

Compléments d'analyse

LU2MA213

Romain Dujardin

2^{ème} année de Licence de Mathématiques
Sorbonne Université

Ce polycopié reprend et étend celui qui m'a été offert comme cadeau de fin d'année par un groupe d'étudiants des promotions 2022-2023 et 2023-2024. Un grand merci aux rédacteurs Luc Saccoccio-Le Guennec, Justin Carel, Henri Guillaume et Paul Montobbio (22/23), et Graham Foote et Seoyeon Shin (23/24).

Table des matières

1	Approximation uniforme des fonctions	3
1.1	Continuité uniforme et applications	3
1.2	Théorème de Weierstraß	6
1.3	Convolution	8
1.4	Théorème de Stone-Weierstraß	11
1.5	Complément : théorème d'Ascoli	12
1.6	Exercices	14
1.7	Solutions des exercices	17
2	Fonctions lisses et réelles-analytiques	20
2.1	Exemples de fonctions lisses	20
2.2	Fonctions développables en séries entière	22
2.3	Fonctions réelles-analytiques	25
2.4	Exercices	29
2.5	Solutions	30
3	Problèmes de révision	33
3.1	Développement de la fonction tangente	33
3.2	Phénomène de Runge	34
3.3	Autour du théorème de Denjoy-Carleman	36
4	Courbes paramétrées	39
4.1	Notion de courbe plane	39
4.2	Étude d'une courbe paramétrée	41
4.3	Propriétés métriques des courbes planes, I : longueur	44
4.4	Propriétés métriques des courbes planes, II : courbure	47
4.5	Exercices	51
4.6	Solutions	52
5	Compléments de topologie	55
5.1	Les objets de base	55
5.2	Connexité	58
5.3	Compacité	62

5.4	Exhaustions, recouvrements localement finis et partitions de l'unité	67
5.5	Ensemble de Cantor	70
5.6	Exercices	74
5.7	Solutions	77
6	Fonctions analytiques complexes	81
6.1	Définitions et propositions de base	81
6.2	Dérivation au sens complexe	81
6.3	Principes des zéros isolés et du prolongement analytique	83
6.4	Principe du maximum et applications	84
6.5	Exponentielle et logarithme	85
6.6	Théorème de l'application ouverte	87
6.7	Exercices	88
6.8	Solutions	89
7	Homotopie, ouverts simplement connexes, topologie plane	91
7.1	Homotopie et relèvements	91
7.2	Détermination du logarithme, le retour	92
7.3	Indice d'une courbe par rapport a un point	94
7.4	Compléments	95
7.5	Exercices	96
7.6	Solutions	97

Chapitre 1

Approximation uniforme des fonctions

On rencontre souvent des situations en analyse où l'on travaille avec une fonction f peu régulière : continue, voire plus généralement mesurable (L^1 , L^2 , etc.), et l'on souhaite profiter d'outils réservés à des fonctions de plus grande régularité. On applique alors le principe suivant : si la propriété que l'on cherche à démontrer est stable par convergence pour une certaine topologie (convergence uniforme, convergence dominée, etc.), on peut approximer f , pour cette topologie, par une fonction plus régulière, résoudre le problème pour cette fonction, puis passer à la limite¹.

En pratique, dans ce chapitre, nous travaillerons le plus souvent avec une fonction continue sur un compact (en général un intervalle) et nous verrons qu'il est possible d'approcher f par des fonctions arbitrairement régulières (le summum étant l'approximation par des polynômes).

Rappel 0.1. Nous aurons besoin de la notion de convergence uniforme. On rappelle que la **norme uniforme** d'une fonction f bornée de E à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} (ou même plus généralement un espace normé) est définie par $\|f\|_E = \sup_{x \in I} |f(x)|$, et on dit qu'une suite de fonctions bornées (f_n) sur E **converge uniformément** vers f lorsque $\|f_n - f\|_E \rightarrow 0$. Ici a priori E est un ensemble quelconque, mais en pratique on prendra toujours pour E un intervalle de \mathbb{R} ou un compact de \mathbb{R}^d . La propriété fondamentale de la convergence uniforme est qu'elle **respecte les limites**. Par exemple une limite uniforme de fonctions continues à valeurs réelles ou complexes est continue. Mais plus généralement, si pour tout n on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$, alors la suite (a_n) converge (pourquoi ?) et $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Attention la convergence uniforme de (f_n) ne dit **rien** sur le comportement de la suite des dérivées f'_n .

1.1 Continuité uniforme et applications

Définition 1.1. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$) est dite *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \Omega^2, \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

La notation η_ε vient souligner que η ne dépend que de ε et pas de x : c'est exactement le sens du mot "uniforme".

Exemple 1.2. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont uniformément continues sur \mathbb{R} (faire l'exercice !). Inversement $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto e^x$ ne le sont pas.

On peut quantifier la définition précédente en introduisant le **module de continuité** de f

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| \quad \text{ainsi que} \quad \omega_f(\delta, x) = \sup_{|x-y| < \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. C'est une illustration du **Théorème du parapluie** de Mickaël Launay [3], un livre chaudement recommandé par ailleurs.

L'uniforme continuité signifie alors simplement que $\omega(\delta)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0 (pourquoi?). Si on spécifie plus précisément ω , on obtient des classes de fonctions "quantitativement continues".

Exemple 1.3. On dit que f est **lipschitzienne** quand $\omega(\delta) = O(\delta)$ et **α -höldérienne** si $\omega_f(\delta) = O(\delta^\alpha)$.

Théorème 1.4 (Inégalité des accroissements finis). Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie et différentiable sur un intervalle I , et telle que $|f'| \leq M$ sur I est M -Lipschitzienne.

Remarque 1.5. Comment se formule l'énoncé précédent pour une fonction de plusieurs variables ?

Théorème 1.6 (Heine). Toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ une telle fonction. Si f n'est pas uniformément continue, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n il existe $x_n, y_n \in K$ pour lesquels $d(x_n, y_n) \leq 1/n$ mais $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Par compacité on peut extraire une sous suite (n_j) telle que (x_{n_j}) et (y_{n_j}) convergent (pourquoi?) vers une limite commune $x \in X$, ce qui engendre une absurdité :

$$0 = d(f(x), f(y)) \xleftarrow{n \rightarrow \infty} d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \geq \varepsilon > 0. \quad \square$$

Définition 1.7.

- Une subdivision d'un intervalle $I = [a, b]$ (ou $]a, b[$) est une suite finie strictement croissante $x_0 < \dots < x_n$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.
- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite constante par morceaux, ou en escalier, s'il existe une subdivision (x_i) pour laquelle f est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.
- Plus généralement une fonction est dite XXX (=continue, C^1 , etc.) par morceaux s'il existe une subdivision (x_i) telle que pour tout $0 \leq i < n$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est la restriction à $]x_i, x_{i+1}[$ d'une fonction XXX sur $[x_i, x_{i+1}]$.

La définition quelque peu alambiquée du troisième item (pourquoi ne pas demander simplement que f soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$?) vise à éviter des fonctions ayant des singularités aux extrémités des intervalles de la subdivision, du type $1/(x - x_i)$.

Proposition 1.8. Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle compact est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration. Voir l'exercice 1.6. □

Une application importante de la proposition précédente est la construction de l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues par morceaux : on définit d'abord l'intégrale pour les fonctions en escalier et on vérifie que celle-ci vérifie les propriétés usuelles : linéarité, positivité, relation de Chasles, etc. Puis, si f est continue par morceaux, on pose

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

où (f_n) est une suite de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f . On vérifie que cette suite converge (par critère de Cauchy) et ne dépend pas du choix de (f_n) .

Remarque 1.9. Ce raisonnement est un cas particulier du théorème de prolongement des applications continues, appliqué à $f \mapsto \int_a^b f$ (voir l'exercice 1.5).

Un avantage de cette approche par rapport à l'intégrale de Riemann vue en L1 (ou même l'intégrale de Lebesgue) est que la fonction f peut être à valeurs dans un espace vectoriel normé complet arbitraire.

Remarque 1.10. Le théorème fondamental de l'analyse affirme que si f est continue $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$F : x \mapsto \int_a^x f$$

(qui vient d'être définie ci-dessus) est dérivable, de dérivée f . En particulier, toute fonction continue admet une primitive. On ne rappellera jamais assez que l'existence de primitives découle de la construction de l'intégrale, et non l'inverse!

Théorème 1.11. *Toute fonction continue sur I est limite uniforme d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux.*

Démonstration. On considère la subdivision régulière (x_k) définie par $x_k := a + k \frac{b-a}{n}$. et on pose g_n la fonction affine par morceaux telle que pour tout k on a $g_n(x_k) = f(x_k)$ (i.e. son graphe est une suite de segments reliant $(x_k, f(x_k))$ à $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$). Vérifions que (g_n) converge uniformément vers f . Pour $\varepsilon > 0$, par le théorème de Heine il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Prenons $n \geq N$, où $N \in \mathbb{N}$ est tel que $\frac{b-a}{N} < \frac{\eta}{3}$ et montrons que $|g_n - f| < \varepsilon$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Remarquons que g_n est monotone sur cet intervalle car elle est affine. Ainsi pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, on se trouve dans un des deux cas suivants :

$$g_n(x_k) \leq g_n(x) \leq g_n(x_{k+1}) \text{ ou } g_n(x_{k+1}) \leq g_n(x) \leq g_n(x_k).$$

Donc $f(x_k) - f(x) \leq g_n(x) - f(x) \leq f(x_{k+1}) - f(x)$ ou le contraire. Dans tous les cas, comme on a $|x_k - x| < \eta$ ou $|x_{k+1} - x| < \eta$, on conclut $|g_n(x) - f(x)| \leq \max(|f(x_{k+1}) - f(x)|, |f(x_k) - f(x)|) < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1.12. *Toute fonction \mathcal{C}^0 est limite uniforme de fonctions \mathcal{C}^1 .*

Démonstration. (Esquisse). On lisse les coins de la fonction affine par morceaux précédente en interpolant par exemple avec des polynômes. Les détails sont laissés à la lectrice. (Noter qu'on ne peut pas y arriver avec des polynômes de degré 2 car il faut 4 paramètres pour interpoler une fonction et sa dérivée en deux points.) \square

Définition 1.13. *Une fonction f est dite réglée si elle est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Théorème 1.14. *Une fonction $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point.*

Démonstration. L'implication directe est conséquence immédiate du fait que toute fonction en escalier est réglée, et que la convergence uniforme respecte les limites.

Pour la réciproque on pose $\varepsilon > 0$. Pour tout x de $[a, b]$ il existe des voisinages à gauche et droite $V_{x-} =]x - \delta, x[$ et $V_{x+} =]x, x + \delta[$ vérifiant

$$\forall y, z \in V_{x-} \text{ ou } \forall y, z \in V_{x+}, |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

Recollons ces demi-voisinages en $V_x = V_{x-} \cup \{x\} \cup V_{x+}$. Alors $[a, b]$ est contenu dans l'union des V_x , et par le théorème de Borel-Lebesgue ci-dessous, il existe un nombre fini de points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{x_i}.$$

Fabriquons une subdivision (y_i) de $[a, b]$ en incluant a, b , les x_i , ainsi que toutes les extrémités des intervalles V_{x_i} . Par hypothèse, pour tout i et tout $z, z' \in]y_i, y_{i+1}[$, on a $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. On fixe alors g_ε constante sur chaque $]y_i, y_{i+1}[$ de valeur $f\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$. C'est une fonction en escalier vérifiant $\|g_\varepsilon - f\| \leq \varepsilon$. \square

Remarque 1.15. La notion de fonction Riemann-intégrable est plus générale que celle de fonction réglée : on demande en un sens que toutes les sommes de Riemann convergent. En pratique, l'intégrale de Lebesgue remplace tous ces concepts par une unique définition plus abstraite, mais aussi plus puissante.

Le théorème suivant est un cas particulier de la caractérisation de Borel-Lebesgue des compacts, qui sera démontrée au chapitre de topologie.

Théorème 1.16 (Borel-Lebesgue). *De tout recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Démonstration. Fixons un tel recouvrement $(V_i)_{i \in I}$. Soit m la borne supérieure de l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe un recouvrement ouvert de $[a, x]$ par des ouverts de la famille (V_i) . Cet ensemble est non vide car il existe un ouvert de la famille contenant a . Supposons par l'absurde que $m < b$. Il existe $j \in I$ tel que m appartient à V_j . Comme V_j est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $V_j \supset [m - \delta, m + \delta]$. Par ailleurs par définition de m , il existe $x > m - \delta/2$ tel que $[a, x]$ soit recouvert par une famille V_{i_1}, \dots, V_{i_n} . Ainsi $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}, V_j$ est un recouvrement fini de $[a, m + \delta]$. Ceci contredit la définition de m et termine la preuve. \square

1.2 Théorème de Weierstraß

Théorème 2.1 (Weierstraß). *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Démonstration. On commence remarquer qu'il suffit de montrer le théorème pour une fonction continue sur $[0, 1]$: en effet il suffit alors de considérer $x \mapsto f(a + x(b - a))$.

Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}.$$

Le théorème découle alors de la :

Proposition 2.2. $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Calculs préliminaires. On a

(i) $B_n(1)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = 1$

(ii) $B_n(x \mapsto x)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1 - X)^{n-k} = X$

(iii) $B_n(x \mapsto x^2)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} X^k (1 - X)^{n-k} = \frac{1}{n}((n - 1)X^2 + X)$

Démontrons ces formules par un calcul direct :

(i) On a

$$B_n(1)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = (X + 1 - X)^n = 1$$

par le binôme de Newton.

(ii) On utilise la formule $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ utile en combinatoire :

$$\begin{aligned}
 B_n(x \mapsto x)(X) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k-1} \\
 &= X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-k-1} \\
 &= X \cdot (X+1-X)^{n-1} = X.
 \end{aligned}$$

(iii) Pour le dernier, on a :

$$\begin{aligned}
 B_n(x \mapsto x^2)(X) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)+1}{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} + \overbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k}}^{X \text{ d'après (ii)}} \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} + X \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^n (n-1) \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} + X \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left((n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^{k+2} (1-X)^{n-k-2} + X \right) \\
 &= \frac{1}{n} ((n-1)X^2 + X).
 \end{aligned}$$

Reste de la preuve :

On écrit

$$\begin{aligned}
 B_n(f)(x) - f(x) &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right) - f(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) x^k (1-x)^{n-k}
 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et η tels que $\omega_f(\eta) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
 B_n(f)(x) - f(x) &= \sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\eta} [\dots] + \sum_{|\frac{k}{n}-x|>\eta} [\dots] \\
 &\leq \sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x|\leq\eta}}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\quad + \sum_{|\frac{k}{n}-x|>\eta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \sum_{|\frac{k}{n}-x|>\eta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \sum_{|\frac{k}{n}-x|>\eta} \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}
 \end{aligned}$$

On choisit $n \geq n_\varepsilon$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} < \varepsilon$ et c'est bon. □

Remarque 2.3. En analysant la preuve précédente, on peut vérifier que si f est de classe C^1 , alors $\|f - B_n(f)\|_{[0,1]} = O(n^{-1/3})$ (il faut optimiser le choix de η , faire l'exercice!).

On peut se demander s'il est possible d'imposer aux polynômes approximants d'être à coefficients entiers. Si $f(0)$ ou $f(1)$ n'est pas entier, c'est clairement impossible (pourquoi?). De manière un peu surprenante, c'est en fait la seule obstruction :

Théorème 2.4. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $f(0), f(1)$ sont entiers, alors f est limite de polynômes à coefficients entiers.

La preuve n'est pas difficile : il suffit dans la définition des polynômes de Bernstein de prendre la partie entière des coefficients, et de remarquer que cela change très peu leur valeur. Faire l'exercice ou voir [1, p. 169].

Voici une variante :

Théorème 2.5 (Chudnovsky). Pour $0 < \alpha < 1/2$, toute fonction $f \in C^0([\alpha, 1 - \alpha], \mathbb{R})$ est limite de polynômes à coefficients entiers.

Démonstration. Exercice (1.11) □

Remarque 2.6. Il existe bien évidemment de nombreuses variantes et extensions de ce théorème. Un très joli exemple est le **théorème de Müntz** : si l'on se donne une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ de réels telle que $\lambda_0 = 0$, alors l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto x^{\lambda_n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ diverge ! (voir l'exercice 1.12 pour un argument rapide dans le cas où $\lambda_n \rightarrow \infty$, et [4] ou [1] pour le cas général)

1.3 Convolution

Définition 3.1. On définit le **support** d'une fonction continue par

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Une fonction est dite à **support compact** si son support est compact, i.e. si elle est nulle en dehors d'un compact.

Définition 3.2. Si f est une fonction continue à support compact et φ est intégrable, on définit leur **produit de convolution** par

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)dt$$

En général, on considère $\varphi \geq 0$ (à support compact ou non) telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$.

L'idée est la suivante : intuitivement $(f * \varphi)$ est une moyenne de (petits) translatés de f , et cet effet de moyennisation a un effet régularisant. Pour comprendre plus formellement cet effet régularisant, il faut observer que par changement de variable $s = x - t$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)dt.$$

il découle alors des théorèmes de dérivation sous le signe somme que $f * \varphi$ est aussi régulière que φ . En particulier si φ est de classe \mathcal{C}^∞ , alors $f * \varphi$ aussi.

Définition 3.3. On nomme **approximation de l'unité** (on parle aussi de **noyau régularisant**) une suite de fonctions continues (φ_n) vérifiant :

- $\varphi_n \geq 0$
- $\|\varphi\|_1 = 1$
- Pour tout $\delta > 0$, $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n \rightarrow 1$ (ou de manière équivalente, $\int_{|x|>\delta} \varphi_n \rightarrow 0$).

Il s'agit donc d'une suite de fonctions positives dont la masse se concentre asymptotiquement autour de l'origine.

