinatoire de P (voir [BFH, Ki1]). Cette famille d'angles Θ s'appelle le *portrait critique* de P . On peut maintenant déformer P en gardant Θ fixe et en faisant varier r dans \mathbb{R}_+^* – c'est l'opération d'"étirement" de [BH1]. Cela définit un rayon externe dans l'espace des paramètres, correspondant au portrait critique Θ .

L'ensemble Cb des portraits critiques est muni d'une mesure de Lebesgue naturelle μ_{Cb} provenant de celle de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On montre assez simplement que μ_{Cb} -presque tout rayon aboutit quand $r \rightarrow 0$ (c'est une conséquence du théorème de Fatou d'existence presque sûre de limites radiales pour les fonctions holomorphes bornées). On obtient ainsi une application mesurable d'aboutissement $e : \text{Cb} \rightarrow \mathcal{C}$. Nous montrons que les mesures μ_{Cb} et μ_{bif} sont liées de la manière suivante :

Théorème 3.2.5

On a $e_\mu_{\text{Cb}} = \mu_{\text{bif}}$.*

La dernière étape dans la preuve du théorème 3.2.4 repose sur un théorème d'aboutissement pour les combinatoires "rationnelles", qui généralise le fait bien connu que les rayons externes rationnels de l'ensemble de Mandelbrot aboutissent². Nous dirons qu'une combinatoire $\Theta \in \text{Cb}$ est de Misiurewicz si les angles qui la composent sont strictement préperiodiques sous la multiplication par d . Un résultat profond dû à Bielefeld, Fisher et Hubbard [BFH] d'une part et Kiwi [Ki1] d'autre part affirme que l'application d'aboutissement est continue aux combinatoires de type Misiurewicz et induit une bijection entre cet ensemble de combinatoires et les points de Misiurewicz dans \mathcal{P}_d .

Comme les combinatoires de type Misiurewicz sont dans le support de μ_{Cb} , on en déduit directement que les points de Misiurewicz sont dans le support de μ_{bif} , ce qui conclut la preuve du théorème 3.2.4.

La description de μ_{bif} en termes de rayons externes permet également de généraliser en toute dimension des résultats de Graczyk-Świątek [GŚw] et Smirnov [Sm], donnant des informations dynamiques sur μ_{bif} -presque tout paramètre.

2. Techniquement, il s'agit ici des rayons de dénominateur impair.

Théorème 3.2.6

Un polynôme générique au sens de la mesure μ_{bif} a la propriété de Collet-Eckmann topologique (TCE). En particulier, pour μ_{bif} -presque tout paramètre, on a les propriétés suivantes :

- tous les cycles sont répulsifs ;
- $K = J$ est localement connexe et de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 2 ;
- l'orbite de chaque point critique est dense dans J .

◇

Signalons qu'une autre preuve du théorème 3.2.4 a été donnée par X. Buff et A. Epstein, reposant sur des idées de nature différente [BE]. Leur argument montre que le théorème 3.2.4 est également valable dans l'espace des fractions rationnelles de degré d . Ces résultats ont été récemment généralisés par T. Gauthier [Ga] en codimension intermédiaire. Noter cependant que l'on ne dispose pas d'une caractérisation dynamique de $\text{Supp}(T_{\text{bif}}^k)$ pour $1 < k < d - 1$.

3.2.2. L'espace des polynômes cubiques

Dans ce paragraphe nous allons spécialiser la discussion au cas des polynômes cubiques, pour lesquels on dispose d'informations plus précises, grâce notamment aux travaux de Branner et Hubbard [BH1, BH2]. Notre objectif est d'étudier la structure fine des courants et de la mesure de bifurcation, notamment leurs propriétés de laminarité. Les résultats de cette section sont tirés de $[D_{\text{CUBIC}}]$. Il est à noter qu'une philosophie similaire est à l'œuvre dans [BB2], où les auteurs étudient les propriétés de laminarité des courants de bifurcation dans l'espace des fractions rationnelles de degré 2. Ils obtiennent néanmoins une vision moins complète de l'espace des paramètres.

Commençons par adapter une nouvelle paramétrisation, utilisée notamment par Milnor [Mi] et Kiwi [Ki2]), qui est agréable du point de vue de la compactification dans \mathbb{P}^2 . Pour $(c, v) \in \mathbb{C}^2$, on pose

$$f_{c,v}(z) = z^3 - 3c^2z + 2c^3 + v = (z - c)^2(z + 2c) + v.$$

Les points critiques, tous deux marqués, sont en $\pm c$ et les valeurs critiques respectives sont v et $v + 4c^3$. Nous marquerons d'un $+$ ou $-$ les objets associés aux points critiques correspondants ; par exemple, $\mathcal{C}^\pm = \{(c, v), \pm c \text{ est d'orbite bornée}\}$, les courants associés à $\pm c$ seront notés T^\pm , de potentiels respectifs G^\pm , nous considérerons également les courbes $\text{Per}^\pm(n, k)$, etc. Bien entendu, les points critiques jouent des rôles symétriques et pour l'étude des courants on pourra ne considérer que, disons, T^+ .

La figure 3.1, qui repose sur les travaux de Kiwi [Ki2] permet de se faire une idée de l'allure de ces sous ensembles dans l'espace des paramètres. La dissymétrie entre les ensembles \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- à l'infini est due au fait que l'involution $(c, v) \mapsto (-c, v + 4c^3)$ qui échange les points fixes contracte la droite à l'infini sur $[0 : 1 : 0]$.

Pourquoi s'intéresser aux propriétés de laminarité des courants de bifurcation ? On sait qu'en dynamique holomorphe la géographie de l'espace des paramètres s'organise autour des composantes de stabilité, en l'occurrence ici les composantes connexes de $(\partial\mathcal{C}^+ \cup \partial\mathcal{C}^-)^c = \text{Bif}^c$. Nous avons affirmé à plusieurs reprises que les courants de bifurcation sont bien adaptés à

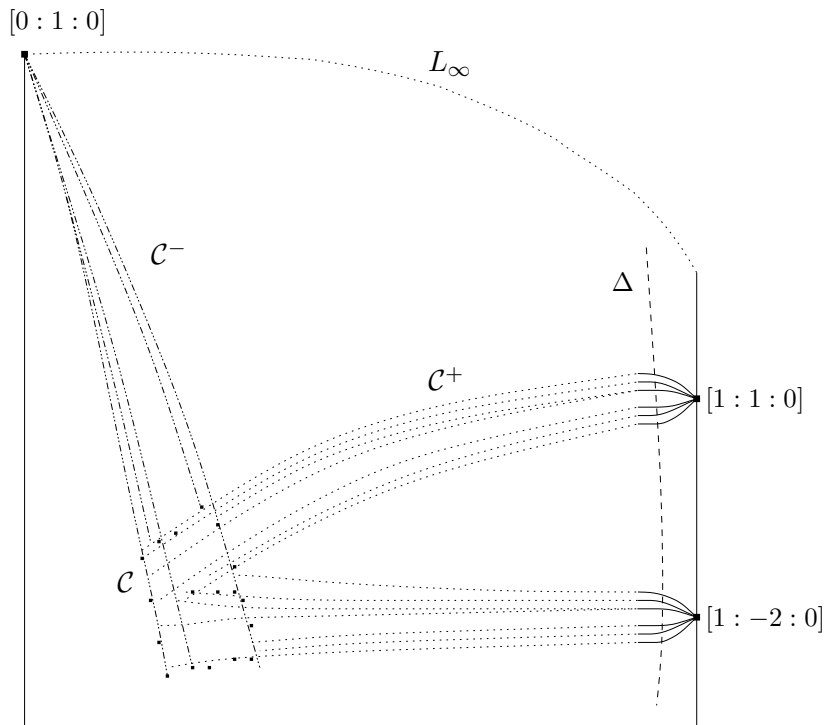


FIGURE 3.1 – Vue schématique de l'espace des paramètres.

l'étude des "bifurcations d'ordre supérieur". Si cette thèse est correcte, on devrait à l'inverse observer des propriétés de "stabilité en codimension 1" sur

$$\text{Bif}_1 \setminus \text{Bif}_2 := \text{Supp}(T_{\text{bif}}) \setminus \text{Supp}(T_{\text{bif}}^2) = \text{Supp}(T^+ + T^-) \setminus \text{Supp}(T^+ \wedge T^-). \quad (3.3)$$

Le lecteur attentif n'aura pas manqué de remarquer ici l'analogie parfaite avec la discussion sur les ensembles de Julia successifs d'un endomorphisme de \mathbb{P}^k au §2.2.

Voici le lien précis entre laminarité et stabilité : si Δ est un disque holomorphe contenu dans le support de T^+ et n'intersectant pas $\text{Supp}(T^-)$, alors la famille $(f_{c,v})_{(c,v) \in \Delta}$ est stable : en effet $G^+|_{\Delta} = 0$ donc $+c$ est passif, et $G^-|_{\Delta}$ est harmonique, donc $-c$ aussi.

Il n'y a pas de relation de cause à effet directe entre carré nul et harmonicité le long de disques holomorphes (cf. le §1.3), donc on ne peut pas affirmer *a priori* que si $\Delta \subset \text{Supp}(T_{\text{bif}}) \setminus \text{Supp}(T_{\text{bif}}^2)$, $\chi|_{\Delta}$ sera harmonique (et donc que Δ sera un disque de stabilité). Néanmoins, si Δ est un disque *subordonné* à T^+ (au sens du §1.2.1) et $\Delta \cap \text{Supp}(T^+ \wedge T^-) = \emptyset$, alors Δ est un disque de stabilité. En effet soit $S \leq T^+$ un courant uniformément laminaire contenant Δ . Si $G^+|_{\Delta}$ n'est pas harmonique, par continuité elle ne le sera pas non plus sur les disques voisins, et donc $S \wedge T^- > 0$ contredisant le fait que $\Delta \cap \text{Supp}(T^+ \wedge T^-) = \emptyset$.

McMullen et Sullivan posent dans [McMS] la question générale de décrire la façon dont les sous variétés de déformations sont plongées dans l'espace des paramètres. Nous allons voir que dans le cas des polynômes cubiques, ces variétés s'organisent en un courant laminaire³ Le résultat obtenu est en effet assez satisfaisant :

3. Ce résultat ne concerne que la structure locale de la famille de disques. L'étude de l'holonomie globale de ces laminations donne également lieu à des phénomènes intéressants [Bra].

Théorème 3.2.7

Le courant de bifurcation est laminaire hors de $\partial\mathcal{C}^+ \cap \partial\mathcal{C}^-$.

Le résultat que nous obtenons est en fait plus précis : le courant est en général localement uniformément laminaire, et on peut même donner des informations sur la mesure transverse.

Analysons d'abord la situation hors du lieu de connexité. Branner et Hubbard [BH1] ont démontré que si $f \notin \mathcal{C}$, il existe une famille à un paramètre naturelle de déformations de P (isomorphe à un disque ou à un disque épointé) par "essorage de la structure complexe". On montre que ces sous variétés forment une lamination hors de \mathcal{C} . On voit facilement que cette famille de déformations est compatible avec les courants de bifurcation :

Proposition 3.2.8

Le courant T^+ est localement uniformément laminaire hors de \mathcal{C} et subordonné à la lamination par courbes de déformation par essorage.