Exemple 3.4. Soit φ telle que $\varphi \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = 1$, on pose $\varphi_n = n\varphi(nx)$. Vérifier que φ_n est une approximation de l'unité.

Théorème 3.5. Si f est une fonction continue à support compact dans \mathbb{R} et (φ_n) est une approximation de l'unité, alors

$$f * \varphi_n \rightarrow f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} (f * \varphi_n)(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)f(x)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\varphi_n(t)dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tels que $\forall z, w \in \mathbb{R}, |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

$$|(f * \varphi_n)(x) - f(x)| \leq \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\varphi_n(t)dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} (f(x-t) - f(x))\varphi_n(t)dt \right|$$

Avec

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-\delta; \delta]} (f(x-t) - f(x)) \varphi_n(t) dt \right| &\leq \int_{[-\delta; \delta]} |f(x-t) - f(x)| \varphi_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{[-\delta; \delta]} \varphi_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Et

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta; \delta]} (f(x-t) - f(t)) \varphi_n(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta; \delta]} 2 \|f\|_\infty \varphi_n(t) dt \xrightarrow{+\infty} 0 \text{ par définition de } \varphi_n$$

On peut fixer n_ε tel que $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta; \delta]} 2 \|f\|_\infty \varphi_n(t) dt \leq \varepsilon$ dès que $n > n_\varepsilon$ et c'est bon. \square

On obtient ainsi simplement une preuve indépendante de Weierstraß du résultat suivant.

Corollaire 3.6. *Toute fonction continue f sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions C^∞ .*

Démonstration. On commence par étendre f en une fonction à support compact, en prenant par exemple une extension affine par morceaux. On considère ensuite un noyau régularisant de classe C^∞ , construit par exemple comme à l'exemple 3.4 en partant d'une fonction φ de classe C^∞ (encore mieux : une fonction C^∞ à support compact, cf. le Théorème 1.6 du chapitre suivant), et on écrit

$$f * \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \varphi_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(x-t) dt.$$

Dans cette dernière formule, la variable x porte sur φ_n et on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour vérifier que $f * \varphi_n$ est de classe C^∞ . \square

Remarque 3.7. Tout ce qui vient d'être dit est en fait valable pour des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Il suffit juste dans la définition de noyau régularisant de remplacer l'intervalle $[-\delta, \delta]$ par une petite boule.

Corollaire 3.8 (Weierstraß, nouvelle preuve). *Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue où $K \subseteq \mathbb{R}$ est compact. Alors f est la limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Démonstration. Comme précédemment on peut se ramener au cas où $f \in \mathcal{C}([0, 1/4])$.

- Étape 1 : On étend f en une fonction \mathcal{C}^0 à support compact (par exemple en la prolongeant de manière affine), contenu dans $[-1/8, 3/8]$.
- Étape 2 : On pose $\varphi_n(x) = (1 - x^2)^n$ et $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n / \int \tilde{\varphi}_n$. D'après l'exercice 1.13, $\tilde{\varphi}_n$ est une approximation de l'unité, et donc $(\tilde{f} * \tilde{\varphi}_n)$ converge uniformément vers \tilde{f} sur \mathbb{R} , en particulier $(\tilde{f} * \varphi_n)|_{[0,1]}$ converge uniformément vers $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$.
- Étape 3 : on vérifie que pour tout n , $(\tilde{f} * \varphi_n)|_{[0,1/4]}$ est un polynôme. En effet, pour $x \in I$, $\varphi_n(x-t) = c_n(1 - (x-t)^2)^n$ sur l'intervalle $[x-1, x+1]$ et 0 à l'extérieur (avec $c_n = 1 / \int \tilde{\varphi}_n$). On a alors

$$\tilde{f} * \varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) \varphi_n(x-t) dt = \int_{x-1}^{x+1} c_n \tilde{f}(t) (1 - (x-t)^2)^n dt.$$

Or, pour $x \in [0, 1/4]$ on a $x-1 < -1/8$ et $x+1 > 3/8$, donc

$$\tilde{f} * \varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) (1 - (x-t)^2)^n dt = \sum_{k,l \leq 2n} a_{k,l} x^k \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) t^l dt,$$

où l'on a écrit $c_n(1 - (x-t)^2)^n = \sum_{k,l \leq 2n} a_{k,l} x^k t^l$, et on conclut. \square

Remarque 3.9.

- On utilise souvent la convolution pour des fonctions moins régulières (L^1 , L^2 , etc.). On perd la convergence uniforme, mais on garde la densité des fonctions régulières (C^∞ et autres) dans l'espace dans lequel vit f .
- Le théorème de Fejér, vu dans le cours sur les séries de Fourier, affirme qu'une fonction continue et 2π -périodique est limite uniforme sur \mathbb{R} d'une suite de polynômes trigonométriques. Il découle des mêmes techniques, sauf que dans la convolution on intègre sur une période (comme $[-\pi, \pi]$) et qu'il faut faire un choix adapté de suite régularisante φ_n : on utilise le **noyau de Fejér**.

L'intérêt de cette approche est qu'elle s'étend au cas des fonctions à plusieurs variables :

Théorème 3.10. $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compact, et $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$. Alors f est limite uniforme sur K d'une suite de polynômes

Démonstration. La démonstration est essentiellement identique à la précédente, en prenant $\tilde{\varphi}_n(x) = (1 - \|x\|^2)^n$ (norme euclidienne) et en utilisant le lemme suivant, qui sera démontré au chapitre de topologie. \square

Lemme 3.11. Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un compact K , alors pour tout ouvert V contenant K on peut trouver une extension de f qui est continue et à support dans V .

1.4 Théorème de Stone-Weierstraß

Rappel 4.1. Si k est un corps, une k -algèbre est la donnée d'un k -espace vectoriel $(A, +, \cdot)$ muni d'une structure d'anneau $(A, +, \times)$ telle que la loi \times est bilinéaire. Un exemple est donné par l'espace des polynômes sur k , mais on a aussi la \mathbb{R} -algèbre des fonctions continues (resp. C^∞) sur un domaine, etc.

Dans la suite, on considère un compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Définition 4.2. Une partie $A \subseteq C(K, \mathbb{R})$ sépare les points si pour tous $x, y \in K$ il existe $f \in A$ vérifiant $f(x) \neq f(y)$.

Théorème 4.3 (Stone-Weierstraß). Toute sous \mathbb{R} -algèbre de $C(K, \mathbb{R})$ qui sépare les points est dense pour la topologie de la convergence uniforme.

Corollaire 4.4. On retrouve ainsi les théorèmes de Weierstraß, de Fejer, la densité des fonctions C^∞ , le Théorème 3.10, etc.

Lemme 4.5. Si A est une sous-algèbre séparante de $C(K, \mathbb{R})$, alors

$$\forall x \neq y \in K, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists f \in A, f(x) = a \text{ et } f(y) = b$$

Démonstration. On prend f séparant x et y et on la compose avec une fonction affine. \square

Définition 4.6. Une partie $A \subseteq C(K, \mathbb{R})$ est un treillis si elle est stable par min et max.

Lemme 4.7. Soit $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ une sous-algèbre qui sépare les points. Si A est un treillis, elle est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}), \varepsilon > 0$.

— On fixe $x \in K$. Pour tout $y \neq x$ il existe $g_{x,y} \in A$ coïncidant avec f en x et y . Considérons l'ouvert

$$O_{x,y} = \{z \in K \mid g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}.$$

Les $(O_{x,y})_{y \in K}$ recouvrent K , donc par compacité on peut en extraire un recouvrement fini $(O_{x,y_i})_{1 \leq i \leq n}$ (théorème de Borel-Lebesgue). La fonction

$$g_x = \min_{1 \leq i \leq n} g_{x,y_i}$$

appartient à A car il s'agit d'un treillis, et on a $g_x(x) = f(x)$. De plus, pour tout z de K on trouve un certain i tel que $z \in O_{x,y_i}$, et ainsi

$$g_x(z) < g_{x,y_i}(z) < f(z) + \varepsilon.$$

— On répète ensuite l'argument dans l'autre sens (en prenant cette fois un max) en considérant les $U_x = \{y \in K, g_x(y) > f(y) - \varepsilon\}$ pour construire une fonction $g \in A$ vérifiant $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$. □

On peut alors conclure la démonstration du théorème de Stone-Weierstraß. L'adhérence de A est clairement une sous-algèbre séparante; il suffit donc de montrer que \bar{A} est un treillis. Or

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \text{ et } \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

donc il suffit de montrer que \bar{A} est stable par $|\cdot|$. Soit $f \in A$. On injecte K dans une boule compacte, sur laquelle on peut appliquer le théorème de Weierstraß pour obtenir une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers $|\cdot|$. On en déduit

$$A \ni P_n f \xrightarrow{L^\infty} |f|,$$

soit $|f| \in \bar{A}$. □

Remarque 4.8. On peut éviter l'utilisation du théorème de Weierstraß (que l'on préférerait déduire en tant que corollaire!) en exhibant explicitement une suite de polynômes convergeant uniformément sur tout compact vers $|\cdot|$.

On montre que la suite définie par $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$ convient (pourquoi donc?).

1.5 Complément : théorème d'Ascoli

1.5.1 Extraction diagonale

Voici un problème qui se pose fréquemment en analyse. On se donne $u^{(k)}$ une famille dénombrable de suites bornées de \mathbb{R} : $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_{n \geq 0}$. Peut-on extraire une sous-suite convergente commune? i.e. Peut-on trouver $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(u_{\varphi(n)}^{(k)})_{n \geq 0}$ converge?

► Traitons d'abord le cas facile où la famille est finie : $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$.

Pour $k = 2$, $u^{(1)}$ est bornée donc il existe φ_1 telle que $(u_{\varphi_1(n)}^{(1)})$ converge. La suite $(u_{\varphi_1(n)}^{(2)})$ est bornée donc on peut extraire une sous-suite convergente avec φ_2 . Ainsi la suite $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^{(2)})$ converge. Par ailleurs, $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^{(1)})$ est extraite de $(u_{\varphi_1(n)}^{(1)})$ qui converge aussi.

Pour k arbitraire, on raisonne de manière par récurrence, en considérant une extraction de la forme $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)$. (Il est important de remarquer (et de bien comprendre!) dans ces formules dans quel sens sont composées les extractrices, c'est à dire de gauche à droite)

► Peut on répéter ce raisonnement un nombre **infini** de fois? Oui! C'est ce que dit le procédé diagonal.

En effet, on extrait successivement :

- φ_1 telle que $u_{\varphi_1(n)}^{(1)}$ converge.
- φ_2 telle que $u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^{(2)}$ converge (ainsi que $u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^{(1)}$). \vdots
- φ_k telle que $u_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}^{(k)}$ converge (ainsi que $u_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}^{(k-1)}, \dots, u_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}^{(1)}$).

On pose alors $\psi(n) := \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$. Montrons que $\psi(n+1) > \psi(n)$: en effet

$$\psi(n+1) = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{n+1}(n+1) \geq \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n+1) > \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n) = \psi(n),$$

où la dernière majoration vient du fait que φ_n est strictement croissante. On observe alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\psi(n)$ est extraite de $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)$ dès que $n \geq k$: en effet, $\psi(n) = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(\varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n))$. On conclut alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{\psi(n)}^{(k)})$ converge : cqfd.

Application 5.1. Soit $(f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions uniformément bornée, c'est-à-dire que il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq M$. Soit $D \subset I$ un ensemble dénombrable. Alors il existe une extractrice ϕ telle que $\forall x \in D$, $f_{\phi(n)}(x)$ converge.

1.5.2 Théorème d'Ascoli

Définition 5.2 (Équicontinuité). Soit (f_n) une suite de fonctions sur $[a, b]$, ou plus généralement sur un compact $K \subset \mathbb{R}^d$.

— On dit que (f_n) est équicontinue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in K, |x_0 - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x_0) - f_n(y)| < \varepsilon$$

— On dit que (f_n) est uniformément équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in K, |x - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 5.3 (Équi-Heine). Une suite équicontinue de fonctions sur un compact est uniformément équicontinue.

Démonstration. Exercice 1.16. □

Théorème 5.4 (Ascoli). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un compact $K \subset \mathbb{R}^d$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

- (i) (f_n) uniformément bornée ;
- (ii) (f_n) équicontinue.

Alors on peut en extraire de (f_n) une sous-suite uniformément convergente.

Démonstration. Nous détaillons la preuve dans le cas $K = [a, b]$, le cas général est laissé en exercice (qui nécessite d'avoir étudié le chapitre de topologie). Posons $D := \mathbb{Q} \cap K$ qui est dénombrable et dense. Par la condition (i) et la discussion de la sous-section précédente, il existe une sous-suite $(f_{\psi(n)})$ telle que pour tout $r \in D$, $(f_{\psi(n)}(r))$ converge (simplement). Montrons que $(f_{\psi(n)})$ converge uniformément par le

critère de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $\eta_\varepsilon > 0$ donné par l'uniforme équicontinuité (qui découle de la condition (ii) et de la Proposition 5.3). Il existe $F \subset D$ fini tel que :

$$[a, b] \subset \bigcup_{r \in F}]r - \frac{\eta}{2}, r + \frac{\eta}{2}[$$

car par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert $]r - \frac{\eta}{2}, r + \frac{\eta}{2}[$, $r \in D$ (propriété de Borel-Lebesgue).

Vérifions que le critère de Cauchy uniforme est satisfait pour la sous-suite $(f_{\psi(n)})$, ce qui terminera la preuve. Pour ceci, fixons $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$. Il existe $r \in F$ tel que $|x - r| < \frac{\eta}{2}$, et ainsi

$$|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(m)}(x)| \leq \underbrace{|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(r)|}_{< \varepsilon \text{ par (ii)}} + \underbrace{|f_{\psi(n)}(r) - f_{\psi(m)}(r)|}_{< \varepsilon \text{ dès que } n, m \geq n_{\varepsilon, r}} + \underbrace{|f_{\psi(m)}(r) - f_{\psi(m)}(x)|}_{< \varepsilon \text{ par (ii)}}.$$

Comme F est fini, on peut poser $n_\varepsilon := \sup_{r \in F} n_{\varepsilon, r}$ et on voit que pour tout $x \in [a, b]$ et tous $n, m \geq n_\varepsilon$, $|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(m)}(x)| < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Le théorème d'Ascoli peut donc être vu comme un critère de compacité dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, muni de la norme uniforme. On dit qu'un ensemble est **relativement compact** si son adhérence est compacte. Par exemple, un sous ensemble borné de \mathbb{R}^n est relativement compact.

Corollaire 5.5. *Un sous ensemble $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si A est uniformément borné et équicontinu. En d'autres termes, dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, les compacts sont les fermés bornés équicontinus.*

Démonstration. Le sens réciproque est exactement le théorème d'Ascoli. Le sens direct est laissé en exercice (utiliser un recouvrement de \overline{A} par un nombre fini de boules de rayon ε , cf. le cours de topologie). \square

Exemple 5.6.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions M -Lipschitziennes sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ est bornée. Alors on peut extraire de (f_n) une sous-suite uniformément convergente. En effet comme pour tout n et tout $y \in [a, b]$ on a $|f_n(y) - f_n(x_0)| \leq M(b - a)$, la suite (f_n) est uniformément bornée, et l'équicontinuité est immédiate.
2. On pose $A = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}); \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } \|f'\|_\infty \leq 1\}$. Alors A est relativement compact. Est-il compact ?

1.6 Exercices

Exercice 1.1

Les fonctions suivantes sont elles uniformément continues sur \mathbb{R} ? On justifiera précisément la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sin(x^2)$
2. $f_2 : x \mapsto \arctan(x^2)$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{|x|} \cdot \ln|x|$
4. $f_4 : x \mapsto |x| \cdot \sqrt{\ln|x|}$

Exercice 1.2

Soit (f_n) une suite de fonctions C^1 sur un intervalle compact I convergeant uniformément vers une fonction f .

1. On suppose que $\|f'_n\| \leq C$ pour un certain C . Montrer que f est lipschitzienne.

2. On suppose qu'il existe $M > 1$ et $\alpha < 1$ tels que $\|f - f_n\| \leq C\alpha^n$ et $\|f'_n\| \leq M^n$. Montrer que f est hölderienne, d'un exposant à préciser.
3. Application : étudier la régularité de la limite de la série de fonctions $\sum 2^{-n} \sin(\theta^n x)$ en fonction de $\theta > 1$ (avec disons $\theta \neq 2$).

Weierstraß a montré que pour $\theta > 2$, f n'est dérivable nulle part. C'est un exercice faisable mais difficile (chercher sur internet avec le mot clé "fonction de Weierstrass").

Exercice 1.3

Construire un exemple de fonction uniformément continue sur $[0, 1]$ mais non hölderienne.

Exercice 1.4

Montrer qu'une fonction continue f sur \mathbb{R} admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue.

Exercice 1.5

Montrer le **théorème de prolongement des applications uniformément continues** : si D est dense dans Ω et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors elle admet un prolongement continu à Ω , qui est unique.

Exercice 1.6

Montrer que toute fonction continue par morceaux définie sur un intervalle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Exercice 1.7 Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On souhaite montrer que

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. Montrer le résultat quand f est de classe C^1 .
2. Conclure.

Exercice 1.8

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. On souhaite démontrer la convergence

$$\int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

1. Montrer le résultat si f est une fonction constante.
2. Montrer le résultat pour une fonction en escalier.
3. Conclure.