On peut en fait être beaucoup plus précis. Branner et Hubbard donnent dans [BH2] une image très détaillée de $\mathcal{C}^+ \setminus \mathcal{C}$, à la fois du point de vue de la dynamique aux paramètres individuels, et du point de vue de la description de $\mathcal{C}^+ \setminus \mathcal{C}$ comme sous ensemble de l'espace des paramètres. Notons $C(+c)$ la composante connexe de $K(f_{c,v})$ contenant $+c$ (qui par définition ne s'échappe pas si $(c, v) \in \mathcal{C}^+$). Alors l'une des deux situations suivantes a lieu :

Cas renormalisable : Si $C(+c)$ est périodique, f admet une renormalisation quadratique et $C(+c)$ est quasi-conformément homéomorphe à un ensemble de Julia quadratique. De plus une composante de $K(f)$ est non-ponctuelle si et seulement si c'est une préimage de $C(+c)$

Cas non renormalisable : Si $C(+c)$ n'est pas périodique, $K(f)$ est un ensemble de Cantor.

On a une dichotomie similaire dans l'espace des paramètres. Rappelons que \mathcal{C}^+ est localement une lamination par surfaces de Riemann hors de \mathcal{C} . Fixons un disque holomorphe Δ transverse à cette lamination (voir la figure 3.1). Alors $\mathcal{C}^+ \cap \Delta$ est un fermé non connexe, et ses composantes sont de deux types :

Composantes ponctuelles : correspondant aux paramètres non renormalisables

Copies de M : Les paramètres renormalisables sont rassemblés en familles d'allure Mandelbrot [DH2], donnant naissance à un ensemble dénombrable de copies de M dans Δ .

Le courant uniformément laminaire T^+ induit une famille de mesures transverses invariantes sur ces disques Δ . On peut identifier le phénomène générique au sens de la mesure transverse dans la dichotomie ci-dessus.

Théorème 3.2.9

La mesure transverse induite par T^+ sur Δ donne masse totale aux composantes ponctuelles.

La démonstration repose sur un argument de similarité entre l'espace des phases et l'espace des paramètres, au niveau mesurable. Pour faire fonctionner ce type d'argument, l'idée (dûe à Tan Lei, cf. [DH1]) est de trouver un objet persistant au voisinage de $\lambda_0 \in \Lambda$ (classiquement, un fermé invariant uniformément hyperbolique), qui va donc se propager dans $\Lambda \times \mathbb{P}^1$. On le fait ensuite redescendre dans Λ en regardant (typiquement) sa trace sur le graphe d'un point critique marqué.

Quand on se déplace sur \mathcal{C}^+ le long de Δ , la mesure d'entropie maximale varie de manière compliquée (puisque nous sommes dans le lieu de bifurcation), mais en préservant un certain "motif". Soit $f \in \mathcal{C}^+ \cap \Delta$. Dans le plan dynamique, l'ouvert $\{G_f < 3G^-\}$ est simplement connexe, et son image réciproque $\{G_f < G^-\}$ a deux composantes connexe U_1 et U_2 , telles que $f|_{U_i} : U_i \rightarrow \{G_f < 3G^-\}$ est de degré i (voir la figure 3.2).

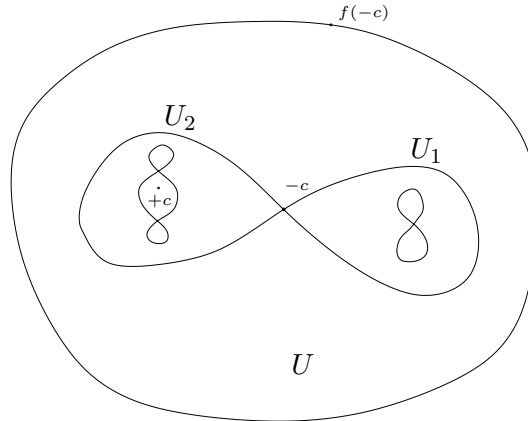


FIGURE 3.2 –

Nous sommes ainsi dans la situation considérée au §2.3.2. Chaque point de K admet un itinéraire dans $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ et on a d'après le théorème 2.3.8 une décomposition de la mesure d'équilibre $\mu_f = \int \mu_\alpha d\nu(\alpha)$, où ν est la mesure $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ sur $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Cette décomposition persiste dans l'espace des paramètres, donc dans $\mathbb{C}^2 \times \Delta$ au voisinage de f , on a une décomposition de \hat{T} en $\hat{T} = \int \hat{T}_\alpha d\nu(\alpha)$. Comme $T^+|_\Delta$ se déduit de \hat{T} en sectionnant par le graphe de $+c$ et en projetant sur Δ , on obtient finalement une décomposition $T^+ = \int T_\alpha^+ d\nu(\alpha)$. Le courant T_α^+ est en quelque sorte la contribution à T^+ de l'ensemble des paramètres pour lesquels $+c$ a pour itinéraire α . Maintenant, pour presque tout α , cet itinéraire n'est pas périodique, et on en déduit que $T^+|_\Delta$ -presque sûrement, l'itinéraire de $+c$ n'est pas périodique, et donc la composante $C(+c)$ ne l'est pas, ce qui conclut la preuve du théorème. \square

Passons maintenant à la description de T_{bif} sur \mathcal{C} . Pour finir la preuve du théorème 3.2.7, il faut montrer que $T^+|_{\partial\mathcal{C}^+ \cap \text{Int}(\mathcal{C}^-)}$ est laminaire. Les composantes de $\text{Int}(\mathcal{C}^-)$ touchant $\partial\mathcal{C}^+$ peuvent être de 2 types : hyperbolique (lorsque $-c$ est attiré par un cycle) ou non. Dans le premier cas on montre par un argument semblable à celui de la proposition 3.2.8 que T^+ est uniformément laminaire, ses feuilles étant construites par un procédé de déformation explicite. Dans le deuxième cas, on a affaire à une composante "farfelue" dont l'existence contredit la conjecture "no invariant line fields". Malgré tout, on arrive à montrer que T^+ y est laminaire, en utilisant le fait qu'on contrôle la topologie de certaines courbes de déformation approchant T (ce sont des disques) et en utilisant le théorème de De Thélin [dT1]. \square

Il y a de bonnes raisons de penser –certains détails restent à vérifier– que si l'on suppose que la conjecture "no invariant line fields" (NILF) de [McMS] est vraie, on peut contrôler le genre des courbes de déformations à proximité de tout point de $(\partial\mathcal{C}^+ \cap \partial\mathcal{C}^-) \setminus \text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$, et par le même raisonnement que ci-dessus, on en déduirait alors que sous NILF, T_{bif} est en fait laminaire hors de $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$.

On sait maintenant qu'il y a abondance de familles à un paramètre de déformations hors de $\partial\mathcal{C}^+ \cap \partial\mathcal{C}^-$ (et vraisemblablement plus généralement hors de $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$). Pour parfaire notre compréhension de l'espace des paramètres, il convient de se demander ce qui se passe sur $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$. C'est un corollaire simple du théorème 3.2.6 que μ_{bif} presque tout paramètre est rigide, i.e. n'admet pas de déformation. On peut en fait être plus précis et montrer que les structures laminaires de T^+ et T^- ne se prolongent pas à travers $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$.

Théorème 3.2.10

La mesure de bifurcation μ_{bif} n'est pas l'intersection géométrique des courants T^+ et T^- .

Cet énoncé est quelque peu inattendu car les courbes $\text{Per}^\pm(n, k)$ se prolongent à travers $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$, en s'intersectant aux points de Misiurewicz, dont nous avons montré qu'ils sont bien denses dans le support. Ceci montre que la géométrie des courbes $\text{Per}^\pm(n, k)$ près de $\text{Supp}(\mu_{\text{bif}})$ est très compliquée. En particulier leur genre est (très) supérieur à 3^n . Ce résultat montre également qu'on ne peut pas utiliser la laminarité pour espérer démontrer l'équidistribution des points de Misiurewicz.

L'idée essentielle de la preuve du théorème est la suivante : supposons qu'il existe des boîtes de flot respectivement subordonnées à T^+ et T^- s'intersectant selon un ensemble de mesure strictement positive. Soit donc λ_0 un paramètre μ_{bif} -générique appartenant à un disque D générique subordonné à T^+ . Suivons la dynamique de f_λ le long de D . En λ_0 , l'orbite de chacun des points critiques est dense dans l'ensemble de Julia, qui est connexe. Par ailleurs, le long de D , $+c$ est passif, donc son orbite se déplace selon un mouvement holomorphe (ce n'est pas évident et découle de [DF, Thm 4]). On conclut que pour tout λ dans D , $+c$ est contenu dans un sous ensemble connexe non-trivial de J_λ .

Par ailleurs, d'après la remarque sur l'absence de déformations précédant le théorème, on sait que D doit sortir de \mathcal{C} . Maintenant, le théorème 3.2.9 affirme que le long d'un disque T^+ -générique hors de \mathcal{C} , l'ensemble de Julia est un Cantor. On aboutit donc à une contradiction.

◇

La théorie des courants de bifurcation fournit ainsi une vision assez riche et novatrice des espaces de paramètres multidimensionnels de polynômes et fractions rationnelles d'une variable, qui pose en outre de nombreuses questions. Dans l'optique d'établir une sorte de "dictionnaire" avec la dynamique des endomorphismes de \mathbb{P}^2 , il serait intéressant de définir précisément ce qu'est le "lieu de bifurcation secondaire" Bif_2 (que nous avons de manière volontairement provocante défini comme étant $\text{Supp}(T_{\text{bif}}^2)$ en (3.3)).

Dans [D_{CUBIC}], nous proposons dans le même esprit un tableau de correspondances assez instructif entre l'espace des paramètres des polynômes cubiques et l'espace des phases d'un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . Il faut comprendre ces analogies comme des sortes de guides pour l'intuition.

Le plus célèbre de ces systèmes d'analogies en dynamique holomorphe est bien sûr le dictionnaire de Sullivan [Su1] entre la dynamique des fractions rationnelles et la théorie des groupes Kleiniens. Nous allons maintenant voir que les courants de bifurcation respectent la philosophie du dictionnaire de Sullivan et font également tout à fait sens dans le monde des groupes Kleiniens.

3.3. Familles de sous-groupes de Möbius

3.3.1. Familles holomorphes de sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$

Nous allons assembler le matériel nécessaire pour exposer les résultats de [DD1], un travail réalisé en collaboration avec Bertrand Deroin. Dans toute cette section, G désigne un groupe de type fini, Λ une variété complexe connexe. On considère une famille holomorphe de représentations de G , c'est à dire une application $\rho : \Lambda \times G \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, telle que pour $\lambda \in \Lambda$ fixé, $\rho(\lambda, \cdot)$ est un morphisme et pour $g \in G$ fixé, $\rho(\cdot, g)$ est holomorphe. On notera en général $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ cette famille.

Nous faisons les trois hypothèses suivantes :

- (R1) la famille est non triviale, au sens où les représentations ρ_λ ne sont pas deux à deux conjuguées dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$;
- (R2) il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que ρ_{λ_0} soit injective ;
- (R3) pour tout $\lambda \in \Lambda$, ρ_λ est non-élémentaire.

Les deux premières hypothèses ne restreignent pas notre étude : pour la première, c'est évident, et pour la seconde, il suffit de passer au besoin à un quotient de G .

Rappelons qu'un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est élémentaire s'il a une orbite finie sur $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{P}^1$ (\mathbb{H}^3 est l'espace hyperbolique de dimension 3). Deux cas sont possibles : ou bien ce sous-groupe fixe un ensemble constitué de 1 ou 2 points sur \mathbb{P}^1 , ou bien il est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3)$. On montre facilement que l'ensemble des représentations élémentaires est un sous-ensemble réel-analytique $E \subset \Lambda$. Donc quitte à se restreindre à $\Lambda \setminus E$, on pourra toujours supposer la troisième hypothèse satisfaite.

La condition (R3) est tout de même une véritable restriction quand on veut s'intéresser au cas où Λ est, disons, l'espace de toutes les représentations d'un groupe donné dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Même si, par souci de simplicité, nous ne nous attarderons pas sur ce point ici, on s'attache dans [DD1] à obtenir dans la mesure du possible des résultats valables également en présence de représentations élémentaires.

Nous identifions $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ au groupe de Möbius des transformations de la forme $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$), et $\|\cdot\|$ est la norme définie par $\|\gamma\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2$.

Il est bien connu qu'une transformation de Möbius $\gamma \neq \mathrm{Id}$ a un type (elliptique, parabolique ou loxodromique) qui est fonction de la valeur de sa trace (resp. $\mathrm{tr}^2(\gamma) \in [0, 4)$, $\mathrm{tr}^2(\gamma) = 4$, $\mathrm{tr}^2(\gamma) \notin [0, 4]$).

Il y a une notion univoque de bifurcation pour une famille holomorphe de sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, en vertu du théorème suivant, qui est la traduction du théorème 3.1.1 dans le dictionnaire de Sullivan.

Théorème 3.3.1 (Sullivan [Su2], Bers [Bers])

Soit $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de représentations de G into $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ satisfaisant les hypothèses (R1-3), et soit Ω un ouvert de Λ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. pour tout $\lambda \in \Omega$, $\rho_\lambda(G)$ est discret ;
- ii. pour tout $\lambda \in \Omega$, ρ_λ est fidèle ;
- iii. pour tout g dans G , les transformations $\rho_\lambda(g)$ ne changent pas de type quand λ parcourt Ω ;
- iv. pour tous λ_0, λ_1 dans Ω les représentations ρ_{λ_0} et ρ_{λ_1} sont quasi-conformément conjuguées sur \mathbb{P}^1 , i.e. il existe un homéomorphisme quasi-conforme $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $g \in G$, $\rho_{\lambda_0}(g) \circ \phi = \phi \circ \rho_{\lambda_1}(g)$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dira que la famille de représentations est *stable*⁴ dans Ω . On définit alors Stab comme étant l'ouvert de stabilité maximal, et par définition Bif est son complémentaire, de sorte que $\Lambda = \text{Stab} \cup \text{Bif}$.

Le théorème 3.3.1 montre que $\text{Stab} = \text{Int}(\text{DF})$ est l'intérieur de l'ensemble des représentations discrètes et fidèles. Par ailleurs, le célèbre lemme de Jørgensen-Kazhdan-Margulis-Zassenhaus implique que DF est fermé dans Λ . On en déduit, à la différence des familles de fractions rationnelles, que s'il est non vide, Bif est toujours d'intérieur non vide.

Le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 3.3.2

Pour tout $t \in [0, 4]$, l'ensemble des paramètres λ_0 en lesquels il existe $g \in G$ tel que $\text{tr}^2 \rho_{\lambda_0}(g) = t$ et $\lambda \mapsto \text{tr}^2 \rho_\lambda(g)$ n'est pas constante est dense dans Bif .

De manière générale, on sait peu de choses sur la répartition de l'ensemble des λ pour lesquels il existe $g \in G$ tel que $\text{tr}^2(\rho_\lambda(g)) = t$. Une motivation essentielle pour l'introduction de courants de bifurcation est d'étudier la *distribution asymptotique* de ces paramètres.

La valeur la plus emblématique est $t = 4$. Dans ce cas on peut même imposer que $\rho_{\lambda_0}(g)$ est parabolique⁵. Le corollaire se résume alors au slogan : "les paraboliques accidentels sont denses dans le lieu de bifurcation".

Un résultat célèbre dans cette thématique, et beaucoup plus difficile que le corollaire 3.3.2 est le théorème de McMullen [McM2] qui affirme que les paraboliques accidentels sont denses dans le bord de certaines composantes de stabilité (correspondant aux plongements de Bers de l'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann de type fini, voir le §3.4).

On peut aussi se demander ce qui se passe si l'on impose des contraintes sur g . Voici une question (semble t'il bien connue des spécialistes) qui nous a été communiquée par Curt McMullen : si $G = \pi_1(S, *)$ est le groupe fondamental d'une surface, le corollaire 3.3.2 est il toujours vrai si on se restreint aux éléments $g \in G$ correspondant aux courbes fermées simples sur S ?

3.3.2. Produits de matrices aléatoires

Le deuxième ingrédient dont nous aurons besoin est le concept *d'exposant de Lyapunov d'une représentation*, et plus généralement, du B.A.BA des produits aléatoires de matrices (on pourra consulter [BL] ou [Furm] pour une présentation plus détaillée).

Pour cela, si G est un groupe de type fini, on se donne une mesure de probabilité μ sur G qui vérifie les deux conditions suivantes :

4. Cette terminologie est sans rapport avec la stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants. Pour nous la stabilité est toujours entendue au sens des systèmes dynamiques.

5. La démonstration est un simple exercice, mais étonnamment ce résultat semble peu connu des spécialistes.

(A1) $\text{Supp}(\mu)$ engendre G comme semi-groupe ;

(A2) il existe $\sigma > 0$ tel que $\int_G \exp(\sigma \text{longueur}(g)) d\mu(g) < \infty$.

La longueur de g dans (A2) est relative à un système de générateurs quelconque, fixé à l'avance, de G . Un cas typique où ces hypothèses sont vérifiées est celui d'une mesure à support fini portée par les générateurs de G et leurs inverses.

Nous noterons μ^n la convolée n fois de μ avec elle même, c'est à dire l'image de $\mu^{\otimes n}$ par $(g_1, \dots, g_n) \mapsto g_1 \cdots g_n$. C'est la loi du n -ième pas de la marche aléatoire sur G associée à la mesure μ .

Si $\mathbf{g} = (g_n)_{n \geq 1} \in G^{\mathbb{N}}$, nous noterons $l_n(\mathbf{g}) = g_n \cdots g_1$ le produit à gauche des g_k (resp. $r_n(\mathbf{g}) = g_1 \cdots g_n$ le produit à droite). Nous noterons $\mu^{\mathbb{N}}$ la mesure produit sur $G^{\mathbb{N}}$ de sorte que $\mu^n = (l_n)_* \mu^{\mathbb{N}} = (r_n)_* \mu^{\mathbb{N}}$.

L'exposant de Lyapunov d'une représentation $\rho : G \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ est défini par

$$\chi(\rho) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_G \log \|\rho(g)\| d\mu^n(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \log \|\rho(g_1 \cdots g_n)\| d\mu(g_1) \cdots d\mu(g_n), \quad (3.4)$$

où la limite existe par sous-additivité. On déduit immédiatement du théorème ergodique sous-additif de Kingman que

$$\text{pour } \mu^{\mathbb{N}}\text{-presque tout } \mathbf{g}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\rho(l_n(\mathbf{g}))\| = \chi(\rho) \quad (3.5)$$

(ceci était avant Kingman un résultat de Furstenberg et Kesten). Voici un théorème fondamental de Furstenberg [Fur1].

Théorème 3.3.3 (Furstenberg)

Soient (G, μ) satisfaisant les hypothèses (A1-2) et $\rho : G \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ une représentation non élémentaire. Alors l'exposant de Lyapunov $\chi(\rho)$ est strictement positif et dépend continûment de ρ .

Le théorème suivant est dû à Guivarc'h [Gui]

Théorème 3.3.4 (Guivarc'h)

Soient (G, μ) satisfaisant les hypothèses (A1-2) et $\rho : G \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ une représentation non élémentaire. Alors pour $\mu^{\mathbb{N}}$ -presque tout \mathbf{g} , on a

$$\frac{1}{n} \log |\text{tr}(\rho(l_n(\mathbf{g})))| = \frac{1}{n} \log |\text{tr}(\rho(g_n \cdots g_1))| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi(\rho). \quad (3.6)$$

Une remarque, à première vue banale, mais qui est un obstacle technique important dans [DD1], est que contrairement au cas de (3.5), on ne peut pas intégrer par rapport à $\mu^{\mathbb{N}}$ dans (3.6). La raison est bien sûr qu'il est tout à fait possible que certains mots soient de trace nulle ou très petite. À l'inverse, si h est une fonction minorée sur $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, équivalente à la trace quand celle-ci tend vers l'infini, on pourra bien intégrer. Par exemple, sous les hypothèses du théorème, si λ_{\max} désigne le rayon spectral, on a

$$\chi(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \log |\lambda_{\max}(\rho(g))| d\mu^n(g). \quad (3.7)$$

Nous aurons en fait besoin de montrer une version précisée du théorème 3.3.4. De manière plus générale, un aspect notable de notre travail (qui ne se verra pas beaucoup ici car les détails techniques ne seront qu'effleurés) est qu'il est nécessaire de faire intervenir des résultats tout à fait non triviaux en théorie des matrices aléatoires, comme le théorème des grandes déviations, la convergence exponentielle de l'opérateur de transition, etc.

3.3.3. Courant de bifurcation

Nous pouvons maintenant aborder les résultats de [DD1]. On se donne G un groupe de type fini, $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de représentations de G satisfaisant les conditions (R1-3) et μ une mesure sur G satisfaisant (A1-2). Il découle immédiatement de (3.4) que $\chi : \lambda \mapsto \chi(\rho_\lambda)$ est une fonction psh sur Λ . Motivés par l'analogie avec la dynamique des fractions rationnelles, on pose la définition suivante :

Définition 3.3.5

Soit (G, ρ, μ) comme ci dessus. Le courant de bifurcation associé à cette donnée est $T_{\text{bif}} = dd^c \chi$.

L'objectif de notre travail est de justifier du bien-fondé de cette définition, en montrant en particulier que T_{bif} satisfait des propriétés analogues à celles démontrées au §3.1.

Il est facile de voir que la fonction χ est pluriharmonique sur le lieu de stabilité : en effet d'après (3.7) l'exposant de Lyapunov s'estime en moyennant les logarithmes des rayons spectraux des mots μ^n -génériques. Si la famille de représentations ρ_λ est stable dans Ω , alors pour tout g , les transformations $\rho_\lambda(g)$ ne changent pas de type, ainsi $\lambda \mapsto \log |\lambda_{\max}(\rho_\lambda(g))|$ est pluriharmonique dans Ω et on conclut.