Exercice 1.9

1. Montrer qu'une fonction réglée admet un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité.
2. Montrer que

$$\text{a) } x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ est réglée. En quels points est-elle continue ?}$$

$$b) x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ n'est pas réglée.}$$

Exercice 1.10

1. Remplir les détails de la Remarque 2.3 et généraliser aux fonctions hölderiennes.
2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ limite uniforme d'une suite de polynômes. Montrer que f est un polynôme.
3. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \geq 0, \int_a^b f(t)t^n dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 1.11 Théorème de Chudnovsky

1. Soit $\alpha > 0$. On définit (P_n) par $P_0 = X$ et $P_{n+1} = 2P_n(1 - P_n)$. Montrer que P_n converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur $[\alpha, 1 - \alpha]$.
2. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $(Q_n) \in \mathbb{Z}[X]^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers y sur $[\alpha, 1 - \alpha]$.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([\alpha, 1 - \alpha], \mathbb{R})$, f est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 1.12 La preuve de von Golitschek du théorème de Müntz

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels telle que

$$\lambda_0 = 1, \lambda_n \rightarrow \infty \text{ et la série } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n} \text{ diverge.}$$

1. On fixe $m \notin \{0\} \cup \{\lambda_n, n \geq 0\}$ et on définit par récurrence une suite de fonctions (Q_n) sur $[0, 1]$ par $Q_0(x) = x^m$ et

$$Q_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 Q_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n} dt.$$

Montrer que Q_n converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

2. En déduire le théorème de Müntz : l'espace vectoriel engendré par la famille $\{x^{\lambda_n}, n \geq 0\}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 1.13

On définit : $\tilde{\varphi}_n(x) := \begin{cases} (1 - x^2)^n & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\varphi_n := \frac{\tilde{\varphi}_n}{\int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_n}$.

Montrer que φ_n est une approximation de l'unité.

Exercice 1.14

Faire de même avec $x \mapsto (1 - \|x\|^2)^n$ dans \mathbb{R}^d muni de sa structure euclidienne canonique.

Exercice 1.15

Soit K un compact métrique. Montrer que $\forall f, g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continus.

Exercice 1.16

Démontrer la Proposition 5.3 (imiter la preuve du théorème de Heine).

Exercice 1.17 Idéaux de fonctions continues

On rappelle qu'un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \cdot)$ est un sous-groupe pour la loi $+$, tel que pour tout f dans I et tout g dans A on a $fg \in I$. Un idéal $I \subsetneq A$ est dit maximal si pour tout idéal J tel que $I \subset J \subset A$ on a $J = I$ ou $J = A$. On rappelle aussi qu'un anneau est intègre si $fg = 0$ implique $f = 0$ ou $g = 0$.

1. L'anneau des fonctions continues réelles sur un intervalle est-il intègre ?
2. Montrer que l'anneau des fonctions réelles-analytiques sur un intervalle est intègre.
3. On se place maintenant dans l'anneau $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles. Pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$I_x = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]), f(x) = 0\}.$$

Montrer que I_x est un idéal maximal.

4. On souhaite réciproquement montrer que tout idéal maximal de $\mathcal{C}([0, 1])$ est de cette forme. On raisonne par l'absurde et on considère un idéal maximal I strict qui n'est pas de la forme I_x , pour $x \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que pour tout x il existe un ouvert U_x contenant x et une fonction f_x dans I telle que f_x ne s'annule pas sur U_x .
 - (b) En déduire qu'il existe une famille finie f_{x_1}, \dots, f_{x_n} telle que $\sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 > 0$ sur $[0, 1]$.
 - (c) En déduire que $1 \in I$ et conclure.

1.7 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1.1

1. non : en effet pour $x_k = \sqrt{k\pi}$ et $y_k = \sqrt{k\pi + \pi/2}$ on a $|y_k - x_k| \rightarrow 0$ mais $|f_1(x_k) - f_1(y_k)| = 1$.
2. oui : on voit facilement que f est lipschitzienne
3. oui : sur $[-1, 1]$ on applique Heine, et hors de cet intervalle, f est Lipschitzienne.
4. non : on vérifie que pour tout $\delta > 0$ on a $f_4(x + \delta) - f_4(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \infty$.

Solution de l'exercice 1.3

Prendre par exemple $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ prolongée par 0 en 0.

Solution de l'exercice 1.4

Pour $\varepsilon > 0$, on fixe deux réels $a < b$ tels que pour $x \geq a - 1$ (resp. $x \leq b + 1$) on a $|f(x) - \lim_{+\infty} f| \leq \varepsilon$ (resp. $|f(x) - \lim_{-\infty} f| \leq \varepsilon$). Ensuite f est uniformément continue sur $[a, b]$ par Heine, donc il existe $\eta > 0$, que l'on peut supposer inférieur à 1, tel que si $x, y \in [a, b]$ sont tels que $|x - y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Avec les choix effectués, on vérifie alors aisément que cette même propriété est satisfaite pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1.6

Ramenons nous d'abord au cas plus simple d'une fonction f continue, on fixe $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue et on dispose de $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On peut donc obtenir une subdivision $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ telle que $\forall i, |x_i - x_{i-1}| < \delta$ et poser $g(x) := f(x_i) \forall x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a alors $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$.

Pour le cas d'une fonction continue par morceaux, on prend une subdivision de $[a, b]$ $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et on applique le raisonnement précédent pour chaque $[x_i, x_{i+1}[$

Solution de l'exercice 1.9

1. Soit f une fonction réglée sur un intervalle $[a, b]$ soit $\epsilon > 0$ alors on dispose d'une décomposition $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (dépendante de ϵ) et d'une fonction g_ϵ constante sur les $[x_i, x_{i+1}[$ telle que $\|f - g_\epsilon\| < \epsilon$ prenons y, z dans un tel intervalle, on a $|f(z) - f(y)| = |f(z) - g_\epsilon(x_i) + g_\epsilon(x_i) - f(y)| \leq |f(z) - g_\epsilon(x_i)| + |f(y) - g_\epsilon(x_i)| < 2\epsilon$ avec ϵ arbitrairement petit et la fonction est donc la fonction est continue. Les points de discontinuité se trouvent donc "aux bords" x_1, x_2, \dots, x_n qui sont bien dénombrables.
2. a) Nous allons utiliser le théorème (1.14) et montrer que cette fonction (que l'on notera f) admet une limite à droite et à gauche en tout point. A défaut de limite évidente, tentons de montrer qu'elle est continue. Soit $x = \frac{p}{q}$ et $u_n = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow \frac{p}{q}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{p_n}{q_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = \frac{1}{q} = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n})$ On en déduit l'existence de limite à droite et à gauche en tout point rationnel. L'existence pour les points irrationnels découlant de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} .
 b) La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ étant discontinue en tout point de \mathbb{R} elle n'admet donc pas un ensemble dénombrable de points de discontinuité et n'est pas réglée.

Solution de l'exercice 1.10

1. À compléter.
2. Soit $P_n \xrightarrow{CVU} f$ une suite de polynômes. Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|P_n - P_N\| < 1$. Un polynôme borné étant constant, on a $P_n = P_N + c_n \in \mathbb{R}$. Or c_n est de Cauchy, donc converge :

$$f \xleftarrow{CVU} P_n = P_N + c_n \xrightarrow{CVU} P_N + c_\infty.$$

3. On approxime f par une suite $P_n \xrightarrow{CVU} f$ de polynômes. On a alors $f \cdot P_n \xrightarrow{CVU} f^2$, d'où

$$0 = \int_a^b f(t)P_n(t)dt \longrightarrow \int_a^b f(t)^2 dt,$$

soit $\int_a^b f^2 = 0$ et $f = 0$ car f^2 est continue.

Solution de l'exercice 1.11

1. Considérons la fonction $g : x \mapsto 2x(1 - x)$ sur $[\alpha, 1 - \alpha]$, qui admet $1/2$ comme point fixe. Ainsi

$$\begin{aligned} \left| P_{n+1}(x) - \frac{1}{2} \right| &= \left| g(P_n(x)) - g\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &= 2 \left| P_n(x) - \frac{1}{2} \right| \left| 1 - P_n(x) - \frac{1}{2} \right| \\ &\leq (1 - 2\alpha) \left| P_n(x) - \frac{1}{2} \right| \\ &\leq (1 - 2\alpha) \left\| P_n - \frac{1}{2} \right\|. \end{aligned}$$

Or $1 - 2\alpha < 1$, donc par récurrence $\left\| P_n - \frac{1}{2} \right\| = O(1 - 2\alpha)^n \rightarrow 0$.

2. Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $aP_n^k \xrightarrow{CVU} a/2^k$. Si $p/q \in \mathbb{Q}$, poser $a_k = \left\lfloor \frac{2^k p}{q} \right\rfloor$ donne $a_k/2^k \rightarrow p/q$.
 En considérant ces objets comme des fonctions sur $[\alpha, 1 - \alpha]$ munies de la norme uniforme, on en déduit :

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\mathbb{Z}[1/2]} \subseteq \overline{\mathbb{Z}[X]}$$

3. On en déduit $\mathbb{R}[X] \subseteq \overline{\mathbb{Z}[X]}$. Maintenant, le théorème de Weierstraß donne

$$\mathcal{C}^0([\alpha, 1 - \alpha]) \subseteq \overline{\mathbb{R}[X]} \subseteq \overline{\mathbb{Z}[X]},$$

ie toute fonction continue sur $[\alpha, 1 - \alpha]$ est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers. \square

Solution de l'exercice 1.12

1. On montre facilement que $\|Q_n\|_{[0,1]} \leq \left|1 - \frac{m}{\lambda_n}\right| \|Q_{n-1}\|_{[0,1]}$, ainsi

$$\|Q_n\|_{[0,1]} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \left|1 - \frac{m}{\lambda_k}\right|$$

qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. En effet il suffit de montrer que $\prod_{k=k_0}^{n-1} \left|1 - \frac{m}{\lambda_k}\right| \rightarrow 0$, où k_0 est assez grand pour que $\lambda_{k_0} \geq 2m$. Alors on a

$$\log \prod_{k=k_0}^{n-1} \left|1 - \frac{m}{\lambda_k}\right| = \sum_{k=k_0}^{n-1} \log \left(1 - \frac{m}{\lambda_k}\right) \leq - \sum_{k=k_0}^{n-1} \frac{m}{\lambda_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

et le résultat est démontré.

2. Pour cela on observe par récurrence que $Q_n(x)$ est de la forme

$$Q_n(x) = x^m - \sum_{i=0}^n a_{i,n} x^{\lambda_i}.$$

Ainsi par la première question $x \mapsto x^m$ est dans l'adhérence de $\text{Vect}\{x^{\lambda_n}, n \geq 0\}$ et on conclut par le théorème de Weierstraß.

Solution de l'exercice 1.13

On doit montrer que $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta; \delta]} \varphi_n$ tend vers 0. On a :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta; \delta]} \varphi_n = 2 \int_{\delta}^1 \varphi_n = 2 \frac{\int_{\delta}^1 \tilde{\varphi}_n}{\int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_n} = \frac{\int_{\delta}^1 \tilde{\varphi}_n}{\int_0^1 \tilde{\varphi}_n}.$$

Or $\tilde{\varphi}_n$ est décroissante donc δ étant fixé on a

$$\forall x \in [\delta, 1], \tilde{\varphi}_n(x) \leq \tilde{\varphi}_n(\delta) \quad \text{soit} \quad \int_{\delta}^1 \tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\varphi}_n(\delta)(1 - \delta) = (1 - \delta^2)^n(1 - \delta).$$

Le but est de minorer $\int_0^1 \tilde{\varphi}_n$ par une quantité qui est sous exponentielle. Or $\tilde{\varphi}_n(x) \geq (1 - x)^n$ donc

$$\int_0^1 \tilde{\varphi}_n \geq \int_0^1 (1 - t)^n dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n + 1}.$$

Finalement

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta; \delta]} \varphi_n = \frac{\int_{\delta}^1 \tilde{\varphi}_n}{\int_0^1 \tilde{\varphi}_n} \leq (n + 1)(1 - \delta^2)^{n+1} \rightarrow 0.$$

Ainsi φ_n est une approximation de l'unité.

Solution de l'exercice 1.15

Comme $\max(x, y) = (x + y + |x - y|)/2$ est une combinaison de fonctions continues, elle est continue. Il en va de même pour min.

Chapitre 2

Fonctions lisses et réelles-analytiques

Le but de ce chapitre est d'appréhender la dichotomie entre fonctions C^∞ et analytiques en analyse. L'objet est de comprendre le fait que les fonctions C^∞ sont des objets **souples**, à la différence des fonctions analytiques qui sont **rigides**. Cette dichotomie est fondamentale et se retrouve en de nombreuses circonstances en mathématiques fondamentales. Nous verrons à cet effet divers théorèmes permettant de "jouer aux lego" avec les fonctions lisses, comme l'existence de fonctions plateaux, de fonctions possédant une série de Taylor prescrite, s'annulant sur un fermé arbitraire, etc. Inversement, des théorèmes comme celui des zéros isolés qui montrent que les fonctions analytiques sont rigides, c'est à dire qu'on ne peut pas les modifier localement sans perturber la fonction dans son ensemble.

2.1 Exemples de fonctions lisses

On dira qu'une fonction est **lisse** si elle est de classe C^∞ . Commençons par rappeler un résultat classique :

Théorème 1.1 (limite de la dérivée). *Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est dérivable sur $]a, b[$ et si $\lim_{a^+} f' = \ell$, alors f est dérivable à droite en a de dérivée ℓ .*

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall x \in]a, b[, \exists c_x \in]a, x[, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Quand $x \rightarrow a$, $c_x \rightarrow a$ donc $f'(c_x) \rightarrow \ell$. Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. □

Proposition 1.2. *La fonction*

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

est C^∞ et toutes ses dérivées sont nulles en zéro.

Démonstration. Elle est évidemment lisse sur \mathbb{R}^* , et on montre facilement par récurrence que ses dérivées successives y sont de la forme

$$\varphi^{(k)} : x \mapsto P_k\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{où } P_k \in \mathbb{R}[X].$$

Par croissance comparée on a bien $\varphi^{(k)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 1.3. Cette fonction n'est pas la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0. En effet la série de Taylor est nulle alors que f ne l'est pas ! Il s'agit de l'exemple le plus important de fonction lisse non-analytique dans ce cours ; la plupart des autres exemples que nous croiserons seront construits à partir de celui-ci.

Lemme 1.4. Pour tout intervalle compact I il existe une fonction C^∞ à support dans I .

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $I = [0, 1]$, où la fonction $\varphi_2 : x \mapsto \varphi(x)\varphi(1-x)$ convient. \square

Lemme 1.5. Il existe une fonction lisse croissante valant 0 sur \mathbb{R}_- et 1 sur $[1, +\infty[$.

Démonstration. On pose

$$\varphi_3 : x \mapsto \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2} \int_{-\infty}^x \varphi_2. \quad \square$$

Théorème 1.6. Pour tout $a < b < c < d$ il existe une fonction lisse $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ valant 1 sur $[b, c]$ et 0 en dehors de $[a, d]$.

Une telle fonction s'appelle une **fonction plateau**.

Démonstration. En composant par une fonction affine il suffit de le montrer pour $a = 0$ et $d = 1$. Dans ce cas, $\theta : x \mapsto \varphi_3(x/b)\varphi_3((1-x)/(1-c))$ convient. \square

Remarque 1.7. On montrera plus tard que si K est un compact et U un ouvert contenant K , il existe une fonction plateau C^∞ dans \mathbb{R}^n valant 1 sur K et nulle hors de U (voir l'exercice 2.1 pour le cas particulier des boules).

Théorème 1.8 (de réalisation de Borel). Il est possible de prescrire arbitrairement les dérivées en 0 d'une fonction C^∞ . Autrement dit, pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il existe une fonction C^∞ sur \mathbb{R} telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Démonstration. Considérons une suite de réels $(a_n)_{n \geq 0}$.

— **Cas facile :** Si la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!} z^n$$

possède un rayon de convergence r non-nul, elle est infiniment dérivable sur $] -r, r[$ donc convient.

— **Cas général :** On se donne une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$, et on considère

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \psi(\lambda_n x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

pour un certain plateau ψ valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et 0 hors de $]-1, 1[$. L'objectif est de choisir judicieusement les λ_n de sorte que la série et chacune de ses séries ses dérivées convergent uniformément au voisinage de 0, car alors on aura

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_{n,k} = a_k.$$

On pose $M_k = \sup_{j \leq k} \|\psi^{(j)}\|_\infty$. La formule de Leibniz donne alors

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(x)| &= \left| \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \left(\frac{a_n x^n}{n!} \right)^{(q)} (\psi(\lambda_n x))^{(k-q)} \right| = \left| \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \frac{a_n}{(n-q)!} x^{n-q} \lambda_n^{k-q} \psi^{(k-q)}(\lambda_n x) \right| \\ &\leq \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \frac{|a_n|}{(n-q)!} |x|^{n-q} \lambda_n^{k-q} |\psi^{(k-q)}(\lambda_n x)|. \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer la convergence de la série des normes uniformes dans cette dernière expression. Le point est que sur le support de $\psi^{(k-q)}(\lambda_n \cdot)$ on a $|x| \leq 1/\lambda_n$, ainsi ce dernier terme est majoré par

$$\sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \frac{|a_n|}{(n-q)!} \lambda_n^{q-n} \lambda_n^{k-q} M_k = \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \frac{|a_n|}{(n-q)!} \lambda_n^{k-n} M_k$$

Comme le régime qui nous intéresse est k fixé et $n \rightarrow \infty$, on peut supposer que $k \leq n$ de sorte que $\frac{1}{(n-q)!} \leq \frac{1}{(n-k)!}$, et on obtient

$$\sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \frac{|a_n|}{(n-q)!} \lambda_n^{k-n} M_k = \frac{|a_n| \lambda_n^{k-n}}{(n-k)!} M_k \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} = 2^k \frac{|a_n| \lambda_n^{k-n}}{(n-k)!} M_k.$$

On choisit finalement $\lambda_n = \max(1, |a_n|)$, dont il découle que $|a_n| \lambda_n^{k-n} \leq 1$ (distinguer selon les cas $|a_n| \geq 1$ et $|a_n| \leq 1$) et finalement les sommes partielles de la série des normes uniformes sont majorées par $2^k M_k / (n-k)!$, et le théorème est démontré. □

2.2 Fonctions développables en séries entières

2.2.1 Définitions et propriétés algébriques

Définition 2.1. Une fonction lisse f est **développable en série entière (DSE)** en x_0 si elle est somme au voisinage de x_0 d'une série entière. On note

- $\text{DSE}(x_0, r)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$ pour $|h| < r$
- $\text{DSE}(x_0)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f \in \text{DSE}(x_0, r)$ pour un certain $r > 0$.