Le point remarquable est que la pluriharmonicité de χ caractérise la stabilité :

Théorème 3.3.6

Soit (G, ρ, μ) une famille holomorphe de représentations, munie d'une mesure μ , satisfaisant les hypothèses (R1-3) et (A1-2). Alors $\text{Supp}(T_{\text{bif}})$ est égal au lieu de bifurcation.

Voici les idées de la démonstration, qui comporte de nombreuses étapes. Pour simplifier, nous allons supposer que $\dim(\Lambda) = 1$ (ce qui n'est pas vraiment une restriction). La première étape est de chercher une interprétation géométrique de T_{bif} dans $\Lambda \times \mathbb{P}^1$, dans l'esprit de la définition-proposition 3.1.5. Pour cela, un théorème de Furstenberg affirme que pour λ_0 fixé, pour tout $z_0 \in \mathbb{P}^1$ la suite de mesures $\int (\rho_{\lambda_0}(g))_* \delta_{z_0} d\mu^n(g)$ converge vers une mesure de probabilité ν_{λ_0} sur \mathbb{P}^1 , qui est l'unique mesure μ -stationnaire, c'est à dire telle que

$$\mu * \nu := \int (\rho_{\lambda_0}(g))_* \nu d\mu(g) = \nu.$$

Poussant l'analogie avec la dynamique rationnelle, on cherche donc un courant \widehat{T} dans $\Lambda \times \mathbb{P}^1$, "interpolant" les mesures stationnaires ν_λ . Ce courant devrait alors s'obtenir comme $\widehat{T} = \lim \widehat{T}_n$, où \widehat{T}_n est défini par

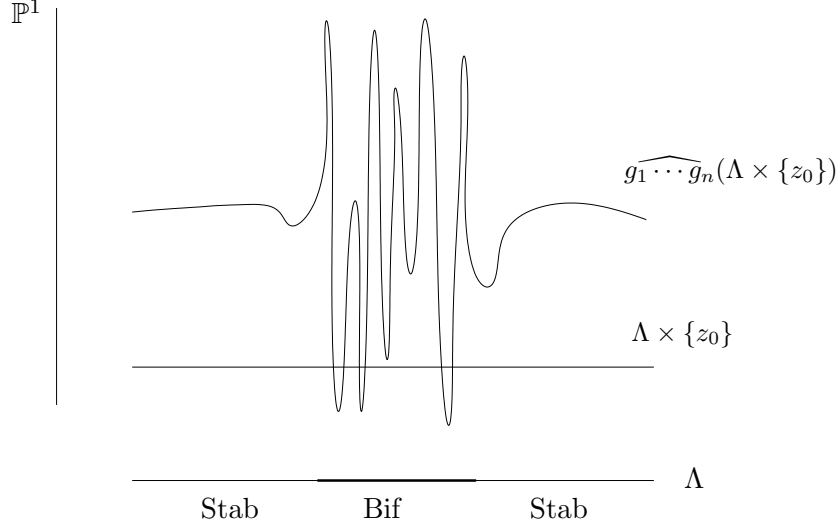
$$\widehat{T}_n = \frac{1}{n} \int [\widehat{g}(\Lambda \times \{z_0\})] d\mu^n(g), \quad (3.8)$$

où \widehat{g} désigne l'action fibrée de g sur $\Lambda \times \mathbb{P}^1$, définie par $\widehat{g} : (\lambda, z) \mapsto (\lambda, g_\lambda(z))$.

En fait, il se trouve que cette construction ne fonctionne pas comme on l'attendait, mais nous fournit tout de même une information cruciale !

Proposition 3.3.7

La suite de courants \widehat{T}_n définis en (3.8) converge vers $\pi_1^* T_{\text{bif}}$, où $\pi_1 : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda$ est la projection naturelle.

FIGURE 3.3 – Action fibrée de $g_1 \cdots g_n$

La figure 3.3.3 propose une interprétation visuelle de ce résultat.

Ainsi, un ouvert U est disjoint de $\text{Supp}(T_{\text{bif}})$ si et seulement si la croissance moyenne de l'aire de la suite de graphes $(\widehat{g_1 \cdots g_n})(\Lambda \times \{z_0\})$ au dessus de U est sous linéaire en n . Rappelons que notre objectif est de montrer que $\Omega \subset \text{Stab}$. On doit donc s'attendre à ce que l'aire de cette suite de graphes soit uniformément bornée. La proposition suivante dit que c'est, en moyenne, effectivement le cas.

Proposition 3.3.8

Si U est un ouvert disjoint de $\text{Supp}(T_{\text{bif}})$ alors

$$\int \text{Aire}(\widehat{g}(\Lambda \times \{z_0\}) \cap \pi_1^{-1}(U)) d\mu^n(g) = O(1).$$

Pour démontrer la proposition, on donne une expression analytique de cette aire :

$$\begin{aligned} \int \text{Aire}(\widehat{g}(\Lambda \times \{z_0\}) \cap \pi_1^{-1}(U)) d\mu^n(g) &= \int_{\pi_1^{-1}(U)} [\widehat{g}(\Lambda \times \{z_0\})] \wedge (\pi_1^* \omega_\Lambda + \pi_2^* \omega_{\mathbb{P}^1}) d\mu^n(g) \\ &= \text{Aire}(U) + \int_U (\pi_1)_* (\pi_2^* \omega_{\mathbb{P}^1} |_{\widehat{g}(\Lambda \times \{z_0\})}) d\mu^n(g) \\ &= \text{Aire}(U) + n \int_U dd^c \chi_n, \text{ où } \chi_n = \frac{1}{n} \int \log \frac{\|g_\lambda(Z_0)\|}{\|Z_0\|} d\mu^n(g). \end{aligned}$$

Dans la dernière expression, Z_0 est un relevé de z_0 à \mathbb{C}^2 , la norme est la norme euclidienne dans \mathbb{C}^2 , et le dd^c est bien sûr pris en la variable λ . On applique alors un argument que nous avons déjà rencontré aux §2.2.2 et 3.1.3 : comme χ est pluriharmonique sur U , $n dd^c \chi_n = n dd^c(\chi_n - \chi)$. Tout se ramène alors à établir le développement asymptotique $\chi_n - \chi = O(\frac{1}{n})$, qui se montre par des techniques de théorie ergodique des produits de matrices aléatoires (“convergence exponentielle de l'opérateur de transition”).

Arrivés à ce point, en combinant le théorème de Furstenberg de convergence des $\rho(g_1 \cdots g_n)_* \delta_{z_0}$ dans chaque fibre et le fait que le volume moyen des graphes est borné au dessus de U , on

montre que pour presque toute suite (g_n) , la suite de graphes $(\widehat{g_1 \cdots g_n}) (\Lambda \times \{z_0\})$ converge vers un graphe limite $\Gamma_{\mathbf{g}}$ (quitte à retirer un nombre fini de “bulles” verticales). On obtient ainsi une famille mesurable et G -équivariante de graphes limites⁶.

La dernière étape pour montrer la stabilité de la famille de représentations au dessus de U est de montrer que cette famille de graphes définit un mouvement holomorphe, c’est à dire que les graphes ne se coupent pas. Pour cela, on utilise le fait que pour tout ouvert $D \subset U$, le nombre de points d’intersections au dessus de D entre 2 graphes donnés vérifie une propriété d’équivariance. D’après un théorème ergodique dû à Kaimanovich, on en déduit que le nombre de points d’intersection entre deux graphes génériques au dessus de D est une constante ι_D , ne dépendant que de D . On conclut alors aisément que $\iota_D = 0$, ce qui était le résultat voulu. \square

3.3.4. Équidistribution

Le deuxième aspect important de nos courants de bifurcations est qu’ils permettent d’étudier les propriétés d’équidistribution dans le corollaire 3.3.2. Pour $t \in \mathbb{C}$, appelons $Z(g, t)$ le sous ensemble analytique de Λ défini par $Z(g, t) = \{\lambda, \text{tr}^2(\rho_\lambda(g)) = t\}$. Noter que si la trace de $\rho_\lambda(g)$ est constante et égale à t , $Z(g, t) = \Lambda$. Nous allons étudier la distribution asymptotique des courants d’intégration $[Z(g, t)]$, avec la convention que $[\Lambda] = 0$, c’est à dire que l’on ne tient pas compte de la contribution des éléments de trace constante t .

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 3.3.9 (Équidistribution pour les suites aléatoires)

Soit (G, ρ, μ) une famille holomorphe de représentations, munie d’une mesure μ , satisfaisant les hypothèses (R1-3) et (A1-2). Fixons $t \in \mathbb{C}$. Alors pour $\mu^{\mathbb{N}}$ presque toute suite (g_n) , on a

$$\frac{1}{2n} [Z(g_n \cdots g_1, t)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T_{\text{bif}}.$$

Le théorème admet le corollaire “déterministe” suivant, qui précise le corollaire 3.3.2, et pour lequel nous ne connaissons pas de preuve directe :

Corollaire 3.3.10

Sous les hypothèses du théorème, soient $\varepsilon > 0$ et $\Lambda' \Subset \Lambda$. Alors il existe $g \in G$ tel que $\lambda \mapsto \text{tr}^2(\rho_\lambda(g))$ est non constante et $\{\lambda, \text{tr}^2(\rho_\lambda(g)) = t\}$ est ε -dense dans $\text{Bif} \cap \Lambda'$.

Pour la valeur $t = 4$ nous ne savons pas en revanche qui des paraboliques accidentels ou des relations accidentelles prévaut dans $[Z(g_n \cdots g_1, 4)]$.

Contrairement au cas des fractions rationnelles, on peut estimer la vitesse de convergence, modulo une hypothèse globale sur Λ :

Théorème 3.3.11 (Vitesse dans le théorème d’équidistribution)

Soit (G, ρ, μ) une famille holomorphe de représentations, munie d’une mesure μ , satisfaisant les hypothèses (R1-3) et (A1-2), et fixons $t \in \mathbb{C}$. Supposons en outre qu’au moins une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- i. Λ est une famille algébrique de représentations définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*
- ii. Il existe une représentation géométriquement finie dans Λ .*

6. Techniquement, cette famille est paramétrée par le bord de Poisson de la marche aléatoire définie par (G, μ) .

Alors il existe une constante C telle que pour toute forme test ϕ ,

$$\left\langle \frac{1}{2n} \int [Z(g, t)] d\mu^n(g) - T_{\text{bif}}, \phi \right\rangle \leq C \frac{\log n}{n} \|\phi\|_{C^2}.$$

Pour donner une idée de la preuve, nous allons démontrer une version affaiblie de ces résultats, qui est une adaptation essentiellement directe du théorème de Bassanelli et Berteloot 3.1.10.

Proposition 3.3.12

Soit m la mesure de Lebesgue (normalisée) sur $[0, 4]$. Alors sous les hypothèses du théorème 3.3.11, on a

$$\frac{1}{2n} \int [Z(g, t)] d\mu^n(g) dm(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_{\text{bif}}.$$

Démonstration. Nous allons montrer la convergence au niveau des potentiels. Soit donc $u(g, \cdot)$ la fonction psh définie sur Λ par

$$u(g, \lambda) = \int \log |\text{tr}^2(\rho_\lambda(g)) - t| dm(t) = v(\text{tr}^2(\rho_\lambda(g))),$$

où v est le potentiel logarithmique de la mesure m . Ainsi, u est uniformément minorée et $u(g, \lambda) \sim \log |\text{tr}^2(\rho_\lambda(g))|$ lorsque $\text{tr}^2(\rho_\lambda(g))$ tend vers l'infini.

Si λ est fixé, d'après le théorème de Guivarch 3.3.4, pour $\mu^{\mathbb{N}}$ presque toute suite (g_n) , $\frac{1}{2n} u(g_1 \cdots g_n, \lambda) \rightarrow \chi(\lambda)$. Comme ces fonctions sont uniformément minorées, par convergence dominée on peut intégrer par rapport à g_1, \dots, g_n et conclure que

$$\frac{1}{2n} \int u(g, \lambda) d\mu^n(g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il suffit alors de passer au dd^c pour obtenir le résultat voulu. \square

On voit bien où sont situées les difficultés pour passer au cas général. Dans le théorème 3.3.9 le point est de faire en sorte que le choix de la suite aléatoire (g_n) ne dépende pas de λ . Pour cela on étudie les suites de fonctions psh $\frac{1}{2n} \log |\text{tr}^2(\rho_\lambda(g_1 \cdots g_n)) - t|$ et on montre que pour presque toute suite (g_n) cette suite converge dans L^1_{loc} vers χ , en appliquant en quelque sorte le théorème ergodique sous-additif de Kingman à valeurs dans l'espace des fonctions psh.

Dans le théorème 3.3.11, la difficulté est que l'on ne peut pas en général intégrer par rapport à g_1, \dots, g_n dans la convergence presque sûre

$$\frac{1}{2n} \log |\text{tr}^2(\rho_\lambda(g_1 \cdots g_n)) - t| \rightarrow \chi(\lambda) \tag{3.9}$$

(théorème de Guivarc'h 3.3.4) à cause de la possibilité d'éléments de trace trop proche de t . On estime alors la taille de l'ensemble des "mauvais" paramètres où ce phénomène se produit, en utilisant des estimées volumiques pour les sous niveaux des fonctions psh, dans l'esprit des théorèmes de convergence en dynamique holomorphe à plusieurs variables. Ces estimées volumiques nécessitent que la fonction psh $\frac{1}{2n} \log |\text{tr}^2(\rho_\lambda(g_1 \cdots g_n)) - t|$ ne soit pas uniformément proche de $-\infty$, ce qui résulte en l'apparition des conditions globales *i.* et *ii.* L'estimation du maximum de $\frac{1}{2n} \log |\text{tr}^2(\rho_\lambda(g_1 \cdots g_n)) - t|$ sous *i.* utilise un joli argument de théorie des nombres qui nous a été communiqué par Patrice Philippon.

Nous avons également besoin d'établir un théorème de grandes déviations dans (3.9), qui a été simultanément obtenu indépendamment de nous par R. Aoun [Ao].

◇

Cette étude donne donc naissance à une notion assez satisfaisante de courant de bifurcation pour une famille de sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, qui présente toutefois l'inconvénient évident de dépendre du choix d'une mesure μ sur G . Nous allons voir maintenant que des choix naturels peuvent être faits dans certaines situations. Cela nous permettra d'approfondir encore l'analogie avec la dynamique rationnelle, dans un cas qui correspond dans le dictionnaire de Sullivan à celui des espaces de polynômes.

3.4. Représentations du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte.

3.4.1. Soit S une surface topologique compacte de genre $g \geq 2$. On s'intéresse à l'espace des représentations de $G = \pi_1(S, *)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, qui admet une structure de variété algébrique affine complexe⁷. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit algébriquement par conjugaison sur $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$, et le quotient algébrique $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})) // \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ s'appelle la *variété des caractères* $\mathcal{X}(G)$. Concrètement, les coordonnées sur $\mathcal{X}(G)$ sont données par des fonctions de la forme $\rho \mapsto \mathrm{tr}^2(\rho(\gamma))$. On montre que $\mathcal{X}(G)$ est une variété algébrique affine de dimension $6g - 6$, admettant deux composantes irréductibles $\mathcal{X}_0(G)$ et $\mathcal{X}_1(G)$ correspondant aux représentations se relevant (resp. ne se relevant pas) à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ⁸. On montre également que $\mathcal{X}(G)$ est lisse aux paramètres correspondant aux représentations non-élémentaires. On notera $\mathcal{X}^{NE}(G)$ l'ensemble de ces points, et $\mathcal{X}_0^{NE}(G)$, $\mathcal{X}_1^{NE}(G)$ ses restrictions à $\mathcal{X}_0(G)$ et $\mathcal{X}_1(G)$.

Les familles de représentations $\mathcal{X}_0^{NE}(G)$ et $\mathcal{X}_1^{NE}(G)$ vérifient les hypothèses (R1-3) du §3.3.1. Notons simplement Λ l'une de ces familles ; on a donc une décomposition $\Lambda = \mathrm{Bif} \cup \mathrm{Stab}$. Sullivan [Su2] a démontré que Stab est l'ensemble des représentations quasi-fuchsienues.

Fixons maintenant une structure de surface de Riemann sur S . La surface de Riemann correspondante X est hyperbolique et on la munit de sa métrique de Poincaré. L'objet principal de cette section est de montrer que la donnée de cette structure de surface de Riemann permet de construire un courant de bifurcation canonique sur Λ , et d'en explorer quelques propriétés. Il s'agit d'un travail en cours de finalisation [DD2] en collaboration avec Bertrand Deroin.

Pour cela, soit une représentation $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$, et considérons sa suspension $X_\rho = \tilde{X} \times \mathbb{P}^1 / \sim$ où \tilde{X} est le revêtement universel de X (i.e. le disque de Poincaré) et la relation d'équivalence est définie par $(p, z) \sim (p', z')$ s'il existe $\gamma \in G$ (naturellement réalisé comme sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$) tel que $(p', z') = (g(p), \rho(g)(z))$. La projection naturelle $\pi : X_\rho \rightarrow X$ fait de X_ρ un fibré en \mathbb{P}^1 au dessus de X , et le feuilletage horizontal naturel de $\tilde{X} \times \mathbb{P}^1$ descend sur X_ρ en un feuilletage holomorphe à feuilles transverses aux fibres, dont la représentation d'holonomie est ρ . Si γ est un chemin continu tracé sur X , on note h_γ son holonomie $\pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$.

On se fixe également une famille continue de métriques sphériques sur les fibres, et par définition la norme d'une application projective entre fibres est la norme uniforme de sa différentielle.

Rappelons que X est munie d'une structure Riemannienne naturelle (donnée par la métrique de Poincaré), on peut donc y considérer le mouvement Brownien. Si l'on pose Ω_x l'espace des chemins continus $\omega : [0, \infty[\rightarrow X$ tels que $\omega(0) = x$, muni de la convergence uniforme sur les

7. En effet $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est une variété affine car on a l'isomorphisme $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}(3, \mathbb{C})$ donné par la représentation adjointe, i.e. l'action par conjugaison sur les matrices 2×2 complexes de trace nulle.

8. L'obstruction pour ceci se lit dans le groupe $H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

compacts, la mesure de Wiener W_x sur Ω_x est la loi du mouvement Brownien issu de x (normalisé en fixant son générateur infinitésimal comme étant $\frac{1}{2}$ du laplacien de la métrique). On définit la mesure W sur l'espace des chemins continus $\omega : [0, \infty[\rightarrow X$ comme étant la mesure dont les conditionnelles sur les Ω_x sont les W_x et qui se projette sur la mesure de Liouville par $\omega \mapsto \omega(0)$. La mesure W est invariante par le décalage temporel $\sigma_s : \omega(\cdot) \mapsto \omega(\cdot + s)$, donc d'après le théorème sous-additif de Kingman, pour W presque tout chemin la limite suivante existe

$$\chi(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|h_{\omega(0), \omega(t)}\|$$

et ne dépend pas de ω . On définit $\chi_{\text{Brownien}}(\rho)$ l'exposant de Lyapunov ainsi obtenu.

On définit alors le *courant de bifurcation canonique* sur Λ en posant $T_{\text{bif}} = dd^c \chi_{\text{Brownien}}$. Sa propriété fondamentale est la suivante :

Théorème 3.4.1

Soit $\Lambda = \text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ où la surface compacte S est munie d'une structure complexe, comme ci dessus.

Alors la fonction exposant de Lyapunov canonique χ_{Brownien} est psh sur Λ et le support de $T_{\text{bif}} = dd^c \chi_{\text{Brownien}}$ est égal au lieu de bifurcation.

Pour démontrer le théorème, il suffit d'exhiber une mesure μ sur G , vérifiant les conditions (A1-2), et telle que pour tout ρ , $\chi_\mu(\rho) = \chi_{\text{Brownien}}(\rho)$ (à une constante multiplicative près). Il se trouve qu'une telle mesure existe et est donnée par un procédé de discrétisation du mouvement Brownien dû à Furstenberg [Fur2] (et repris notamment par Lyons et Sullivan [LyS]). Un point non-trivial est de démontrer que μ satisfait l'hypothèse d'existence de moments exponentiels (A2).

Il y a une autre famille de chemins naturels sur X : les trajectoires géodésiques. Un argument similaire au précédent montre que si $(x, v) \in S^1(X)$ (fibré unitaire tangent) est générique (au sens de la mesure de Liouville) et $\gamma_{(x,v)}$ désigne le chemin parcourant à vitesse 1 la géodésique issue de (x, v) , alors la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|h_{\gamma(0), \gamma(t)}\|$ existe et ne dépend pas de (x, v) . On note $\chi_{\text{géodésique}}(\rho)$ sa valeur générique.

Ceci donne en fait lieu au même courant de bifurcation, comme le montre la proposition suivante, qui découle des propriétés élémentaires du mouvement Brownien dans le disque de Poincaré.

Proposition 3.4.2

Il existe une constante $v > 0$ ne dépendant que de X telle que $\chi_{\text{Brownien}} = v \chi_{\text{géodésique}}$.