Proposition 2.2. Si f est $\text{DSE}(x_0)$, alors son développement est unique.

Démonstration. En effet $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$. □

Corollaire 2.3. Si f et g sont $\text{DSE}(x_0)$ et toutes leurs dérivées coïncident en x_0 alors $f = g$

Exemple 2.4. La majorité des fonctions usuelles (exp, sin, cos, fractions rationnelles, ...) sont DSE en tout point de leur ensemble de définition.

Exemple 2.5. On a vu que $x \mapsto \exp(-x^{-2})$ (étendue en 0) est C^∞ mais pas $\text{DSE}(0)$. Les fonctions C^∞ à support compact – par exemple, les plateaux – constituent aussi des contre-exemples.

Les fonctions développables en série entière jouissent d'un certain nombre de propriétés algébriques.

Proposition 2.6. Si $f, g \in \text{DSE}(x_0, r)$ alors $f + \lambda g$ et fg sont dans $\text{DSE}(x_0, r)$.

Démonstration. Le premier point est évident, le deuxième découle de la théorie du produit de Cauchy, vu dans le cours sur les séries entières. □

Le cas de l'inverse est plus délicat.

Théorème 2.7. Si $f \in \text{DSE}(x_0)$ ne s'annule pas en x_0 , alors $\frac{1}{f} \in \text{DSE}(x_0)$. En particulier si $f, g \in \text{DSE}(x_0)$ et $g(x_0) \neq 0$, alors $f/g \in \text{DSE}(x_0)$.

Remarquer que si $f \in \text{DSE}(x_0, R)$, contrairement à la Proposition 2.6 on ne peut pas borner le rayon de f^{-1} en fonction de R : en effet si f s'annule dans $]x_0 - R, x_0 + R[$, disons $f(x_0 + \rho) = 0$ alors le rayon de convergence de f^{-1} sera majoré par ρ (pourquoi ?). On peut alors se demander si ce phénomène suffit à déterminer le rayon de f^{-1} , autrement dit : est-ce la distance au zéro le plus proche de x_0 ? L'exemple de $x \mapsto 1/(1+x^2)$ qui est de rayon 1 en 0 alors qu'elle ne s'annule pas sur \mathbb{R} montre que ce n'est pas le cas. En revanche on pourra observer que cette fonction s'annule en i , qui est justement à distance 1 de l'origine ! Et de fait, le cours d'analyse complexe de L3 montrera que le rayon de f^{-1} est la distance au zéro **complexe** le plus proche.

Démonstration. Sans perte de généralité on suppose $x_0 = 0$ et $f(0) = 1$. Alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour } |x| < R_f, a_0 = 1.$$

On cherche $g = 1/f$ sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

— Analyse :

— Si g est une solution du problème, alors $fg = 1$ au voisinage de 0, soit par produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient $a_0 b_0 = 1$ et $\forall n > 0, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$.

On remarque que ce système infini d'équations linéaires est échelonné, on trouve ainsi les b_n récursivement par

$$b_{n+1} = - \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \quad (2.2)$$

— On considère maintenant la série définie formellement par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, et on doit vérifier que g est de rayon non-nul. On raisonne encore une fois par analyse-synthèse. On sait qu'il existe $C_0, \rho > 0$ tels que $\forall n, |a_n| \leq C_0 \rho^n$. Supposons que pour $j < n, |b_j| \leq C M^j$. Par (2.2) on a

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n-k}|,$$

et ainsi

$$|b_n| \leq C C_0 \sum_{k=1}^n \rho^k M^{n-k} = M^n C C_0 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\rho}{M} \right)^k$$

Pour que $|b_n| \leq C M^n$, il suffit de choisir $M = A \rho$ où $A > 1$ est tel que $\frac{C_0}{A-1} < 1$ i.e. $A > C_0 + 1$. Dans ce cas on peut prendre $C = 1$, et la synthèse est immédiate.

— Synthèse : On considère la suite (b_n) définie par (2.2). D'après les calculs, la série entière $g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est de rayon > 0 . Par ailleurs, là où f et g sont définies (i.e. convergent), on a $fg = 1$.

□

Les résultats précédents impliquent que $\text{DSE}(x_0)$ est une \mathbb{R} -algèbre (où une \mathbb{C} -algèbre si on travaille sur \mathbb{C}), c'est à dire à la fois un \mathbb{R} -espace vectoriel et un anneau (commutatif). En outre on en connaît les éléments inversibles. Nous allons un peu explorer les propriétés algébriques de cet anneau.

On rappelle qu'un **idéal** I d'un anneau commutatif $(A, +, \cdot)$ est un sous-groupe pour la loi $+$, tel que pour tout f dans I et tout g dans A on a $fg \in I$. Il est clair que $\{0\}$ et A sont des idéaux de A qui sont dits triviaux. Un idéal $I \subsetneq A$ est dit **maximal** si pour tout idéal J tel que $I \subset J \subset A$ on a $J = I$ ou $J = A$.

Proposition 2.8. *Le sous ensemble*

$$\mathfrak{M} := \{f \in \text{DSE}(x_0) : f(x_0) = 0\}$$

est l'unique idéal maximal non trivial de $\text{DSE}(x_0)$.

Un anneau admettant un unique idéal maximal s'appelle un **anneau local**. Le résultat précédent fournit une explication pour cette terminologie.

Démonstration. On vérifie simplement que \mathfrak{M} est un idéal : en effet si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ alors $(f-g)(x_0) = 0$ et si $f(x_0) = 0$ et g est quelconque alors $(fg)(x_0) = 0$. Pour montrer qu'il est maximal on rappelle l'idée simple suivante : si I est un idéal d'un anneau commutatif A contenant un élément inversible, alors $I = A$. En effet si $a \in I$ est inversible, alors $a^{-1}a = 1$ appartient à I et par suite, tout élément de A appartient à I . Ceci montre que si I est un idéal non-trivial de $\text{DSE}(x_0)$, tout $f \in I$ s'annule en x_0 , donc $I \subset \mathfrak{M}$. \square

On pose

$$\mathfrak{M}^k := \left\{ f \in \text{DSE}(x_0) : f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \right\}.$$

Noter que $f \in \mathfrak{M}^k$ si et seulement s'il existe $g \in \text{DSE}(x_0)$ $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$, de sorte que (avec un abus de notation usuel) $\mathfrak{M}^k = (x - x_0)^k \text{DSE}(x_0)$. En d'autres termes, \mathfrak{M}^k est l'ensemble des fonctions s'annulant à l'ordre au moins k en x_0 . On vérifie simplement que c'est un idéal. Également, \mathfrak{M}^k est l'ensemble des produits de k éléments de \mathfrak{M} (exercice).

Proposition 2.9. *Tout idéal non-trivial de $\text{DSE}(x_0)$ est de la forme \mathfrak{M}^k pour un certain $k \geq 1$.*

Démonstration. Soit I un tel idéal. On sait que toute fonction $f \in I$ s'annule en x_0 à un certain ordre $\text{ord}(f) \geq 1$. Posons $k = \min \{\text{ord}(f) : f \in I\}$. Alors pour tout $f \in I$, on a $f = (x - x_0)^{\text{ord}(f)} g$ pour un certain $g \in \text{DSE}(x_0)$, et donc $f = (x - x_0)^k (x - x_0)^{\text{ord}(f)-k} g$: on a montré que $I \subset \mathfrak{M}^k$.

Réciproquement soit $f \in \mathfrak{M}^k$. Alors $f = (x - x_0)^k g$ pour un certain g . Par ailleurs par définition de k on sait qu'il existe $f_1 \in I$ d'ordre exactement k , i.e. $f_1 = (x - x_0)^k g_1$, avec $g_1(x_0) \neq 0$. On a alors $(g/g_1) \in \text{DSE}(x_0)$ et $f = f_1(g/g_1)$, et donc f appartient à I et $\mathfrak{M}^k \subset I$. \square

On rappelle qu'un idéal $I \subset A$ est **principal** s'il est de la forme bA pour un certain $b \in A$, c'est à dire que I est l'ensemble des multiples de b . Un anneau est principal si tous ses idéaux sont principaux (c'est le cas de \mathbb{Z} par exemple). On a vu plus haut que $\mathfrak{M}^k = (x - x_0)^k \text{DSE}(x_0)$. La Proposition 2.9 implique donc le :

Corollaire 2.10. *L'anneau $\text{DSE}(x_0)$ est principal.*

2.2.2 Condition nécessaire et suffisante de développabilité en série entière

Rappel 2.11 (Formule de Taylor avec reste intégral). Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I , on a pour tous $x_0, x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Voir l'exercice 2.3.

Corollaire 2.12. Une fonction lisse f est $\text{DSE}(x_0, r)$ si et seulement si

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{(t-x_0)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

pour tout x au voisinage de x_0 .

Théorème 2.13. Une fonction lisse f est $\text{DSE}(x_0)$ si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|f^{(n)}\|_V = O(M^n n!)$$

au voisinage V de x_0 .

Démonstration.

\Leftarrow) Voir l'exercice 2.5.

\Rightarrow) On va montrer un peu mieux à la proposition suivante. □

Proposition 2.14. Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

une fonction $\text{DSE}(x_0, r)$. Alors pour tout $\rho < r$ il existe $M > 0$ tel que $\|f^{(n)}\| = O(M^n n!)$ sur $[-\rho; \rho]$

Démonstration. Par translation on se ramène à $x_0 = 0$. Par le lemme d'Abel, il existe C_1 tel que pour tout $k \geq 0$, $|a_k \rho^k| \leq C_1$, ainsi, en écrivant

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$

on obtient

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k| \frac{k!}{(k-n)!} |x|^{k-n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} C_1 \rho^{-k} \frac{k!}{(k-n)!} |x|^{k-n} \\ &= C_1 \frac{d^n}{dt} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k} t^k \right) \Big|_{t=|x|} = C_1 \frac{d^n}{dt} \left(\frac{1}{1-t/\rho} \right) \Big|_{t=|x|} \\ &= C_1 \frac{n! \rho}{(\rho - |x|)^{n+1}} \\ &\leq \frac{C_1}{\rho - \rho'} n! M^n \quad \text{avec } M = \frac{1}{\rho - \rho'}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

et le résultat suit. □

Corollaire 2.15. Si $f \in \text{DSE}(x_0, r)$ alors $f \in \text{DSE}(x, \rho_x)$ pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. De plus,

$$\rho_x = \min(|x_0 + r - x|, |x_0 - r - x|).$$

Démonstration. La première assertion découle de la proposition précédente et du Théorème 2.13. L'estimation précise du rayon provient de l'estimée (2.3) ci-dessus (détails en exercice). □

2.3 Fonctions réelles-analytiques

On notera I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et f une fonction de I dans \mathbb{R} .

Définition 3.1. On dira f est **réelle-analytique** (ou simplement *analytique*) sur I si pour tout $x \in I$, f est développable en série entière autour de x . L'ensemble des fonctions analytiques sera noté $\mathcal{O}(I)$.

Remarque 3.2. Les fonctions analytiques sont bien sûr C^∞ . Une notation très courante pour les fonctions analytiques est $C^\omega(I)$. Nous avons privilégié $\mathcal{O}(I)$ pour souligner le lien avec l'analyse complexe.

Exemple 3.3. Le corollaire 2.15 montre qu'une fonction DSE(x_0, r) est analytique sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Remarque 3.4. La théorie des fonctions \mathbb{C} -analytiques est plus simple que celle des fonctions réelles-analytiques. La raison est le résultat étonnant affirmant que la \mathbb{C} -dérivabilité implique l'analyticité (théorie de Cauchy). Tout ceci sera développé dans le cours d'analyse complexe de L3.

Exemple 3.5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est analytique sur \mathbb{R} .

On note qu'au voisinage de 0 on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

dont le rayon est 1, donc cela ne permet pas de conclure à l'analyticité au delà de l'intervalle $] -1, 1[$.

Démonstration. (Voir l'exercice 2.9 pour une autre méthode.) On applique le Théorème 2.13 ; il faut donc montrer qu'autour de tout x_0 il existe un voisinage V pour lequel $\|f^{(n)}\|_V = O(M^n n!)$. Pour ceci on calcule les dérivées successives en travaillant en complexes, grâce à la formule

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

d'où il vient

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n i}{2} \left(\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n} \right),$$

ainsi

$$\|f^{(n)}(x)\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|x+i|^n} + \frac{1}{|x-i|^n} \right) \leq M^n$$

où M est n'importe quel majorant que $d(x, \pm i)^{-1}$ sur V . □

Remarque 3.6. Par décomposition en éléments simples, ce raisonnement vaut pour toutes les fonctions rationnelles. En outre le rayon de convergence est la distance au pôle (peut être complexe) le plus proche (exercice!).

Proposition 3.7. Les fonctions analytiques sur un ouvert U forment une sous- \mathbb{R} -algèbre de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$. En outre, si $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annule jamais, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U)$.

Démonstration. La première assertion est une conséquence directe du fait que pour tout x_0 , DSE(x_0) est une \mathbb{R} -algèbre pour les lois usuelles (on rappelle que le produit de Cauchy montre que le produit de deux fonctions développable en série entière de rayon $\geq R$ est DSE de rayon $\geq R$). La deuxième assertion découle du Théorème 2.7. □

Théorème 3.8. Si f et g sont analytiques respectivement sur des ouverts U et V avec $f(U) \subseteq V$, alors $g \circ f$ est analytique.

Démonstration. Le théorème découle immédiatement du résultat suivant : si $g \in \text{DSE}(0)$ et $f \in \text{DSE}(0)$ est telle que $f(0) = 0$ alors $g \circ f \in \text{DSE}(0)$. La démonstration se fait comme précédemment en estimant les coefficients pour démontrer que le rayon de convergence est strictement positif. Les détails (un peu pénibles) sont laissées à la lectrice. \square

Théorème 3.9 (d'inversion locale analytique). Si f est analytique sur I et $x_0 \in I$ vérifie $f'(x_0) \neq 0$, alors f est injective au voisinage de x_0 et son inverse y est analytique.

Démonstration. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f est strictement monotone au voisinage de x_0 et f réalise une bijection d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $f(x_0)$, d'inverse continue (cf. le cours d'analyse de L1). Ensuite, comme pour les deux théorèmes précédents, pour démontrer que f^{-1} est développable en série entière, on raisonne par une estimation a priori des coefficients (inconnus) de l'inverse. Les détails (encore plus pénibles) sont laissés au lecteur assidu. \square

Proposition 3.10. La dérivée et les primitives d'une fonction analytique sur un intervalle sont analytiques.

Démonstration. Immédiate. \square

Remarque 3.11. Les résultats précédents donnent corps au slogan suivant :

Toute fonction définie à partir de fonctions usuelles par une formule est analytique sur son domaine de définition.

On pourrait alors tout bonnement penser que toutes les fonctions sont analytiques! C'était probablement l'opinion générale jusqu'au début du 19e siècle. En fait non : la notion de "formule" mentionnée ici n'inclut pas les fonctions définies par cas comme à l'équation (2.1), ni les limites des suites de fonctions, qui peuvent être très irrégulières.

Théorème 3.12. Soit f analytique sur un intervalle ouvert I . Si les dérivées de f s'annulent toutes en x_0 , alors $f = 0$.

Démonstration. Posons $Z^\infty(f) = \{x \in I, \forall n \geq 0, f^{(n)}(x) = 0\}$. Alors $Z^\infty(f)$ est un fermé de I car c'est l'intersection des $\{x \in I, f^{(n)}(x) = 0\}$, qui sont fermés car les $f^{(n)}$ sont continues. Mais comme f est analytique, si $x \in Z^\infty(f)$, alors f est identiquement nulle au voisinage de x , donc $Z^\infty(f)$ contient un voisinage de x . On voit donc que $Z^\infty(f)$ est ouvert et fermé dans I .

Pour conclure, on utilise la propriété suivante : si $Z \subset I$ est ouvert-fermé dans I et non vide, alors $Z = I$ (cf le chapitre sur la connexité). En effet soit $x_0 \in Z$ et $x_1 = \sup\{x \in I, [x_0, x] \subset Z\}$. Si par l'absurde on suppose $x_1 < \sup I$ (qui est peut être infini) alors on démontre successivement que $x_1 \in Z$ et que Z contient un voisinage de x_1 . Ainsi $x_1 > x_1$: cette contradiction montre que Z contient $[x_0, \sup I[$. On montre de la même manière que $] \inf I, x_0] \subset Z$ et le théorème est démontré. \square

Rappel 3.13. Soit E un espace métrique.

- x_0 est un **point d'accumulation** si $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$, ou de manière équivalente si pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$, ou encore s'il existe une suite infinie de points de E convergeant vers x_0 .
- $E \subseteq \Omega$ est **discret** dans Ω s'il n'a pas de points d'accumulation dans Ω , ou de façon équivalente si la topologie induite par l'inclusion $E \subset \Omega$ est discrète.

Théorème 3.14 (Principe des zéros isolés). Soit $f \neq 0$ une fonction analytique sur un intervalle ouvert I . Alors $\mathcal{Z}(f) = f^{-1}(0)$ est discret.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{Z}(f)$ admet un point d'accumulation $x_0 \in I$. Il suffit de montrer que $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \geq 0$, et on conclut par le théorème précédent.

— **Preuve 1 :** Supposons $f'(x_0) \neq 0$. Il existe $r > 0$ tel que f' ne s'annule pas sur $]x_0 - r; x_0 + r[$, d'où f est strictement monotone, injective, et ne possède pas de second zéro au voisinage de x_0 .

Plus généralement, considérons le premier n vérifiant $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ &= (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) \end{aligned}$$

Donc f ne s'annule pas au voisinage de x_0 , contradiction. \square

— **Preuve 2 :** Si x_0 est point d'accumulation de $\mathcal{Z}(f)$, alors il existe une suite strictement monotone $(x_n) \in \mathcal{Z}(f)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 . Par le théorème de Rolle, f' s'annule entre deux zéros successifs de f , d'où il s'ensuit que x_0 est un point d'accumulation de $\mathcal{Z}(f')$. Par une récurrence immédiate, x_0 est un point d'accumulation de $\mathcal{Z}(f^{(k)})$ pour tout $k \geq 0$. Mais $\mathcal{Z}(f^{(k)})$ est fermé, d'où $f^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \geq 0$ et on conclut. \square

Remarque 3.15. Il peut y avoir des points d'accumulation aux bords de I : par exemple la fonction $x \mapsto \sin(\pi/x)$ est analytique sur \mathbb{R}_+^* et s'annule en tous les $1/n$ (voir aussi l'exercice 2.11)

Corollaire 3.16. Si $f \neq 0$ est analytique sur un intervalle I , alors $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable.

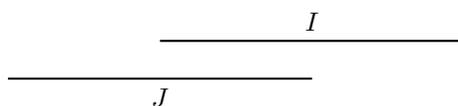
Démonstration. Tout intervalle peut s'écrire comme la réunion croissante d'une suite de compacts. En effet en posant $I =]a, b[$ on prend $K_n = [\max(-n, a + 1/n), \min(n, b - 1/n)]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, un sous ensemble discret d'un compact est fini, donc $\mathcal{Z}(f) \cap K_n$ est fini. Ainsi

$$\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \cap \mathcal{Z}(f)$$

est une réunion dénombrable d'ensembles finis, et est au plus dénombrable. \square

Corollaire 3.17 (Principe de prolongement analytique). Si f et g analytiques sur I et $\{f = g\}$ admet un point d'accumulation, alors $f = g$.

Remarque 3.18. On applique typiquement ce résultat comme suit :



f analytique sur I , g analytique sur J et $I \cap J \neq \emptyset$. $\{f = g\}$ admet un point d'accumulation dans $I \cap J$. Alors $f = g$ sur $I \cap J$ et on peut définir $h : I \cup J \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{cases} h = f \text{ sur } I \\ h = g \text{ sur } J \end{cases}$

Proposition 3.19. La \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{O}(I)$ des fonctions analytiques sur un intervalle I est intègre.

Démonstration. Si f et g sont non identiquement nulles, alors $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{Z}(g)$ sont au plus dénombrables, alors $\mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$ est au plus dénombrable et en particulier distinct de I . \square

Remarque 3.20. A contrario la \mathbb{R} -algèbre $C^\infty(I, \mathbb{R})$ n'est pas intègre, ce que l'on peut voir simplement en multipliant des fonctions à supports disjoints. C'est également faux si l'on considère l'algèbre des fonctions analytiques sur un ouvert non-connexe U , car on peut poser $f = 0$, $f = 1$ sur deux composantes distinctes puis $g = 1 - f$ pour obtenir $fg = 0$.

2.4 Exercices

Exercice 2.1

Construire $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f = \begin{cases} 1 & \text{sur } \mathcal{B}(0, 1) \\ 0 & \text{hors de } \mathcal{B}(0, 2). \end{cases}$

Exercice 2.2

Soit $f \in C^\infty([a, b])$. Montrer que f se prolonge en une fonction C^∞ à support compact sur \mathbb{R} .

Exercice 2.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Montrer que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Exercice 2.4

Le quotient d'un anneau commutatif par un idéal maximal est un corps. Quel est le corps $DSE(x_0)/\mathfrak{M}$?

Exercice 2.5

Montrer que s'il existe des constantes positives C et M et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f^{(n)}\|_V \leq CM^n n!$, alors f est DSE autour de x_0 .

Exercice 2.6

Soit f une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $C > 0$ et un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(k)}(x)| \leq C$. Montrer que $f \in DSE(0, \infty)$.

Exercice 2.7

Soit $0 < a < 1$ et f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(a^n x).$$

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} et de classe C^∞ .
2. Montrer que f est développable en série entière de rayon infini autour de 0.

Exercice 2.8 Fonctions absolument monotones

Soit f une fonction C^∞ sur $] -R, R[$ telle que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in] -R, R[$ on a $f^{(n)}(x) \geq 0$. Montrer que f est DSE(0, R).

Application : déterminer le rayon de convergence de la fonction tangente en 0.

Exercice 2.9

Montrer directement que $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est analytique sur \mathbb{R} .

Exercice 2.10

Soit $k \geq 2$ un entier. Les fonctions suivantes sont-elles analytiques ?

1. $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{en } 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^k)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{en } 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k^{\sin x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{en } 0 \end{cases}$

Exercice 2.11

Soit $f : x \mapsto e^{-x^{-2}} \sin \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. Démontrer que f est C^∞ et que ses zéros possèdent un point d'accumulation.

Exercice 2.12

1. Démontrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur \mathbb{R} telle que pour tout $n \geq 0$ on a

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = (n!)^2.$$

2. Existe-t-il une fonction analytique sur \mathbb{R} telle que pour tout $n \geq 0$ on ait

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 1?$$

2.5 Solutions

Solution de l'exercice 2.1

On prend $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un plateau C^∞ valant 1 sur $] -1, 1[$ et 0 hors de $] -2, 2[$. La fonction $f = g \|\cdot\|$ convient.

Solution de l'exercice 2.2

D'après le théorème de réalisation de Borel, il existe une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on trouve de même $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $h^{(n)}(b) = f^{(n)}(b)$. La fonction $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ h(x) & \text{si } x > b \end{cases}$$

est une extension C^∞ de f . Multiplier \bar{f} par un plateau donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 2.3

Réurrence + IPP

Solution de l'exercice 2.5

Supposons : $\exists V(x_0), \exists C > 0, M > 0$ tels que : $\|f^{(n)}\|_V \leq CM^n n!$

Supposons $x > x_0$.

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) dt \right| &\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) \right| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| M^{n+1} C(n+1)! dt \\ &= \int_{x_0}^x (x-t)^n M^{n+1} C(n+1) dt \\ &= (n+1) M^{n+1} C \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1} \\ &= CM^{n+1} |x-x_0|^{n+1} \end{aligned}$$

Remarque : si $x < x_0$ on obtient

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{(t-x_0)^n}{n!} f^{n+1}(t) dt \right| \leq CM^{n+1} |x-x_0|^{n+1}$$

Si $|x-x_0| < \frac{1}{M}$ ce terme tend vers 0 et c'est gagné.

Solution de l'exercice 2.6

Reprendre l'estimation de l'exercice 2.5.

Solution de l'exercice 2.7

1. On applique les théorèmes usuels sur les séries de fonctions.
2. On montre que pour tout $k \geq 1$ on a $\|f^{(k)}\|_\infty \leq (1-a)^{-1}$. On conclut en appliquant l'exercice précédent.

Solution de l'exercice 2.8

Dans la formule de Taylor avec reste intégral appliquée sur $[0, R[$, on remarque que le reste est positif. Ainsi on a pour tout $0 \leq x < R$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x).$$

Ceci implique que la série de Taylor converge sur $[0, R[$, et comme c'est une série entière, elle converge sur $] -R, R[$.

Reste à voir que la somme de la série entière est bien égale à f . A compléter. !!

On vérifie par récurrence sur les dérivées que pour tout $n \geq 1$ on a $\tan^{(n)} \geq 0$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Donc la fonction tangente est DSE(0, $\pi/2$) par la question précédente. Mais comme elle tend vers $+\infty$ en $\pi/2$, le rayon est également $\leq \pi/2$.

Solution de l'exercice 2.9

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + h) = g(h) \\ &= \frac{1}{1 + (x_0 + h)^2} \\ &= \frac{1}{1 + x_0^2} \frac{1}{1 + \frac{1 + 2x_0h + h^2}{1 + x_0}} \end{aligned}$$

Soit h tel que $|2x_0h + h^2| < 1 + x_0^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 + x_0^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n h^n}{(1 + x_0^2)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x_0)^k h^{n-k} \\ &= \frac{1}{1 + x_0^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + x_0^2)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x_0)^k h^{2n-k} \\ &= \frac{1}{1 + x_0^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + x_0^2)^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{k \leq n} \binom{n}{k} (2x_0)^k h^{2n-k} \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini discret (on peut échanger les sommes si les deux séries convergent absolument). On a donc la convergence absolue pour h assez petit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{|2x_0||h| + |h|^2}{1 + x_0^2}} &= \frac{1}{1 + x_0^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + x_0^2)^n} \mathbb{1}_{k \leq n} \binom{n}{2n-l} (2x_0)^{2n-l} h^l \\ &= \frac{1}{1 + x_0^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + x_0^2)^n} \mathbb{1}_{k \leq n} \binom{n}{2n-l} (2x_0)^{2n-l} \right) h^l \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2.10

1. non : les zéros s'accumulent en 0.
2. oui : elle est directement développable en série entière de rayon infini.
3. oui : il n'y a pas vraiment de singularité en 0 et la fonction s'écrit $f(x) = xe^{-(\ln k) \sin x}$.

Solution de l'exercice 2.11

f est C^∞ en dehors de 0 en tant que combinaison de fonctions C^∞ . Sa dérivée n -ième est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P(x, \sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x})}{Q(x)} e^{-x^{-2}},$$

où $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Comme sin et cos sont bornées, on obtient $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. D'après le théorème limite de la dérivée, $f^{(n-1)}$ est dérivable et $f^{(n)}(0) = 0$, ce qui montre le caractère C^∞ de f . Finalement,

$$Z(f) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n\pi} \mid 0 \neq n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Solution de l'exercice 2.12

1. Appliquer le théorème de réalisation de Borel pour fabriquer f_0 et f_1 telle que pour $i = 0, 1$ on a pour tout n , $f_i^{(n)}(i) = 0$ et recoller à l'aide de fonctions plateaux.
2. On remarque que la fonction exponentielle vérifie $\exp^{(n)}(0) = 1$ pour tout n . Si f est une fonction comme dans l'énoncé, on a alors $f^{(n)}(0) = \exp^{(n)}(0)$ pour tout n , et donc par principe de prolongement analytique on a $f = \exp$ sur \mathbb{R} . Mais $\exp^{(n)}(1) = e$ pour tout n , ce qui est contradictoire.

Chapitre 3

Problèmes de révision

Voici plusieurs problèmes de type concours portant sur les concepts vus dans les deux chapitres précédents.

3.1 Développement de la fonction tangente

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

Partie 1 - Dérivées successives

1. Exprimer les dérivées f' , f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n , on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5. Montrer $2a_1 = a_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}.$$

Partie 2 - Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], \quad \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} x^n \leq f(x).$$

7. En déduire la minoration $R \geq \pi/2$.

8. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

9. Montrer

$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$

Indication : considérer les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$.

10. En déduire que $R = \pi/2$.

Partie 3 - Partie paire et impaire

11. Justifier que toute fonction $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire.

12. En déduire

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

◇

3.2 Phénomène de Runge

Ce problème porte sur le problème de l'utilisation des polynômes d'interpolation pour la convergence uniforme. On verra que sous certaines hypothèses, ceux-ci convergent vers la fonction interpolée, mais que parfois ils divergent : c'est le phénomène de Runge.

Si n est un entier positif, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , à coefficients réels. Si g est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ on note $\|g\|_{[a,b]}$ sa norme uniforme, à savoir $\|g\|_{[a,b]} = \sup \{|g(x)|, x \in [a, b]\}$.

Partie 1 - Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient x_0, \dots, x_n des nombres réels distincts. On définit une application $E : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$E(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

1. Vérifier que E est une application linéaire.

2. Montrer que E est injective. En déduire que pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(x_i) = y_i$.

Par définition P est le *polynôme d'interpolation de Lagrange* associé aux données (x_0, \dots, x_n) et (y_0, \dots, y_n) .

3. (a) Montrer que la famille de polynômes $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ définie par

$$L_j(X) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(X - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Exprimer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux données (x_i) et (y_i) en fonction des L_j .

4. Soit $V(x) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de Vandermonde, définie par $V(x) = (x_i^j)_{0 \leq i, j \leq n}$.

(a) Déduire des questions précédentes que le déterminant $\det(V(x))$ est non nul (on ne demande pas de préciser sa valeur).

(b) Expliquer comment utiliser les polynômes de Lagrange pour calculer $V(x)^{-1}$, et détailler le calcul pour $n = 2$ (on pourra noter $D = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$).

Partie 2 - Convergence des polynômes d'interpolation

Dans cette partie on se donne une fonction f de classe C^∞ sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. On considère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de réels distincts appartenant à $[a, b]$ et on note $P_n(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n tel que pour $0 \leq i \leq n$, $P_n(x_i) = f(x_i)$. On pose également $\Pi_{n+1}(X) = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$.

5. Soit g une fonction p fois dérivable sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $p + 1$ points $c_0 < c_1 < \dots < c_p$ de $[a, b]$ tels que $g(c_i) = 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]c_0, c_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$. (*Indication : on pourra raisonner par récurrence sur p .*)
6. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x).$$

(*Indication : x étant fixé et distinct des x_i , on pourra introduire la fonction g définie par $g(t) = f(t) - P_n(t) - A \Pi_{n+1}(t)$, où A est l'unique réel tel que $g(x) = 0$.*)

7. Soit $g = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière de rayon $R' > 0$. On fixe deux réels r et R tels que $0 < r < R < R'$. L'objectif de cette question est de trouver une majoration de $\|g^{(k)}\|_{[-r, r]}$.
- (a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 0$, $|a_n| \leq CR^{-n}$.
- (b) Déterminer la dérivée d'ordre k de $x \mapsto (1 - \frac{x}{R})^{-1}$.
- (c) Montrer que pour tout $k \geq 0$,

$$\|g^{(k)}\|_{[-r, r]} \leq \frac{CRk!}{(R-r)^{k+1}}.$$

8. On suppose que f est développable en série entière de rayon $R' > \frac{3}{2}(b-a)$ autour du point $\frac{a+b}{2}$. Montrer que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
9. Montrer que si f est développable en série entière de rayon infini autour de 0, alors la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f sur tout segment de \mathbb{R} .

Partie 3 - Divergence des polynômes d'interpolation

Dans cette partie on s'intéresse à l'approximation de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

sur l'intervalle $[-a, a]$, où $a \geq 1$ est un entier positif fixé. Pour $-n \leq k \leq n$, on pose $x_k = \frac{ak}{n}$. On note $p_n(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $2n$ qui interpole f aux $(2n+1)$ points x_k , c'est à dire tel que pour $-n \leq k \leq n$, $p_n(x_k) = f(x_k)$. On pose également $\pi_n(X) = \prod_{k=-n}^n (X - x_k)$.

10. Montrer que $p_n(-X) = p_n(X)$.
11. Montrer qu'il existe un polynôme q de degré 1 tel que $p_n(X)(X^2 + 1) - 1 = q(X)\pi_n(X)$, puis en déduire que $q(X) = cX$ pour un réel $c \neq 0$.
12. Montrer que

$$c = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{a^2 k^2}{n^2})}.$$

(*Indication : on pourra évaluer l'égalité $p_n(X)(X^2 + 1) - 1 = cX\pi_n(X)$ en un point bien choisi.*)
En déduire que pour tout $x \in [-a, a]$

$$\left| p_n(x) - \frac{1}{x^2 + 1} \right| = \frac{x^2}{x^2 + 1} \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln \left| x^2 - \frac{a^2 k^2}{n^2} \right| - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{a^2 k^2}{n^2} \right) \right) \quad (3.1)$$

13. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{a^2 k^2}{n^2} \right)$.

14. Soit $y \in [0, 1]$ un nombre irrationnel. Pour $n \geq 1$ on pose $\text{dist}(ny, \mathbb{Z}) = \inf \{|ny - k|, k \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $\text{dist}(ny, \mathbb{Z}) \geq y/10$.

(Indication : on pourra considérer la suite $(ny \text{ modulo } 1)_{n \geq 0}$.)

15. On fixe $x \in [0, a]$ un nombre irrationnel. On rappelle que a est un entier.

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^a \ln |x - t| dt$ est bien définie et la calculer.

(b) Soit k_x le plus grand entier k tel que $\frac{ak}{n} < x$. Montrer l'encadrement

$$\left| \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{k_x-1} \ln \left| x - \frac{ak}{n} \right| - \int_0^{ak_x/n} \ln |x - t| dt \right| \leq \max \left(\left| \frac{a}{n} \ln x \right|, \left| \frac{a}{n} \ln \left| x - \frac{ak_x}{n} \right| \right| \right).$$

On admettra que de manière similaire on a

$$\left| \frac{a}{n} \sum_{k=k_x+1}^{n-1} \ln \left| x - \frac{ak}{n} \right| - \int_{a(k_x+1)/n}^a \ln |x - t| dt \right| \leq \max \left(\left| \frac{a}{n} \ln a \right|, \left| \frac{a}{n} \ln \left| x - \frac{a(k_x+1)}{n} \right| \right| \right).$$

(c) En utilisant la question 14, montrer qu'il existe une suite extraite $(n_j)_{j \geq 0}$ telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \ln \left| x - \frac{ak}{n_j} \right| = \int_0^a \ln |x - t| dt.$$

16. Dans cette question on prend $a = 5$ et on admet que

$$\int_0^5 \ln |5 - t| dt + \int_0^5 \ln |5 + t| dt - \int_0^5 \ln (1 + t^2) dt > 0.$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas simplement vers f sur $[-5, 5]$.