On peut également énoncer les théorèmes d'équidistribution du §3.3.4 en des termes plus géométriques. Fixons $x_0 \in X$ et soit Γ l'ensemble des géodésiques fermées issues de x_0 . C'est un ensemble dénombrable, qui peut se voir comme un sous ensemble du cercle unité de $T_{x_0}X$. Le théorème 3.3.9 admet alors le corollaire suivant :

Théorème 3.4.3

Il existe une suite ε_n tendant vers 0, il existe une suite de mesures ν_n sur Γ , respectivement supportées par l'ensemble des géodésiques de longueur comprise entre $v_n(1 - \varepsilon_n)$ et $v_n(1 + \varepsilon_n)$ (où v est la constante définie à la proposition 3.4.2), telles que si $(\gamma_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ est une suite générique relativement à la mesure produit des ν_n , on a pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2n} [\{\lambda, \text{tr}^2(h_{\gamma_n}) = t\}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_{\text{bif}}.$$

On peut espérer obtenir une description plus précise des mesures ν_n . En effet un théorème classique de Bowen [Bo] affirme que pour tout ε assez petit, si on note $\Gamma_{n\pm\varepsilon}$ l'ensemble des géodésiques de Γ de longueur comprise entre $n - \varepsilon$ et $n + \varepsilon$, et $L_n = \sum_{\gamma \in \Gamma_{n\pm\varepsilon}} \text{long}(\gamma)$, on a

$$\frac{1}{L_n} \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,\varepsilon}} [\gamma] \rightarrow \text{Liouv},$$

où $[\gamma]$ désigne la mesure d'intégration sur γ et Liouv est la mesure de Liouville normalisée. Il est alors naturel de penser que dans le théorème, on doit pouvoir considérer pour ν_n la mesure équidistribuée sur les géodésiques de longueur comprise entre $vn - \varepsilon$ et $vn + \varepsilon$. Pour le moment, nous ne savons pas démontrer ce point.

3.4.2. Cette discussion admet une formulation élégante en termes de structures projectives sur S . Une bonne référence sur ce sujet est l'article de synthèse de D.Dumas [Dum]. Rappelons qu'une *structure projective* sur S est un atlas (U_i, z_i) , où U_i est un ouvert de S et z_i une carte $U_i \rightarrow \mathbb{P}^1$, tel que pour tous i, j , $z_j \circ z_i^{-1}$ est la restriction d'une transformation de Möbius.

Une structure projective induit une structure complexe sur S . Réciproquement, par uniformisation, toute surface de Riemann X admet une structure projective : c'est en effet un quotient de \mathbb{D} par un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ (celle ci n'est pas unique, elle dépend du choix de coordonnées projectives dans \mathbb{D}).

Deux structures projectives σ_1, σ_2 sont dites isomorphes s'il existe un difféomorphisme ϕ de S tel que $\sigma_1 = \phi^* \sigma_2$. L'isomorphisme sera dit *marqué* si ϕ est isotope à l'identité.

Nous noterons \mathcal{P} l'espace des structures projectives sur S , modulo isomorphisme marqué, et $\mathcal{P}(X)$ le sous ensemble de celles induisant la structure de surface de Riemann X (nous parlerons alors de "structures projectives sur la surface de Riemann X ")⁹.

Une structure projective admet une *développante* et une *holonomie*, définies de la façon suivante. Soit σ une structure projective sur S et notons X la surface de Riemann sous-jacente. Soit $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ un relevé de x_0 , et (U_0, z_0) une carte projective contenant x_0 . Si γ est un chemin issu d'un relevé de \tilde{x}_0 , on peut construire le prolongement analytique de z_0 le long de γ , en ajustant au fur et à mesure du passage dans les U_i les cartes z_i à l'aide de transformations de Möbius : par exemple au moment où γ quitte U_0 pour entrer dans U_1 , on continue z_0 par $(z_0 \circ z_1^{-1}) \circ z_1$, et ainsi de suite. On obtient ainsi une application holomorphe $\text{dev}(\sigma) : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$, la développante, qui par prolongement analytique est essentiellement unique, c'est à dire bien définie modulo post-composition par une transformation de Möbius.

Soit maintenant $g \in G$, vu comme groupe des automorphismes du revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$. Alors $\text{dev} \circ g$ est une autre développante, elle est donc de la forme $\text{hol}(g) \circ \text{dev}$. On a ainsi défini une représentation $\text{hol} : G \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, la représentation d'holonomie, et on a la relation d'équivariance $\text{dev} \circ g = \text{hol}(g) \circ \text{dev}$. Cette représentation dépend du choix de la développante. Changer dev en $g_0 \circ \text{dev}$ revient à conjuguer l'holonomie par g_0 .

Au final on obtient une application holomorphe (transcendante) $\text{hol} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{X}(G)$. Un théorème de Gallo, Kapovich et Marden affirme que hol est en fait une surjection $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}_0^{NE}(G)$.

On montre que la différence entre structures projectives compatibles (i.e. induisant la même structure complexe) est mesurée par une différentielle quadratique holomorphe (la

9. On voit qu'à un point X dans l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S)$ correspond un groupe Fuchsien $G_X \subset \text{Aut}(\mathbb{D})$, défini modulo conjugaison dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, et donc un point bien défini de $\mathcal{P}(X)$, la "structure Fuchsienne standard" sur X .

Schwarzienne). Ainsi, $\mathcal{P}(X)$ admet une structure naturelle d'espace affine, dont la direction est l'espace vectoriel $Q(X) = H^0(X, K_X^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{C}^{3g-3}$.

Sur $\mathcal{P}(X)$ on a une fonction exposant de Lyapunov canonique définie par

$$\chi(\sigma) = \chi_{\text{Brownien}}(\text{hol}(\sigma)),$$

et donc la discussion du paragraphe précédent s'applique.

Rappelons qu'il existe dans $\mathcal{P}(X)$ une structure projective particulière : la structure Fuchsienne standard σ_0 , dont l'holonomie est G_X , un groupe Fuchsien uniformisant X . Voici, à titre d'illustration, un argument heuristique justifiant le fait que $\chi(\sigma_0) = \frac{1}{4}$: d'après la théorie de Patterson-Sullivan, pour les grandes valeurs de t , le nombre de points de $G_X \cdot 0$ dans la boule de rayon t (resp. dans la couronne de rayons compris entre $t-1$ et $t+1$) pour la métrique hyperbolique de \mathbb{D} est de l'ordre de e^t . Les pièces d'un pavage par domaine fondamentaux sont isométriques pour la métrique hyperbolique, donc les pièces intersectant la sphère de rayon t sont de taille comparable pour la métrique euclidienne, de l'ordre de e^{-t} . On en déduit que la norme typique de l'holonomie d'une géodésique issue de 0 et de longueur t est de l'ordre de $e^{t/2}$ (attention, la norme de $z \mapsto e^{-t}z$ est $\simeq e^{t/2}$). Finalement, une trajectoire typique du mouvement Brownien pendant un temps t est proche d'une géodésique de longueur $t/2$, et on conclut que $\chi(\sigma_0) = \frac{1}{4}$.

La proposition suivante repose sur le travail de Bonatti et Gomez-Mont [BGM]. Elle est basée sur l'étude la dynamique du feuilletage horizontal sur la suspension $X_{\text{hol}(\sigma)}$ associée à σ .

Proposition 3.4.4

Soit σ une structure projective sur une surface de Riemann X . Pour toute suite p_n dans le revêtement universel, toute suite $r_n \rightarrow \infty$, et tout $z \in \mathbb{P}^1$, la limite

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(B(p_n, r_n))} \# (B(p_n, r_n) \cap \text{dev}^{-1}(z))$$

existe et ne dépend que de σ (boules, rayons et volumes sont considérés relativement à la métrique de Poincaré).

Définition 3.4.5

Le degré de la structure projective σ est $\text{deg}(\sigma) = (2g-2)\delta$, où δ est le degré moyen de la développante¹⁰, défini à la proposition 3.4.4.

On a alors la jolie formule suivante :

Théorème 3.4.6

Avec les notations précédentes, on a $\chi(\sigma) = \frac{\text{deg}(\sigma)}{4(g-1)} + \frac{1}{4}$.

Le théorème découle d'idées de théorie des feuilletages holomorphes, en particulier d'une formule cohomologique pour l'exposant de Lyapunov d'un feuilletage muni d'une mesure harmonique, issue de [Der, DK].

Une première conséquence non-triviale de ce résultat est que le degré est une fonction psh et hölderienne sur $\mathcal{P}(X)$: en effet l'exposant de Lyapunov est une fonction hölderienne des paramètres sous les hypothèses (R1-3) et (A1-2) d'après un théorème de Le Page [LeP].

10. Le facteur $(2g-2)$ sert à ce que cette notion de degré se comporte bien par revêtement.

À partir de la structure Fuchsienne standard, on construit classiquement un plongement de l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ de la façon suivante : Bers a démontré que si $X' \in \text{Teich}(S)$, il existe un groupe Kleinien $\Gamma_{X,X'}$ dont l'ensemble de discontinuité a exactement deux composantes, homéomorphes à des disques, et telles que l'action de $\Gamma_{X,X'}$ sur ces disques uniformise respectivement X et X' (munie de l'orientation opposée). Les $\Gamma_{X,X'}$, X' variant dans $\text{Teich}(S)$ induisent une famille de structures projectives sur X , réalisant un plongement de $\text{Teich}(S)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ appelé *plongement de Bers* ou *tranche de Bers* de l'espace de Teichmüller.

On vérifie que la tranche de Bers $B(X)$ est la composante de la structure Fuchsienne σ_0 dans le lieu de stabilité. Le point intéressant dans notre contexte est que McMullen propose dans [McM3] de voir la tranche de Bers comme la traduction dans le dictionnaire de Sullivan au lieu de connexité dans les espaces de polynômes. De ce point de vue, la formule du théorème 3.4.6 peut être vu comme l'analogie de la formule de Manning-Przytycki-Sibony (2.14).

Corollaire 3.4.7

- *L'exposant de Lyapunov canonique est minimal et vaut $\frac{1}{4}$ sur l'image du plongement de Bers.*
- *$B(X) \subset \mathcal{P}(X)$ est polynomialement convexe.*

La deuxième assertion du corollaire est un résultat originellement dû à Shiga [Sh].

Une autre conséquence classique de la formule (2.14) est le fait que la dimension de la mesure harmonique d'un ensemble de Julia polynomial connexe est 1. Il en est de même ici :

Corollaire 3.4.8 (Makarov [Mak], Przytycki-Urbanski-Zdunik[PUZ])

La dimension de la mesure harmonique de l'ensemble limite d'une représentation quasi-fuchsienne est 1.