◇

3.3 Autour du théorème de Denjoy-Carleman

(1)

Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit le support de φ par :

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Ainsi, φ est à support compact si $\text{supp}(\varphi)$ est un sous ensemble borné de \mathbb{R} . On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur \mathbb{R} . Si $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on pose

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \text{ et } \|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt.$$

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note également $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}) := \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact. On note $\varphi^{(n)}$ la dérivée n^{e} d'une fonction n fois dérivable, avec la convention que $\varphi^{(0)} = \varphi$.

Nous avons construit en cours des fonctions C^∞ à support compact non triviales sur \mathbb{R} . Dans ce texte, on s'intéresse au problème suivant : si une fonction C^∞ telle qu'il existe x_0 tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$, alors sous quelles conditions la fonction f doit être nulle au voisinage de x_0 ?

Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| = \|f^{(n)}\|_\infty$$

et on cherche des propriétés satisfaites par la suite (M_n) .

1. Arnaud Denjoy, comme Camille Jordan, sont des mathématiciens français, donc ne pas prononcer leur nom à l'anglaise !

Partie 1

Dans cette partie on suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ à support compact *non identiquement nulle*.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \text{supp}(f)$ tel que pour tout entier $n \geq 0$, $f^{(n)}(x_0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

3. Montrer que s'il existe des constantes $A > 0$ et $B > 0$, et une sous-suite $(n_j)_{j \geq 1}$ telles que $M_{n_j} \leq AB^{n_j} (n_j)!$, alors f est identiquement nulle sur l'intervalle $]x_0 - 1/B, x_0 + 1/B[$.
4. En déduire que pour tout $B > 0$ on a

$$\frac{M_n}{B^n n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Partie 2

Dans cette partie on cherche à montrer que si $(M_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{M_{n-1}}{M_n}$ converge, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ non identiquement nulle telle que pour tout $n \geq 0$, $\|f^{(n)}\|_\infty \leq M_n$.

Pour $\mu > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on définit $T_\mu : \varphi \mapsto T_\mu \varphi$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_\mu \varphi(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{x-\mu}^{x+\mu} \varphi(t) dt.$$

5. Montrer que T_μ est une application linéaire, qui envoie l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans lui-même, et que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ on a $\|T_\mu \varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$.
6. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est une fonction positive, on a $\|T_\mu \varphi\|_1 = \|\varphi\|_1$.
7. Montrer que pour tout $k \geq 0$, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ alors $T_\mu \varphi \in \mathcal{C}_c^{k+1}(\mathbb{R})$. Montrer également que

$$\left\| (T_\mu \varphi)^{(k)} \right\|_\infty \leq \left\| \varphi^{(k)} \right\|_\infty.$$

8. Pour $k \geq 1$, montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^{k+1}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\| (T_\mu \varphi)^{(k)} - \varphi^{(k)} \right\|_\infty \leq \frac{\mu}{2} \left\| \varphi^{(k+1)} \right\|_\infty.$$

On suppose maintenant que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{n \geq 1} \mu_n$ converge. On fixe $\psi_0 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et on définit par récurrence la suite $(\psi_n)_{n \geq 0}$ par

$$\forall n \geq 0, \psi_{n+1} = T_{\mu_{n+1}} \psi_n.$$

9. Montrer que pour tout $n \geq k$, ψ_n est de classe C^k .
10. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k+2$, on a

$$\left\| \psi_{n+1}^{(k)} - \psi_n^{(k)} \right\|_\infty \leq \frac{\mu_{n+1}}{2} \left\| \psi_{k+1}^{(k+1)} \right\|_\infty.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $\psi_n^{(k)}$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

11. Montrer que la limite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ est de classe C^∞ , et que pour tout $k \geq 0$ on a

$$\left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leq \left\| \psi_k^{(k)} \right\|_\infty.$$

12. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a

$$\left\| \psi_k^{(k)} \right\|_\infty \leq \|\psi_0\|_\infty \frac{1}{\mu_1 \cdots \mu_k}.$$

13. Montrer que f est à support compact et que si ψ_0 est positive et non identiquement nulle, alors il en est de même pour f .
14. Conclure quant à la question initialement posée.

Partie 3 - Théorème de Denjoy-Carleman (difficile !)

On fixe comme précédemment une fonction f de classe C^∞ à support compact sur \mathbb{R} . On conserve les notations de la partie 1 et on suppose dans toute cette partie que la suite $(M_{n-1}/M_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

L'objectif de cette partie est de montrer que si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{M_{n-1}}{M_n}$ diverge, alors $f = 0$.

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_0) = 0$. Si α est un réel tel que $0 < \alpha < 1$ on définit x_1, \dots, x_n par

$$x_1 = x_0 + \alpha \frac{M_{n-1}}{M_n}, \quad x_2 = x_1 + \alpha \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}, \dots, \quad x_n = x_{n-1} + \alpha \frac{M_0}{M_1}.$$

15. Montrer que pour tout $x \in [x_0, x_1]$ et tout $k \leq n$ on a $|f^{(k)}(x)| \leq \alpha^{n-k} M_k$.

(Indication : on pourra raisonner par récurrence descendante à partir de $k = n$.)

16. On définit la suite $(B_{i,j})_{j \geq i \geq 0}$ par $B_{0,j} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et pour $j > i$, $B_{i+1,j+1} = B_{i,j+1} + \alpha B_{i+1,j}$.

Montrer que pour tout $x \in [x_0, x_i]$ et tout $j \leq n - i + 1$, on a $|f^{(j)}(x)| \leq B_{i,n-j+1} M_j$.

17. L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe α_0 tel que si α a été choisi tel que $0 < \alpha < \alpha_0$, alors

$$\forall j > i \geq 1, \quad B_{i,j} \leq 2e\alpha.$$

(a) Pour une constante $C > 0$ et $x \geq 0$ on pose $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_i(x) = (Cx/i)^i$. Montrer que pour C convenablement choisie, pour tous $i > 0$ et $j \geq i$ on a

$$\phi_{i-1}(j) + \phi_i(j-1) \leq \phi_i(j)$$

(on pourra montrer l'inégalité $j^i \geq (j-1)^i + i(j-1)^{i-1}$).

(b) En déduire que $B_{i+1,i+2} \leq \sum_{k=0}^{i+1} \phi_k(k+1)\alpha^{k+1}$.

(c) Conclure par un choix approprié de C .

18. On se donne un réel $a > 0$ et on fixe α tel que $0 < \alpha < \alpha_0$, où α_0 a été défini à la question 17.

(a) Montrer qu'il existe n tel que $x_n \geq x_0 + a$.

(b) En déduire que $|f(x)| \leq 2e\alpha M_0$ sur $[x_0, x_0 + a]$.

19. Conclure que f est identiquement nulle.

◇

On peut en fait démontrer que l'hypothèse de décroissance sur les M_n n'est pas nécessaire. On a ainsi montré que si f est une fonction C^∞ à support compact telle que $\sum_{n \geq 1} \frac{M_{n-1}}{M_n}$ diverge, alors $f = 0$. Ce résultat est dû à Denjoy et Carleman. Intuitivement, il signifie que certaines fonctions pour lesquelles M_n croît juste un peu trop vite pour les empêcher d'être analytiques (par exemple $M_n \asymp n! n^{\frac{1}{2} \ln n}$) vérifient quand même des propriétés de rigidité.

Chapitre 4

Courbes paramétrées

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude des courbes paramétrées, c'est à dire des courbes tracées dans le plan et paramétrées par des fonctions. C'est un chapitre important des mathématiques classiques, à l'interface avec la physique (cinématique du point) et la mécanique, et qui a d'innombrables applications pratiques.

Le plan \mathbb{R}^2 est muni de sa structure euclidienne canonique et la notation I désignera un intervalle de \mathbb{R} .

4.1 Notion de courbe plane

Définition 1.1. *Un arc paramétré (orienté) de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$ est une application γ de classe C^k de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 . Si γ est injective, l'arc est dit **simple**.*

Un reparamétrage de l'arc paramétré γ est un arc η de la forme $\eta = \gamma \circ h$ où h est un difféomorphisme croissant de classe C^k de $[0, 1]$ sur lui même.

*Un **arc géométrique** (ou plus simplement arc) est l'image $\gamma([0, 1])$ d'un arc paramétré γ .*

*Une **courbe paramétrée** (resp. **géométrique**) est (resp. l'image d')une application C^k de I dans \mathbb{R}^2 , où I est un intervalle de \mathbb{R} .*

On rappelle qu'un difféomorphisme est une application dérivable de dérivée non nulle en tout point. Comme une telle fonction est strictement monotone, elle réalise une bijection continue sur son image, dont la réciproque est également dérivable. On pourrait autoriser des reparamétrages décroissants, qui dans ce cas changent l'orientation de l'arc.

Il faut penser géométriquement un arc comme reliant son origine $\gamma(0)$ à son extrémité $\gamma(1)$. On voit qu'un reparamétrage d'un arc a la même image, donc il faut penser un arc géométrique comme à un arc paramétré à reparamétrage près (et de même pour une courbe)¹.

Remarque 1.2. La terminologie dans ce sujet n'est pas uniforme. À la place du terme arc, on trouve également chemin ou simplement courbe. Certains auteurs considèrent qu'un arc est un chemin injectif^a.

^a. Et font ainsi la distinction entre connexité par arcs et par chemins, qui sont a posteriori deux notions équivalentes.

1. Cette assertion n'est vraie que pour un arc simple : en effet si le paramétrage fait des allers-retours sur la courbe géométrique, un reparamétrage ne permettra pas de les éliminer

Remarque 1.3. Lorsque $k = 0$ la notion d'arc géométrique n'a pas grand sens, puisqu'il existe des applications continues continues surjectives de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$ où même n'importe quel compact convexe (voir le chapitre suivant). En revanche, en classe C^1 et au delà, une courbe ressemble bien (à peu près) à une courbe! (C'est le sens de la Proposition 2.4 ci dessous)

Définition 1.4. Une **courbe fermée** paramétrée de classe C^k est une application γ périodique de classe C^k de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

Une courbe géométrique est dite fermée si elle admet un paramétrage T -périodique pour un certain $T > 0$. Une courbe paramétrée fermée est dite **simple** si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ si et seulement si $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}T$. Une courbe géométrique simple est l'image d'une courbe paramétrée simple.

Remarque 1.5. En dépit de ces définitions formelles, pour des raisons de commodité de langage, on confond bien souvent une courbe paramétrée γ et la courbe géométrique $\text{Im}(\gamma)$ associée.

Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc continu tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$ on peut étendre γ par périodicité pour en faire une courbe fermée. Attention en revanche, même si γ est de classe C^k , $k \geq 1$ cette courbe pourrait ne pas être C^k comme courbe périodique : il faut pour cela des conditions sur les dérivées : pour tout $j \leq k$, $\gamma^{(j)}(0) = \gamma^{(j)}(1)$.

Remarque 1.6. On aurait pu également définir une courbe fermée comme l'image du cercle unité par une application de classe C^k , en utilisant l'identification entre le cercle et $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ donnée par $t \mapsto (\cos \frac{2\pi t}{T}, \sin \frac{2\pi t}{T})$.

Exemple 1.7. Quelques courbes standard.

- Droite :
 $\mathcal{D} = \{p + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est l'image de \mathbb{R} par $t \mapsto p + t\vec{u}$.
- Cercle :
 $\mathcal{C} = \{(a + r\cos(t), b + r\sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, i.e. $\gamma : t \mapsto (a + r\cos(t), b + r\sin(t))$ avec (a, b) le centre du cercle et r le rayon du cercle.
- Ellipse : elle est définie à isométrie près par
 $\mathcal{E} = \{(a \cos(t), b \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, i.e. $\gamma : t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$, avec $a, b > 0$.
- Hyperbole : elle est définie à isométrie près par
 $\mathcal{H} = \{(a \cosh(t), b \sinh(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, i.e. $\gamma : t \mapsto (a \cosh(t), b \sinh(t))$, avec $a, b > 0$.
- Parabole : elle est définie à isométrie près par
 $\mathcal{P} = \{(t, at^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, i.e. $\gamma : t \mapsto (t, at^2)$, avec $a > 0$.
- Des exemples moins standard comme [la courbe de Peano](#), ou [la courbe de Von Koch](#) qui montrent qu'en classe C^0 l'intuition sur les courbes est à manier avec précaution.

Définition 1.8. Une **équation** d'une courbe géométrique C est une fonction $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage V de C telle que dans V on ait $C = \{F = 0\}$. On dit aussi bien que $\{F = 0\}$ est l'équation de C .

Il est souvent assez délicat de passer d'un paramétrage d'une courbe à une équation, ou réciproquement.

Exemple 1.9.

- Un graphe (au dessus de la première coordonnée) dans $I \times \mathbb{R}$ est une courbe d'équation $y = f(x)$ i.e. $y - f(x) = 0$, où f est une fonction $I \rightarrow \mathbb{R}$. Elle peut être paramétrée par $t \mapsto (t, f(t))$. Noter qu'une équation du type $x = f(y)$ définit également un graphe, mais au dessus de la deuxième coordonnée.
- Une chaînette est une courbe d'équation $y = a \cosh(x/a)$ avec $a > 0$. C'est la forme que prend un fil pesant suspendu entre deux poteaux. La chaînette joue un rôle important en architecture et en mécanique (voir [Wikipedia](#)).
- Déterminer des équations des ellipses et hyperboles. Montrer que l'image d'un cercle par une application linéaire injective du plan est une ellipse. Montrer que la courbe d'équation $y = 1/x$ dans \mathbb{R}^2 est une hyperbole.

La définition formalise ce qu'on attend d'une courbe géométrique dans le plan. C'est un cas particulier d'une définition beaucoup plus générale et fondamentale, qui sera étudiée dans le cours de géométrie différentielle en L3 ou M1.

Définition 1.10. Une **sous-variété** de \mathbb{R}^2 de dimension 1 et de classe C^k est un sous ensemble fermé du plan tel que pour tout $p = (x_0, y_0) \in C$, il existe un voisinage V de p tel que $V \cap C$ est un graphe de classe C^k au dessus de l'une ou l'autre coordonnée^a.

a. Il serait plus naturel de requérir que ce soit localement un graphe au dessus d'une direction quelconque, mais c'est en fait une définition équivalente.

4.2 Étude d'une courbe paramétrée

4.2.1 Étude locale

On se donne une courbe ou un arc paramétré $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et t_0 un point intérieur à I .

Définition 2.1 (Notion de tangente). La droite affine $\mathcal{D} = \gamma(t_0) + \text{Vect}(u_0) = \gamma(t_0) + \mathbb{R}u_0$ est tangente à γ en $\gamma(t_0)$ s'il existe $u \in \text{Vect}(u_0)$ non nul et des fonctions $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies dans un voisinage V de t_0 telles que pour $t \rightarrow t_0$ on a $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \lambda(t)(u + \varepsilon(t))$ avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$.

Dans ce cas on a alors nécessairement $\lambda(t) \rightarrow 0$ car

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = |\lambda(t)| \cdot \|u + \varepsilon(t)\|$$

qui tend vers 0 quand $t \rightarrow t_0$, et on voit que, si cette expression est bien définie,

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} \frac{u + \varepsilon(t)}{\|u + \varepsilon(t)\|}$$

converge en direction vers $\text{Vect}(u_0)$, plus précisément ses valeurs d'adhérences sont de la forme $\pm u$. (Attention avec cette définition générale λ peut changer de signe dans tout voisinage de 0 ; en pratique ce ne sera jamais le cas.) Ceci montre également que la direction tangente (et donc la droite tangente) est unique quand elle existe.

Remarque 2.2. Si la courbe paramétrée est analytique (donc quand elle est définie par une "formule"), par le théorème des zéros isolés λ ne s'annule pas dans un voisinage épointé de t_0 et l'expression ci-dessus est bien définie pour $t \neq t_0$ proche de t_0 .

Définition 2.3. Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, on dit que γ est **régulière** en t_0 (ou $\gamma(t_0)$). Une courbe paramétrée est dite régulière si elle est régulière en tous ses points. Une courbe géométrique est dite régulière si elle admet un paramétrage régulier.

Inversement, si $\gamma'(t_0) = 0$, on dit que γ a un point **stationnaire** en t_0 .

Si γ est régulière en t_0 , on a le développement limité

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + o(t - t_0) = \gamma(t_0) + (t - t_0)(\gamma'(t_0) + \varepsilon(t))$$

(noter que le $(o(\cdot))$ dans la deuxième égalité est un vecteur) et $\gamma'(t_0)$ est par définition le **vecteur tangent** (ou vecteur vitesse) de γ en t_0 . Par les considérations précédentes, la droite $\gamma(t_0) + \text{Vect}(\gamma'(t_0))$ est la droite tangente à γ en $\gamma(t_0)$.

Proposition 2.4. *Si γ est régulière en t_0 , alors son image est une sous-variété au voisinage de $\gamma(t_0)$. Plus précisément, il existe un voisinage J de t_0 tel que $\text{Im}(\gamma|_J)$ soit une sous-variété.*

Démonstration. Exercice 4.3. □

Supposons maintenant que γ est de classe C^k , $k \geq 2$, et admet un point stationnaire en t_0 . S'il existe $\ell \leq k$ tel que $\gamma^{(\ell)}(t_0) \neq 0$ (remarquer que c'est toujours le cas si γ est analytique), on choisit ℓ minimal avec cette propriété et on a le développement limité

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t - t_0)^\ell}{\ell!} \left(\gamma^{(\ell)}(t_0) + \varepsilon(t) \right) (t - t_0)$$

et en vertu de la Définition 2.1, le vecteur $\gamma^{(\ell)}(t_0)$ dirige la tangente à γ en $\gamma(t_0)$.

Proposition 2.5. *Un arc régulier en t_0 est simple au voisinage de t_0 .*

Démonstration. Exercice 4.4. □

Plus généralement pour connaître l'allure locale d'une courbe paramétrée on cherche les deux plus petits entiers $\ell < m$ tels que $(\gamma^{(\ell)}(t_0), \gamma^{(m)}(t_0))$ forme une famille libre (s'ils existent, cf l'exercice 4.5). Cela va permettre de déterminer la tangente de $\text{Im}(\gamma)$ en $\gamma(t_0)$ et la position de la courbe par rapport à sa tangente, grâce au développement limité

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t - t_0)^\ell}{\ell!} \left(\gamma^{(\ell)}(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1-\ell}}{(m-1)!} \gamma^{(m-1)}(t_0) \right) + \frac{(t - t_0)^m}{m!} \gamma^{(m)}(t_0) + O((t - t_0)^{m+1}).$$

On a alors l'une des situations suivantes :

- (1) Si $\ell = 1$ et $m = 2$ on dit que γ est **birégulière** en t_0 . Dans ce cas la tangente est dirigée par $\gamma'(t_0)$ et la courbe reste d'un côté de sa tangente. Il en est de même plus généralement lorsque ℓ est impair et m est pair. Dans ce cas on dit parfois que $\gamma(t_0)$ est un point ordinaire de $\text{Im}(\gamma)$.
- (2) Si ℓ est impair et m est impair, la tangente est dirigée par $\gamma^{(\ell)}(t_0)$ mais comme le terme $(t - t_0)^m$ change de signe, la courbe traverse sa tangente : c'est un **point d'inflexion**.
- (3) Si ℓ est pair, comme $(t - t_0)^\ell \geq 0$, la courbe fait demi-tour : c'est ce qu'on appelle un **point de rebroussement**. Comme précédemment, la tangente est dirigée par $\gamma^{(\ell)}(t_0)$ (on parle souvent de demi-tangente) et selon la parité de m la courbe traverse sa tangente (m impair) : c'est un point de rebroussement de première espèce, ou non (m pair) : c'est un point de rebroussement de deuxième espèce.

4.2.2 Plan pour l'étude globale d'une courbe

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée "suffisamment régulière". On vise à tracer $\gamma(I)$ le plus fidèlement possible. Voici un plan général pour y parvenir :

- (1) Déterminer le domaine de définition de γ .
- (2) Réduire l'intervalle d'étude en cherchant d'éventuelles symétries (parité de x et y , etc.)
- (3) Faire le tableau de variations de x et y . Repérer les points de tangence verticale et horizontale, ainsi que les points stationnaires, et faire l'étude locale en ces points.

- (4) Chercher les éventuels points multiples et les inflexions. Noter qu'une inflexion a lieu en un point régulier lorsque $\gamma'(t_0)$ est parallèle à $\gamma''(t_0)$, donc résoudre l'équation $x'y'' - x''y' = 0$.
- (5) Étudier les branches infinies : lorsque x et/ou y admet une limite infinie en une borne de son domaine de définition, étudier les asymptotes ou branches paraboliques éventuelles.
- (6) Finalement, tracer (joliment!) la courbe.

Exemple 2.6. La courbe d'équation $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ est un exemple de **courbe de Lissajous**.

Détail de l'étude :

— Le domaine de définition de γ est \mathbb{R} .

— γ est 2π -périodique. Par parité des fonctions trigonométriques, x est paire et y est impaire. On peut donc se restreindre à $[0, \pi]$ pour l'étude et compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. De plus, on a :

$$\begin{cases} x(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = \cos(\pi - 3t) = -\cos(3t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = -y(t) \end{cases}$$

d'où la symétrie par rapport à l'origine. Donc il suffit de travailler sur $[0, \pi/2]$.

— Les dérivées de x et y sur $[0, \pi]$ sont : $x'(t) = -3\sin(3t)$, $y'(t) = 2\cos(2t)$. Donc x' s'annule en $t \equiv 0 \pmod{\pi/3}$, y' s'annule en $t \equiv \pi/4 \pmod{\pi/2}$.

x décroît sur $[0, \pi/3]$ tel que $x(0) = 1$, $x(\pi/3) = -1$ et croît sur $[\pi/3, \pi/2]$ tel que $x(\pi/3) = -1$, $x(\pi/2) = 0$. y croît sur $[0, \pi/4]$ tel que $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1$ et décroît sur $[\pi/4, \pi/2]$ tel que $x(\pi/4) = 1$, $x(\pi/2) = 0$.

Les tangentes verticales sont en $(x(t), y(t))$ tel que $t \equiv 0 \pmod{\pi/3}$, i.e. $(1, 0)$, $(-1, \sqrt{3}/2)$, $(0, 0)$ et les tangentes horizontales sont en $(x(t), y(t))$ tel que $t \equiv \pi/4 \pmod{\pi/2}$, i.e. $(1, 0)$, $(\sqrt{2}/2, 1)$, $(0, 0)$.

— La courbe étant périodique, il n'y pas de branches infinies ;

— Faire un beau dessin, c.f. Figure 4.1.

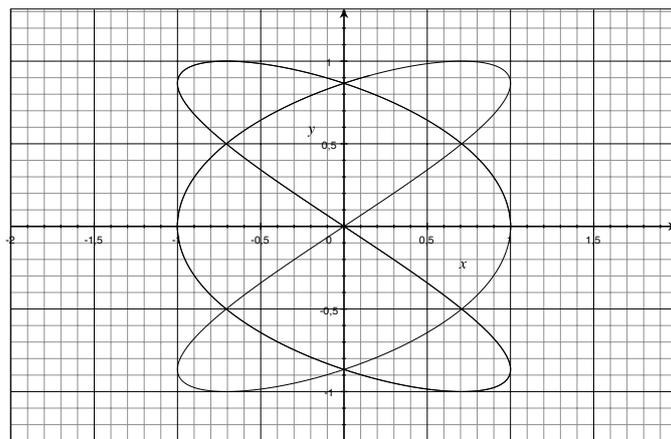


FIGURE 4.1 – $\gamma(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$

Exemple 2.7. La courbe d'équation d'équation $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ en coordonnées polaires est une **cardioïde**. L'étude est proposée à l'exercice 4.6.

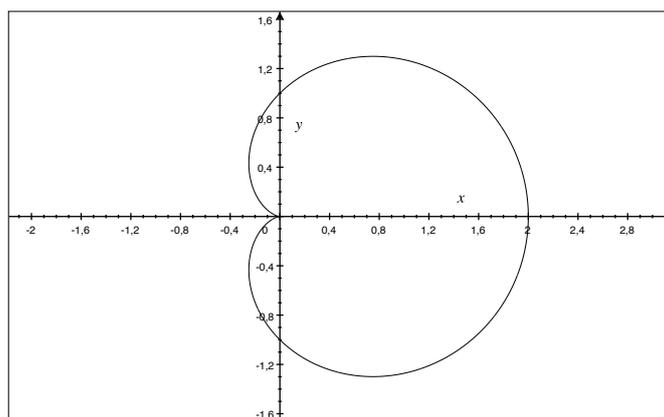


FIGURE 4.2 – Cardioïde

Remarque 2.8. On peut éliminer la variable t pour trouver des équations de ces courbes. Pour la cardioïde, cela se fait directement et on obtient une équation de degré 4 : $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$. Pour la courbe de l'exemple 2.6 l'astuce est d'utiliser la relation $\cos^2(2 \times 3t) + \sin^2(3 \times 2t) = 1$, on trouve $(2x^2 - 1)^2 + y^2(-4y^2 + 3)^2 = 1$. Noter qu'il est assez logique de trouver un terme en y^6 car il y a des droites verticales coupant la courbe en 6 points.

De façon générale la **théorie de l'élimination**, qui repose sur l'algèbre linéaire, est une méthode permettant d'éliminer la variable t entre deux équations polynomiales de la forme $x = P(t)$, $y = Q(t)$ et fournir une équation polynomiale satisfaite par x et y . Pour les équations trigonométriques, on peut utiliser cette méthode en exprimant ces équations comme des expressions rationnelles en e^{it} .

4.3 Propriétés métriques des courbes planes, I : longueur

On rappelle que \mathbb{R}^2 est muni de sa structure euclidienne canonique. En particulier $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.3.1 Longueur

Définition 3.1. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc continu. On définit la **longueur** de γ par

$$\text{long}(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

où le sup porte sur toutes les subdivisions $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$. Autrement dit c'est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans γ .

Une courbe est dite **rectifiable** si sa longueur est finie.

Noter que l'on n'a pas demandé au paramétrage de γ d'être localement injectif, autrement dit le point $\gamma(t)$ peut faire des allers retours le long de la courbe géométrique $\text{Im}(\gamma)$: dans ce cas la notion ne correspond pas à la notion intuitive de longueur.

Bien sûr la notion a plus de sens pour un arc localement simple (par exemple pour un arc régulier), et dans ce cas on a la propriété suivante :

Proposition 3.2. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc continu simple, alors le caractère rectifiable de γ , ainsi que sa longueur, ne dépendent pas du paramétrage.

En particulier on peut parler de la longueur d'un arc géométrique simple.

Démonstration. En effet dans la Définition 3.1 la notion de subdivision utilisée est invariante par changement de paramétrage. \square

Proposition 3.3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est rectifiable et $[a', b'] \subset [a, b]$ alors $\gamma|_{[a', b']}$ est rectifiable et $\text{long}(\gamma|_{[a', b]}) \leq \text{long}(\gamma)$.

Démonstration. Étant donnée une subdivision $t_1 < \dots < t_{n-1}$ de $[a', b']$, on obtient une subdivision de $[a, b]$ en ajoutant les points $t_0 = a$ et $t_n = b$. On a alors par définition

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \text{long}(\gamma)$$

et ainsi

$$\sum_{i=1}^{n-2} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \text{long}(\gamma) - d(a, a') - d(b, b'),$$

ce qui montre simultanément les deux assertions de l'énoncé en passant au sup. \square

Proposition 3.4. Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs paramétrés rectifiables tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, alors l'arc $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$ obtenu en concaténant ces deux arcs est rectifiable et $\text{long}(\gamma) = \text{long}(\gamma_1) + \text{long}(\gamma_2)$.

Démonstration. Exercice 4.7. \square

Théorème 3.5. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc de classe C^1 , alors γ est rectifiable, et

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (4.1)$$

Ce théorème est intuitivement (ou physiquement) évident : la distance parcourue par le point mobile $\gamma(t)$ entre les temps a et b est l'intégrale de la vitesse !

Démonstration. Soit une subdivision $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Par la formule fondamentale du calcul intégral on a $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient donc $\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$ (2) On a alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'\| = \int_a^b \|\gamma'\|.$$

En prenant la borne supérieure du membre de gauche sur toutes les subdivisions, on obtient $\text{long}(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'\|$ (*). Pour montrer l'égalité, on pose φ la fonction définie par $\varphi(t) = \text{long}(\gamma|_{[a, t]})$. Pour $h > 0$ on a

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| \leq \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(u)\| du,$$

en appliquant l'inégalité (*) sur $[t, t+h]$. Prenons la limite quand h tend vers 0 : pour le membre de gauche comme pour le membre de droite, la limite existe et vaut $\|\gamma'(t)\|$. Donc par le théorème des gendarmes, φ est dérivable à droite en t et sa dérivée à droite vaut $\|\gamma'(t)\|$. Le même raisonnement montre que φ est dérivable à gauche, et pour tout $t \in [a, b]$, on a $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Ainsi $\varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$ et on conclut en prenant $t = b$. \square

2. En effet on a l'inégalité triangulaire $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$ pour les intégrales à valeurs vectorielles $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour la montrer, il suffit de repasser par les sommes de Riemann.

On peut expliciter la formule si la courbe est donnée en coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$:

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Si elle est donnée en coordonnées polaires, alors en écrivant $(x(t) = r(t) \cos t, y(t) = r(t) \sin t)$ on obtient

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2} dt.$$

Ce type d'intégrale est souvent compliqué à calculer ! Par exemple pour une courbe aussi simple qu'une ellipse, il n'y a pas de formule pour la longueur qui s'exprime à l'aide des fonctions usuelles (on introduit pour cela de nouvelles fonctions dites elliptiques). On peut néanmoins s'en sortir dans certains cas, comme les paraboles ou la cardioïde.

Remarque 3.6. L'hypothèse que γ est de classe C^1 est essentielle dans le Théorème 3.5. Le flocon de Von Koch est un exemple bien connu d'arc C^0 non rectifiable (Voir [Wikipedia](#) et l'Exercice 4.8).

4.3.2 Abscisse curviligne

La Proposition 3.2 dit que la longueur est une propriété de la courbe géométrique, indépendante du paramétrage.

Définition 3.7. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée rectifiable. Une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **abscisse curviligne** si pour tout intervalle $[a, b] \subset I$ on a $\text{long}(\gamma|_{[a,b]}) = |\varphi(b) - \varphi(a)|$.

Noter que l'abscisse curviligne peut être croissante ou décroissante : on voit que si φ est une abscisse curviligne, $\varphi_0 \pm \varphi$ en est une autre. On peut vérifier que l'abscisse curviligne est unique à ces transformations près. Noter également que comme pour la longueur, cette notion est plus satisfaisante lorsque γ est un arc régulier.

Si γ est une courbe régulière C^1 et φ est une abscisse curviligne, on voit que φ est injective et donc on peut définir un nouveau paramétrage "par l'abscisse curviligne", c'est à dire considérer le paramétrage $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$ (nous donnons un argument plus formel dans la Proposition 3.10 ci-dessous). Dans ce cas, sur le nouvel intervalle \tilde{I} de paramétrage, on aura que pour tous $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{I}$, $\text{long}(\tilde{\gamma}|_{[\tilde{a}, \tilde{b}]}) = \tilde{b} - \tilde{a}$. Un tel paramétrage s'appelle un **paramétrage normal**. Il est d'usage de désigner par s la variable d'un paramétrage normal (par opposition à la variable t d'un paramétrage donné *a priori*).

Comme précédemment on voit aisément qu'un paramétrage normal est unique à translation et inversion du sens du temps près, i.e. si $\gamma(s)$ est un paramétrage normal alors tout autre paramétrage normal est de la forme $\gamma(s_0 \pm s)$.

Proposition 3.8. Le paramétrage d'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 est normal si et seulement si pour tout $s \in I$ on a $\|\gamma'(s)\| = 1$.

Démonstration. Le sens réciproque est évident : on a bien

$$\text{long}(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds = b - a.$$

Réciproquement, si γ est un paramétrage normal on a pour tout s

$$\text{long}(\gamma|_{[a,s]}) = \int_a^s \|\gamma'(u)\| du$$

et donc en dérivant par rapport à s on trouve $\|\gamma'(s)\| = 1$ pour tout s . □

Remarque 3.9. Tout ceci est parfaitement intuitif : nous sommes en train de dire que pour parcourir une courbe de manière à ce que la longueur s'écoule comme le temps, il faut et il suffit de la parcourir à vitesse 1.

Proposition 3.10. Toute courbe géométrique orientée régulière et de classe C^1 admet un paramétrage normal.

Démonstration. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage régulier de la courbe de l'énoncé. On fixe $t_0 \in I$ et on pose

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du.$$

C'est une application $C^1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ et de dérivée strictement positive en tout point : elle réalise donc un C^1 difféomorphisme sur son image J . On pose alors $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, et on a pour tout $s \in J$,

$$\tilde{\gamma}'(s) = (\varphi^{-1})'(s)\gamma'(\varphi^{-1}(s)) = \frac{1}{\varphi'(t)}\gamma'(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t) \text{ où on a posé } t = \varphi^{-1}(s).$$

Ainsi $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ pour tout s , et la proposition précédente permet de conclure. \square

Il n'est pas facile en général de calculer explicitement l'abscisse curviligne, car cela nécessite d'intégrer des fonctions du type $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ et de prendre ensuite la fonction réciproque. Voici un exemple quelque peu artificiel où on peut mener tous les calculs.

Exemple 3.11. Soit le graphe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$, qui est donc paramétré par $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$ sur ce même intervalle. Tous calculs faits, on trouve pour que $t \geq 0$, l'abscisse curviligne est $\varphi(t) = \text{long}(\gamma|_{[0,t]}) = \arcsin(t)$, et donc, avec $\varphi^{-1}(s) = \sin s$ un paramétrage normal est $s \mapsto (\sin s, \cos s)$, quelle surprise !

4.4 Propriétés métriques des courbes planes, II : courbure

4.4.1 Courbure

Considérons maintenant une courbe C munie d'un paramétrage normal $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 (la preuve de la Proposition 3.10 montre que si une courbe régulière est C^k son paramétrage normal l'est aussi (le vérifier !)). Pour $s \in I$ on pose $T(s) = \gamma'(s)$ qui est de norme 1 : c'est le vecteur tangent unitaire dans le sens de l'orientation.

Lemme 4.1. On a $T'(s) \perp T(s)$.

Démonstration. Dériver la relation $\|T(s)\|^2 = 1$. \square

On pose alors $N(s)$ l'unique vecteur unitaire tel que $(T(s), N(s))$ forme une base orthonormale directe de \mathbb{R}^2 . On dit que $(\gamma(s), T(s), N(s))$ forme le **repère (mobile) de Frenet**. Par définition pour tout s on a $T'(s) = \kappa(s)N(s)$, où κ est une certaine fonction continue $I \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 4.2. La quantité $\kappa(s)$ est la courbure algébrique de C au point $\gamma(s)$. La courbure de C en $\gamma(s)$ est $|\kappa(s)|$.