La démonstration utilise une relation entre entropie, exposant de Lyapunov et dimension établie dans ce contexte par Ledrappier [Led]. Comme l'entropie ne dépend que de (G, μ) et l'exposant est constant sur la tranche de Bers, la dimension de la mesure harmonique également. Pour conclure, il suffit d'observer que pour la structure Fuchsienne standard, la dimension de la mesure harmonique est 1. □

Bibliographie

- [Ao] Aoun, Richard. *Random subgroups of linear groups are free*. Preprint (2010), arXiv :1005 :3445, à paraître à Duke Math. J.
- [BB1] Bassanelli, Giovanni ; Berteloot, François. *Bifurcation currents in holomorphic dynamics on \mathbf{P}^k* . J. Reine Angew. Math. 608 (2007), 201–235.
- [BB2] Bassanelli, Giovanni ; Berteloot, François. *Bifurcation currents and holomorphic motions in bifurcation loci*. Math. Ann. 345 (2009), 1–23.
- [BB3] Bassanelli, Giovanni ; Berteloot, François. *Distribution of polynomials with cycles of a given multiplier*. Nagoya Math. J. 201 (2011), 23–43.
- [Be] Bedford, Eric. *Survey of pluri-potential theory*. Several complex variables (Stockholm, 1987/1988), 48–97, Math. Notes, 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [BeDi] Bedford, Eric ; Diller, Jeffrey. *Energy and invariant measures for birational surface maps*. Duke Math. J. 128 (2005), no. 2, 331–368.
- [BF] Bedford, Eric ; Fornæss, John Erik. *Counterexamples to regularity for the complex Monge-Ampère equation*. Invent. Math. 50 (1979), 129–134.
- [BK] Bedford, Eric ; Kalka, Morris *Foliations and complex Monge-Ampère equations*. Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), 543–571.
- [BJ] Bedford, Eric ; Jonsson, Mattias. *Dynamics of regular polynomial endomorphisms of \mathbb{C}^k* . Amer. J. Math. 122 (2000), 153–212.
- [BS1] Bedford, Eric ; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity*. Invent. Math. 103 (1991), 69–99.
- [BS3] Bedford, Eric ; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure*. Math. Ann. 294 (1992), 395–420.
- [BLS1] Bedford, Eric ; Lyubich, Mikhail ; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents*. Invent. Math. 112 (1993), 77–125.
- [BLS2] Bedford, Eric ; Lyubich, Mikhail ; Smillie, John. *Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2* . Invent. Math. 114 (1993), 277–288.
- [BS5] Bedford, Eric ; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . V. Critical points and Lyapunov exponents*. J. Geom. Anal. 8 (1998), 349–383.
- [BS6] Bedford, Eric ; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VI. Connectivity of J* . Ann. of Math. (2) 148 (1998), 695–735.
- [BS7] Bedford, Eric ; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VII. Hyperbolicity and external rays*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999), 455–497.
- [BT] Bedford, Eric ; Taylor, B. Alan. *Fine topology, Šilov boundary, and $(dd^c)^n$* . J. Funct. Anal. 72 (1987), no. 2, 225–251.
- [BSib] Berndtsson, Bo ; Sibony, Nessim. *The $\bar{\partial}$ equation on a positive current*. Invent. Math. 147 (2002), 371–428.
- [Bers] Bers, Lipman. *Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups*. J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986), no. 1, 73–76.

- [BeDu] Berteloot, François; Dupont, Christophe. *Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green*. Comment. Math. Helv. 80 (2005), 433–454.
- [BFH] Bielefeld, Ben; Fisher, Yuval; Hubbard, John H. *The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems*. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 4, 721–762.
- [BV] Bocker-Neto, Carlos; Viana, Marcelo. *Continuity of Lyapunov Exponents for Random 2D Matrices*. Preprint, arxiv :1012 :0872.
- [BGM] Bonatti, Christian; Gómez-Mont, Xavier. *Sur le comportement statistique des feuilles de certains feuilletages holomorphes*. Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2, 15–41, Monogr. Enseign. Math., 38, Enseignement Math., Geneva, 2001.
- [BEGZ] Boucksom, Sébastien; Eyssidieux, Philippe; Guedj, Vincent; Zeriahi, Ahmed. *Monge-Ampère equations in big cohomology classes*. Acta Math. 205 (2010), 199–262.
- [BL] Bougerol, Philippe; Lacroix, Jean. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*. Progress in Probability and Statistics, 8. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [Bo] Bowen, Rufus. *The equidistribution of closed geodesics*. Amer. J. Math. 94 (1972), 413–423.
- [Bra] Branner, Bodil. *Cubic polynomials : turning around the connectedness locus*. in *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, 391–427, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.
- [BH1] Branner, Bodil; Hubbard, John H. *The iteration of cubic polynomials. I. The global topology of parameter space*. Acta Math. 160 (1988), no. 3-4, 143–206.
- [BH2] Branner, Bobil; Hubbard, John H. *The iteration of cubic polynomials. II. Patterns and parapatterns*. Acta Math. 169 (1992), no. 3-4, 229–325.
- [Bri] Briend, Jean-Yves. *Propriété de Bernoulli pour les extensions naturelles des endomorphismes de \mathbf{CP}^k* . Ergodic Theory Dynamical Systems 21 (2001), 1001-1007.
- [BrDu1] Briend, Jean-Yves; Duval, Julien. *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de \mathbf{CP}^k* . Acta Math. 182, 143–157, (1999).
- [BrDu2] Briend, Jean-Yves; Duval, Julien. *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre des endomorphismes de \mathbf{CP}^k* . Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 93 (2001), 145-159.
- [Bro] Brolin, Hans. *Invariant sets under iteration of rational functions*. Ark. Mat. 6 1965 103–144 (1965).
- [Bru] Brunella, Marco. *Minimal models of foliated algebraic surfaces*. Bull. Soc. Math. France 127 (1999), 289-305.
- [Buff] Buff, Xavier. *Courants dynamiques pluripolaires*. Annales fac. sc. Toulouse, à paraître.
- [BE] Buff, Xavier; Epstein, Adam. *Bifurcation measure and postcritically finite rational maps*. Complex dynamics, 491–512, A K Peters, Wellesley, MA, 2009.
- [Ca] Cantat, Serge. *Dynamique des automorphismes des surfaces K3*. Acta Math. 187 (2001) 1-57.
- [CT] Chen, Xiuxiong; Tian Gang. *Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 107 (2008), 1–107.
- [Dem1] Demailly, Jean-Pierre. *Courants positifs extrémaux et conjecture de Hodge*. Invent. Math. 69 (1982), 347-374.
- [Dem2] Demailly, Jean-Pierre. *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*. Complex analysis and geometry, 115-193, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993.
- [DeM1] DeMarco, Laura. *Dynamics of rational maps : a current on the bifurcation locus*. Math. Res. Lett. 8 (2001), no. 1-2, 57–66.
- [DeM2] DeMarco, Laura. *Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity*. Math. Ann. 326 (2003), no. 1, 43–73.

- [Der] Deroin, Bertrand. *Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 1, 57–75.
- [DD1] Deroin, Bertrand; Dujardin, Romain. *Random walks, Kleinian groups, and bifurcation currents*. Prépublication (2010).
- [DD2] Deroin, Bertrand; Dujardin, Romain. *Lyapunov exponents for surface group representations*. En préparation (2011).
- [DK] Deroin, Bertrand; Kleptsyn, Victor. *Random conformal dynamical systems*. GAFA 17 (2007), 1043–1105.
- [dT1] De Thélin, Henry. *Sur la laminarité de certains courants*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (2004), 304–311.
- [dT2] De Thélin, Henry. *Un phénomène de concentration de genre*. Math. Ann. 332 (2005), 483–498.
- [dT3] De Thélin, Henry. *Sur la construction de mesures selles*. Ann. Inst. Fourier, 56 (2006), 337–372.
- [dT4] De Thélin, Henry. *Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes*. Invent. Math. 172 (2008), 89–116.
- [dT5] De Thélin, Henry. *Un critère de laminarité locale en dimension quelconque*. Amer. J. Math. 130 (2008), 187–205.
- [dTV] De Thélin, Henry; Vigny, Gabriel. *Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps*. Preprint (2008). Mémoires de la SMF, to appear.
- [Dil] Diller, Jeffrey. *Dynamics of birational maps of \mathbb{P}^2* . Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 721–772.
- [DDG1] Diller, Jeffrey; Dujardin, Romain; Guedj, Vincent. *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree I : from cohomology to currents*. Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), pp. 521–562.
- [DDG2] Diller, Jeffrey; Dujardin, Romain; Guedj, Vincent. *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree II : energy and invariant measure*. Comment. Math. Helvet. 86 (2011), pp. 277–316.
- [DDG3] Diller, Jeffrey; Dujardin, Romain; Guedj, Vincent. *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree III : geometric currents and ergodic theory*. Ann. Scient. ENS 43 (2010) 235–278.
- [DiF] Diller, Jeffrey; Favre, Charles. *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*. Amer. J. Math. 123 (2001), no. 6, 1135–1169.
- [DiG] Diller, Jeffrey; Guedj, Vincent. *Regularity of dynamical Green functions*. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 9, 4783–4805.
- [Din] Dinh, Tien Cuong. *Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires*. J. Geom. Anal. 15 (2005), 207–227.
- [DDS] Dinh, Tien Cuong; Dujardin, Romain; Sibony, Nessim. *On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in \mathbb{C}^2* . Math. Ann. 333 (2005) pp. 703–739.
- [DNS] Dinh, Tien-Cuong; Nguyen, Viêt-Anh; Sibony, Nessim. *Dynamics of horizontal-like maps in higher dimension*. Adv. Math. 219 (2008), no. 5, 1689–1721.
- [DS1] Dinh, Tien Cuong; Sibony, Nessim. *Dynamique des applications d'allure polynomiale*. J. Math. Pures Appl. (9) 82 (2003), 367–423.
- [DS2] Dinh, Tien Cuong; Sibony, Nessim. *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*. Ann. of Math. (2) 161 (2005), 1637–1644.
- [DS3] Dinh, Tien Cuong; Sibony, Nessim. *Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds*. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 291–312

- [DS3] Dinh, Tien Cuong ; Sibony, Nessim. *Regularization of currents and entropy*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (2004), 959–971.
- [DS4] Dinh, Tien Cuong ; Sibony, Nessim. *Geometry of currents, intersection theory and dynamics of horizontal-like maps*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), 423–457.
- [DS5] Dinh, Tien-Cuong ; Sibony, Nessim. *Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics*. Acta Math. 203 (2009), 1–82.
- [DS6] Dinh, Tien Cuong ; Sibony, Nessim. *Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings*. in Holomorphic dynamical systems, 165–294, Lecture Notes in Math., 1998, Springer, Berlin, 2010.
- [DS6] Dinh, Tien Cuong ; Sibony, Nessim. *Super-potentials for currents on compact Kähler manifolds and dynamics of automorphisms*. J. Algebraic Geom. 19 (2010), no. 3, 473–529.
- [DH1] Douady, Adrien ; Hubbard, John H. *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publications Mathématiques d’Orsay. Université de Paris-Sud, Orsay, 1985.
- [DH2] Douady, Adrien ; Hubbard, John H. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 287–343.
- [D_THESE] Dujardin, Romain. *Dynamique d’applications non polynomiales et courants laminaires*. Thèse de l’Université Paris Sud, 2002.
- [D_LAMIN] Dujardin, Romain. *Laminar currents in \mathbb{P}^2* , Math. Ann. 325 (2003), pp. 745–765.
- [D_HL] Dujardin, Romain. *Hénon-like mappings in \mathbb{C}^2* , Amer. J. Math. 126 (2004), pp. 439–472.
- [D_INTERS] Dujardin, Romain. *Sur l’intersection des courants laminaires*, Publ. Mat. 48 (2004), pp. 107–125.
- [D_STRUCT] Dujardin, Romain. *Structure properties of laminar currents on \mathbb{P}^2* . J. Geom. Anal., 15 (2005), pp. 25–47.
- [D_BIRAT] Dujardin, Romain. *Laminar currents and birational dynamics*. Duke Math. J. 131, no. 2 (2006), 219–247.
- [D_CONNEX] Dujardin, Romain. *Some remarks on the connectivity of Julia sets for 2-dimensional diffeomorphisms*. in Complex Dynamics, 63–84, Contemporary Mathematics, 396 (2006).
- [D_APPROX] Dujardin, Romain. *Approximation des fonctions lisses sur certaines laminations*. Indiana Univ. Math. J. 55 (2006), 579–592.
- [D_LYAP] Dujardin, Romain. *Continuity of Lyapunov exponents for polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2* . Ergodic Theory and Dynamical Systems 27 (2007), 1111–1133.
- [D_CUBIC] Dujardin, Romain. *Cubic polynomials : a measurable view on parameter space*. in Complex Dynamics and Friends, A K Peters, Wellesley, MA, 2009.
- [D_WERMER] Dujardin, Romain. *Wermer examples and currents*. GAFA 20 (2010), pp 498–415.
- [D_FATOU] Dujardin, Romain. *Fatou directions along the Julia set for endomorphisms of $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* . Prépublication (2010).
- [DF] Dujardin, Romain ; Favre, Charles. *Distribution of rational maps with a preperiodic critical point*. Amer. J. Math. 130 (2008), 979–1032.
- [DG] Dujardin, Romain ; Guedj, Vincent. *Homogeneous Monge-Ampère equations and foliations by holomorphic disks*. Chapitre du livre *Complex Monge-Ampère equations and geodesics in the space of Kähler metrics*, Lecture Notes in Mathematics (2038), à paraître.
- [Dum] Dumas, David. *Complex projective structures*. Handbook of Teichmüller theory. Vol. II, 455–508, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [DuS] Duval, Julien ; Sibony, Nessim. *Polynomial convexity, rational convexity, and currents*. Duke Math. J. 79 (1995), 487–513.

- [F] Favre, Charles. *Points périodiques d'applications birationnelles de \mathbb{P}^2* . Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), no. 4, 999–1023.
- [FJ1] Favre, Charles; Jonsson, Mattias. *Eigenvaluations*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 40 (2007), 309–349.
- [FJ2] Favre, Charles; Jonsson, Mattias. *Dynamical compactifications of \mathbb{C}^2* . Preprint (2007). Annals of Math. 173 (2011), 211–248.
- [FRL] Favre Charles; Rivera-Letelier, Juan. *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*. Math. Ann. 335 (2006), 311–361.
- [FL] Fornæss, John Erik; Levenberg, Norman. *On thick polynomial hulls without complex structure* Complex analysis in several variables. (edited by Th. M. Rassias.) Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, Florida, USA, 1999, pp. 65–74.
- [FWW] Fornæss, John Erik; Wang, Yinxia; Wold, Erlend Fornæss. *Laminated currents*. Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), no. 5, 1465–1478.
- [FS1] Fornæss, John Erik; Sibony, Nessim *Complex dynamics in higher dimension. I* Astérisque 222 (1994), 5, 201–231.
- [FS2] Fornæss, John Erik; Sibony, Nessim *Complex dynamics in higher dimension. II*, Modern methods in complex analysis, Ann. of Math. Studies 135–182. Princeton Univ. Press.
- [FS3] Fornæss, John Erik; Sibony, Nessim *Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou-Bieberbach domains*. Duke Math. J. 65 (1992), 345–380.
- [FS4] Fornæss, John Erik; Sibony, Nessim. *Hyperbolic maps on \mathbb{P}^2* . Math. Ann. 311 (1998), 305–333.
- [FLM] Freire, Alexandre; Lopes, Artur; Mañé, Ricardo *An invariant measure for rational maps*. Bol. Soc. Brasil. Mat. 14 (1983), 45–62.
- [Fr] Friedland, Shmuel. *Entropy of polynomial and rational maps*. Ann. of Math. (2) **133** (1991), 359–368.
- [FM] Friedland, Shmuel; Milnor, John. *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*. Ergodic Theory Dynam. Systems 9 (1989), 67–99.
- [Furm] Furman, Alex. *Random walks on groups and random transformations*. Handbook of dynamical systems, Vol. 1A, 931–1014, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Fur1] Furstenberg, Hillel *Noncommuting random products*. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 377–428.
- [Fur2] Furstenberg, Hillel. *Random walks and discrete subgroups of Lie groups*. 1971 Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1 pp. 1–63 Dekker, New York
- [Ga] Gauthier, Thomas. *Strong-bifurcation loci of full Hausdorff dimension*. Prépublication, arxiv :1103.2656
- [GŚw] Graczyk, Jacek; Świątek, Gregorz. *Harmonic measure and expansion on the boundary of the connectedness locus*. Invent. Math. 142 (2000), no. 3, 605–629.
- [Gr] Gromov, Mikhail. *On the entropy of holomorphic maps*. Enseign. Math. (2) 49 (2003), 217–235.
- [Gu1] Guedj, Vincent. *Dynamics of polynomial mappings of \mathbb{C}^2* . Amer. J. Math. **124** (2002), no. 1, 75–106.
- [Gu2] Guedj, Vincent. *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*. Ann. of Math. 161 (2005).
- [Gu3] Guedj, Vincent. *Propriétés ergodiques des applications rationnelles*. Panoramas et synthèses, à paraître.
- [GZ] Guedj, Vincent; Zeriahi, Ahmed. *The weighted Monge-Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions*. J. Funct. Anal. 250 (2007), 442–482.

- [Gui] Guivarc'h, Yves. *Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire*. Ergodic Theory Dynam. Systems 10 (1990), no. 3, 483–512.
- [He] Herman, Michael. *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2* Comment. Math. Helv. 58 (1983), no. 3, 453–502.
- [HO1] Hubbard, John H. ; Oberste-Vorth, Ralph W. *Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 79 (1994), 5–46.
- [HO2] Hubbard, John H. ; Oberste-Vorth, Ralph W. *Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials*. Real and complex dynamical systems, 89–132, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 464, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [HP] Hubbard, John H. ; Papadopol, Peter *Superattractive fixed points in \mathbf{C}^n* . Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 1, 321–365.
- [Ki1] Kiwi, Jan. *Combinatorial continuity in complex polynomial dynamics*. Proc. London Math. Soc. (3) 91 (2005), no. 1, 215–248.
- [Ki2] Kiwi, Jan. *Puiseux series, polynomial dynamics, and iteration of complex cubic polynomials* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), 1337–1404.
- [Kr] Kruzhilin, N.G. *Foliations connected with the Monge-Ampère equation in Hartogs domains*. Math. USSR Izvestiya **25** (1985), 419–427.
- [Led] Ledrappier, François. *Une relation entre entropie, dimension et exposant pour certaines marches aléatoires*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), no. 8, 369–372.
- [LedS] Ledrappier, François; Strelcyn, Jean-Marie. *A proof of the estimation from below in Pesin's entropy formula*. Ergodic Theory Dynam. Systems 2 (1982), 203-219 (1983).
- [Lel1] Lelong, Pierre. *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*. Gordon & Breach, 1968.
- [Lel2] Lelong, Pierre. *Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés*. Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1971-1972, pp. 112–131. Lecture Notes in Math., Vol. 332, Springer, Berlin, 1973.
- [LeP] Le Page, Émile. *Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 25 (1989), no. 2, 109–142.
- [Lev] Levin, Gennadi M. *On the theory of iterations of polynomial families in the complex plane*. J. Soviet Math. 52 (1990), no. 6, 3512–3522.
- [LyS] Lyons, Terry ; Sullivan, Dennis. *Function theory, random paths and covering spaces*. J. Differential Geom. 19 (1984), no. 2, 299–323.
- [Ly1] Lyubich, Mikhail *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*. Ergodic Theory Dynam. Systems 3 (1983), 351-385.
- [Ly2] Lyubich, Mikhail Yu. *Some typical properties of the dynamics of rational mappings*. Russian Math. Surveys 38 :5 (1983), 154–155.
- [Mak] Makarov, N. G. *On the distortion of boundary sets under conformal mappings*. Proc. London Math. Soc. (3) 51 (1985), no. 2, 369–384.
- [Mañé] Mañé, Ricardo. *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps*. Dynamical systems, Valparaiso 1986, 86-117, Lecture Notes in Math., 1331, Springer, Berlin, 1988.
- [Mann] Manning, Anthony. *The dimension of the maximal measure for a polynomial map*. Ann. of Math. (2) 119 (1984), 425-430.

- [MSS] Mañé, Ricardo ; Sad, Paulo ; Sullivan, Dennis. *On the dynamics of rational maps*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 16 (1983), 193–217.
- [McM1] McMullen, Curtis T. *The motion of the maximal measure of a polynomial*. Prépublication (1985).
- [McM2] McMullen, Curtis T. *Cusps are dense*. Ann. of Math. (2) 133 (1991), 217–247.
- [McM3] McMullen, Curtis T. *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*. Annals of Mathematics Studies, 142. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [McMS] McMullen, Curtis T. ; Sullivan, Dennis P. *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system*. Adv. Math. 135 (1998), 351–395.
- [Mi] Milnor, John. *On cubic polynomials with periodic critical points*. in Complex Dynamics and Friends, A K Peters, Wellesley, MA, 2009. (the preprint version was issued in 1991).
- [OW] Ornstein, Donald ; Weiss, Benjamin. *On the Bernoulli nature of systems with some hyperbolic structure*. Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), 441–456.
- [Ph] Pham, Ngoc-Mai. *Lyapunov exponents and bifurcation current for polynomial-like maps*. Preprint (2005), arxiv math :0512557.
- [Pr] Przytycki, Feliks. *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map*. Invent. Math. 80 (1985), 161–179.
- [PUZ] Przytycki, Feliks ; Urbanski, Mariusz ; Zdunik, Anna. *Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I*. Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 1, 1–40.
- [Sh] Shiga, Hiroshige. *On analytic and geometric properties of Teichmüller spaces*. J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984), no. 3, 441–452.
- [Sib1] Sibony, Nessim. *Iteration of polynomials*. notes de cours (non publiées), UCLA, 1984.
- [Sib2] Sibony, Nessim. *Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k* . Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), Panoramas et Synthèses, 8, 1999.
- [SW] Sibony, Nessim, Wong, Pit Mann. *Some results on global analytic sets*. Séminaire Lelong-Skoda (Analyse). Années 1978/79, pp. 221–237, Lecture Notes in Math., 822, Springer, Berlin, 1980.
- [Sm] Smirnov, Stanislav. *Symbolic dynamics and Collet-Eckmann conditions*. Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 7, 333–351.
- [Su1] Sullivan, Dennis. *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*. Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 401–418.
- [Su2] Sullivan, Dennis. *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups*. Acta Math. 155 (1985), no. 3-4, 243–260.
- [U] Ueda, Tetsuo. *Fatou sets in complex dynamics on projective spaces*. J. Math. Soc. Japan 46 (1994), 545–555.
- [V] Vigny, Gabriel. *Dynamics semi-conjugated to a subshift for some polynomial mappings in \mathbb{C}^2* . Publ. Mat. 51 (2007), 201–222.
- [W] Wermer, John. *Polynomially convex hulls and analyticity*. Ark. Mat. 20 (1982), 129–135.
- [X] Xie, Junyi. Communication personnelle (2011).
- [Y] Yamagishi, Yoshikazu. *On the local convergence of Newton’s method to a multiple root*. J. Math. Soc. Japan 55 (2003), 897–908.