Si on change le sens du paramétrage normal, $\kappa(s)$ est transformée en $-\kappa(s)$: c'est donc vraiment la courbure non signée qui a un sens géométrique. En revanche on vérifie simplement que le vecteur $\kappa(s)N(s)$ ne dépend pas du sens du paramétrage : ceci découle du calcul suivant qui montre que $\kappa(s)N(s)$ est dirigé "vers la concavité" de C . En effet par la formule de Taylor on a

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)T(s) + \frac{\kappa(s_0)}{2}(s - s_0)^2N(s_0) + o((s - s_0)^2)$$

et si $\kappa(s_0) \neq 0$, C est birégulière en $\gamma(s_0)$ et sa concavité est dans la direction de $\kappa(s_0)N(s_0)$. En particulier si on a un point d'inflexion, $\kappa(s_0) = 0$.

Remarque 4.3. On a $N(s) = R_{\pi/2}T(s)$, où $R_{\pi/2}$ est la rotation d'angle $\pi/2$. Ainsi en dérivant on obtient $N'(s) = R_{\pi/2}T'(s) = R_{\pi/2}\kappa(s)N(s) = -\kappa(s)T(s)$. Les relations

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) \end{cases}$$

s'appellent les **formules de Frenet**.

Remarque 4.4. La courbure est la dérivée du vecteur vitesse pour un point mobile parcourant la courbe à vitesse 1. Physiquement c'est donc l'**accélération** de la trajectoire (on se rappelle du cours de physique que si la valeur numérique de la vitesse est constante, il n'y a pas d'accélération tangentielle, et toute l'accélération est normale à la trajectoire).

Une autre interprétation de la courbure est qu'elle correspond à **la vitesse de rotation du vecteur tangent**. En effet $T(s)$ étant de norme 1, on peut l'écrire comme $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ (*a priori* cette expression n'est que locale car il y a un problème de détermination pour θ , nous étudierons la question de la détermination globale de θ dans un chapitre ultérieur). On a alors

$$T'(s) = \theta'(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) = \theta'(s)N(s),$$

comme annoncé. Cette caractérisation de la courbure va nous permettre de déterminer la courbure sans avoir à calculer l'abscisse curviligne.

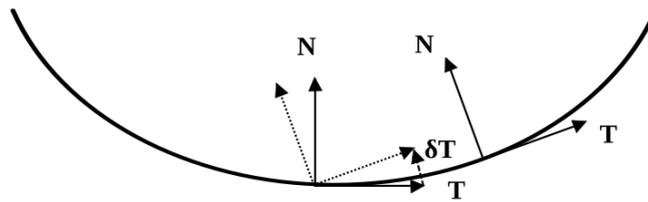


FIGURE 4.3 – Géométriquement, la courbure est la vitesse de rotation du repère (\vec{T}, \vec{N}) quand on parcourt la courbe à une vitesse linéaire constante égale à 1. (crédit Wikipédia)

Proposition 4.5. Pour une courbe paramétrée C^2 régulière $\gamma : I \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, on a pour tout $t \in I$,

$$|\kappa(\gamma(t))| = \frac{|x''y' - y''x'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}(t).$$

Démonstration. L'angle $\theta(t)$ de la discussion précédente est localement défini par

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Ainsi

$$\theta'(t)(1 + \tan^2(\theta(t))) = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^2}(t)$$

et donc

$$\theta' = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^2(1 + (y')^2/(x')^2)} = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2}.$$

Pour avoir la courbure, il faut calculer la dérivée par rapport à s . Faisons le calcul “à la physicienne” :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{ds}, \text{ mais } \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}.$$

d'où le résultat (exercice : transformer ceci en un raisonnement mathématique rigoureux). \square

Corollaire 4.6. Pour un graphe $y = f(x)$ la courbure en $(x, f(x))$ est égale à $\frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$.

4.4.2 Rayon et centre de courbure

En conservant les mêmes notations, on définit le **rayon de courbure** en $\gamma(s)$ par

$$R(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}.$$

Le point défini par

$$c(s) = \gamma(s) + R(s)N(s)$$

s'appelle le **centre de courbure** pour le paramètre s , et le cercle de centre $c(s)$ et rayon $R(s)$ est le cercle de courbure. Noter que si $\kappa(s) = 0$ (par exemple s'il y a un point d'inflexion en s), le centre de courbure est envoyé à l'infini. Le lieu des centres de courbures, c'est à dire la courbe paramétrée par $s \mapsto c(s)$, s'appelle la **développée** de C .

Lemme 4.7. *Si C est de classe C^3 et $\kappa'(s) \neq 0$, la tangente à la développée en $c(s)$ est la normale à C en $\gamma(s)$.*

Démonstration. Soit D la développée de C . On a

$$c'(s) = \gamma'(s) + R'(s)N(s) + R(s)N'(s) = T(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}N(s) - \frac{1}{\kappa(s)}(\kappa(s)T'(s)) = -\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}N(s),$$

où à la dernière égalité on a utilisé les formules de Frenet. On voit donc que si $\kappa'(s) \neq 0$, la tangente à D en $c(s)$ est la droite $c(s) + \mathbb{R}N(s) = \gamma(s) + \mathbb{R}N(s)$, qui est bien la normale à C en $\gamma(s)$. \square

Remarque 4.8. L'hypothèse $\kappa'(s) \neq 0$ est inoffensive. En effet, dans la plupart des cas pratiques, la courbe C est analytique, et on a que κ' est soit identiquement nulle, soit les zéros de κ' sont isolés. Or, si κ' est identiquement nulle, alors κ est constante, et on peut montrer que C est une droite ou cercle, dont la développée est réduite à un point (Exercice 4.10).

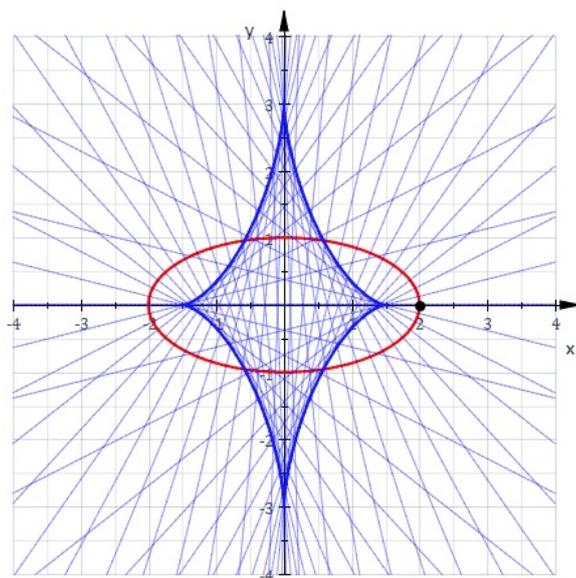


FIGURE 4.4 – Développée de l'ellipse (en rouge) comme l'enveloppe de ses normales. (crédit Wikipedia)

Il est important dans de nombreux problèmes pratiques de savoir déterminer la développée d'une courbe. Cela peut se faire directement par la formule de la courbure donnée à la Proposition 4.5 (pour peu de savoir déterminer son signe), mais il est beaucoup plus efficace d'utiliser le résultat du Lemme 4.7. La conclusion de ce lemme est que la développée est ce qu'on appelle l'**enveloppe** des normales. Une

enveloppe est une courbe tangente en chaque point à une famille à un paramètre de droites, et il y a des formules assez simples pour la déterminer. Il y a une opération inverse à prendre la développée : une **développante** de C est une courbe dont C est la développée. (il se trouve qu'il n'y a pas unicité de la développante).

Les développantes du cercle sont les courbes que décrit l'extrémité d'un fil que l'on déroule d'une bobine en le conservant tendu : sa normale en chaque point est en effet tangente au cercle. C'est une courbe qui joue un rôle important en ingénierie classique car elle a des propriétés particulières en termes de roulement (voir [Wikipedia](#)).

Nous allons conclure ce chapitre par une interprétation géométrique du cercle de courbure (et donc du rayon de courbure).

Théorème 4.9. *Si C est une courbe C^2 paramétrée par $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et birégulière en $\gamma(s_0)$, $s_0 \in I$, le cercle de courbure est l'unique cercle tangent à l'ordre 2 à C en $\gamma(s_0)$.*

Autrement dit, on a appris au lycée que la dérivée est caractérisée par le fait que c'est la pente de la droite qui approxime le mieux la courbe en un point. La courbure est donc un invariant lié à la dérivée seconde, et est caractérisée comme l'inverse du rayon du cercle qui approxime le mieux la courbe en un point. On dit que le cercle de courbure est le **cercle osculateur** à C en $\gamma(s)$ (qui vient du latin *osculare* : donner un baiser).

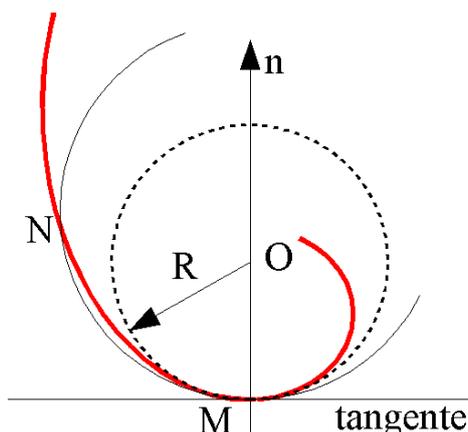


FIGURE 4.5 – Au point M de la courbe rouge, le cercle osculateur (en pointillés) approche mieux la courbe qu'un cercle tangent quelconque (passant par N). Son centre O et son rayon R sont le centre de courbure et le rayon de courbure de la courbe en M . (cf. [crédit Wikipedia](#))

Démonstration. Quitte à transformer la courbe par une isométrie plane (cf l'exercice 4.11), on peut supposer que $\gamma(s_0) = 0$, le vecteur tangent $\gamma'(s_0)$ est horizontal, et que la concavité de C est tournée vers le haut (on rappelle que comme γ est birégulière elle n'a pas d'inflexion en s_0). Dans ce cas on peut localement voir C au voisinage de $(0, 0)$ comme le graphe d'une fonction f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Si on paramètre la courbe par $t \mapsto (t, f(t))$, on voit que

$$\gamma(t) = (0, 0) + t(1, f'(0)) + \frac{t^2}{2}(0, f''(0)) + o(t^2),$$

et donc le caractère birégulier correspond à $f''(0) \neq 0$, et la propriété de concavité locale dit que $f''(0) > 0$. La Proposition 4.5 implique alors que la courbure en 0 vaut $\kappa(0) = f''(0)/(1 + f'(0)^2)^{3/2} = f''(0)$, et le rayon de courbure est $R(0) = 1/f''(0)$.

Un cercle tangent au graphe de f en 0 doit être centré sur l'axe des ordonnées, et pour des raisons de concavité, nous allons prendre ce cercle centré en $(0, \rho)$, avec $\rho > 0$ égal au rayon du cercle. L'équation de ce cercle est alors

$$x^2 + (y - \rho)^2 = \rho^2,$$

soit $y^2 - 2\rho y + x^2 = 0$. Cette équation en y se résout et ses solutions sont

$$y = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - x^2}.$$

Pour x proche de 0 ceci décrit l'équation de 2 graphes au dessus de l'axe des x . La branche passant par $(0, 0)$ (et donc tangente à l'axe des abscisses en $(0, 0)$) est celle d'équation

$$y = \rho - \sqrt{\rho^2 - x^2} = \frac{x^2}{2\rho} + O(x^4).$$

La formule de Taylor dit qu'au voisinage de 0, la courbe C a pour équation

$$y = f(x) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{2R(0)} + o(x^2).$$

On voit que ces deux développements limités coïncident à l'ordre 2 exactement quand $\rho = R(0)$: c'est ce qu'il fallait démontrer. \square

4.5 Exercices

Exercice 4.1

(à faire sans calculatrice!)

On considère la courbe paramétrée définie pour $t \in [0, 2\pi]$ par

$$(x(t), y(t)) = (\sin^3(t), \cos(t) - \cos^4(t)).$$

1. Déterminer les symétries de cette courbe et réduire l'intervalle d'étude.
2. Étudier les variations des fonctions x et y . Déterminer les points réguliers de la courbe où la tangente est verticale ou horizontale.
3. Déterminer ses points singuliers, leur type, et l'allure de la courbe près de ces points.
4. Tracer précisément la courbe (on donne $4^{1/3} \simeq 1,59$ et $(1 - 4^{-2/3})^{3/2} \simeq 0,47$).

Exercice 4.2

Une conique est une courbe d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, telle que la forme quadratique $(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ est non nulle. En utilisant la réduction des matrices symétriques, montrer que toute conique est : soit vide, soit une droite, soit la réunion de deux droites, soit une ellipse, soit une hyperbole, soit une parabole.

Exercice 4.3

Montrer la Proposition 2.4. Montrer plus généralement que $\text{Im}(\gamma)$ est une sous-variété lorsque le plus petit ℓ tel que $\gamma^{(\ell)}(t_0) \neq 0$ est impair.

Exercice 4.4

Montrer la proposition 2.5

Exercice 4.5

Montrer que si γ est analytique et non contenue dans une droite, alors pour tout t_0 il existe $\ell < m$ tels que $(\gamma^{(\ell)}(t_0), \gamma^{(m)}(t_0))$ forme une famille libre.

Exercice 4.6

Faire l'étude de la cardioïde et calculer sa longueur.

Exercice 4.7

Démontrer la Proposition 3.4. (En précisant bien comment paramétrer γ).

Exercice 4.8

Le flocon de Von Koch (ou disons une de ses portions) est construit géométriquement de la façon suivante : on part d'un segment unité $[0, 1]$, on le découpe en 3 morceaux égaux, et on remplace la partie centrale $[1/3, 2/3]$ par les deux autres cotés du triangle équilatéral mené à partir de ce segment. On itère ensuite cette construction en modifiant indéfiniment chaque segment rencontré de la même façon.

1. Trouver une paramétrisation naturelle du flocon. Indication : partir de $\gamma(t) = (t, 0)$ sur $[0, 1]$ et modifier uniquement γ sur $[1/3, 2/3]$ par une paramétrisation à vitesse constante des deux nouveaux segments. Itérer.
2. Montrer que cette paramétrisation est hölderienne (cf. l'exercice 1.2 du chapitre 1).
3. Montrer que la courbe de Von Koch n'est pas rectifiable.

Exercice 4.9

Calculer la longueur de l'arc de la parabole $y = x^2$ lorsqu'on la parcourt de $x = 0$ à $x = 1$.

Exercice 4.10

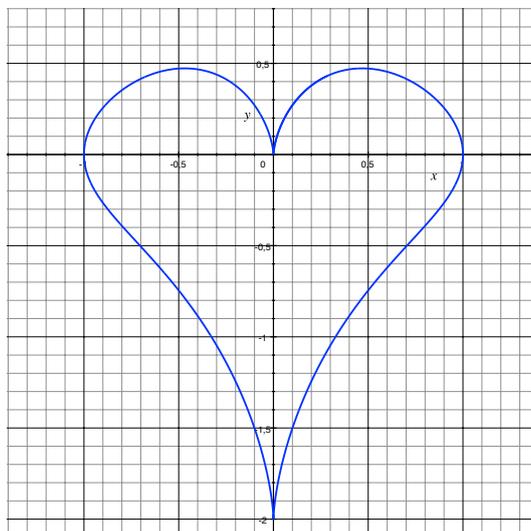
Soit γ un arc régulier C^2 de courbure constante. Montrer que γ est un arc de cercle ou un segment de droite.

Exercice 4.11

Montrer que la longueur et la courbure sont des notions invariantes par isométries affines.

4.6 Solutions

Solution de l'exercice 4.1



Solution de l'exercice 4.2

Réduire la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ en base orthonormale et faire une translation pour éliminer les termes de degré 1, ou homogénéiser en considérant la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$ et réduire celle-ci en base orthonormale.

Solution de l'exercice 4.3

Sans perte de généralité, on peut supposer que $x'(t_0) \neq 0$. Dans ce cas x réalise un difféomorphisme d'un voisinage V de t_0 sur un intervalle J , et la courbe coïncide alors localement avec le graphe de $s \mapsto y(x^{-1}(s))$ sur J (vérifier les détails).

Solution de l'exercice 4.6

On passe la courbe en coordonnées cartésiennes
$$\begin{cases} x(t) = \cos t(1 + \cos t) \\ y(t) = \sin t(1 + \cos t) \end{cases} .$$

- Le domaine de définition de γ est \mathbb{R} .
- γ est 2π -périodique. Tout d'abord, on a :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \cos^2(t) = \cos(-t) + \cos^2(-t) = x(-t) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(t)\sin(t) = -\sin(-t) - \cos(-t)\sin(-t) = -y(-t) \end{cases}$$

par parité et imparité des fonctions trigonométriques. Donc x est paire et y est impaire. On peut donc se ramener à $[0, \pi]$ pour l'étude et compléter la courbe par symétrie par rapport aux abscisses.

- Les dérivées de x et y sur $[0, \pi]$ sont : $x'(t) = -\sin(t)(1 + 2\cos(t))$, $y'(t) = \cos(t)(\cos(t) + 1) - \sin^2(t)$. Donc x' s'annule en $t \equiv 0 \pmod{\pi}$ et $t = \cos^{-1}(-1/2) \iff t = 2\pi/3$, y' s'annule en $t = \pi/3, \pi$. Ainsi x décroît sur $[0, 2\pi/3]$ tel que $x(0) = 2$, $x(2\pi/3) = -1/4$ et croît sur $[2\pi/3, \pi]$ tel que $x(2\pi/3) = -1/4$, $x(\pi) = 0$. y croît sur $[0, \pi/3]$ tel que $y(0) = 0$, $y(\pi/3) = 3\sqrt{3}/4$ et décroît sur $[\pi/3, \pi]$ tel que $y(\pi/4) = 3\sqrt{3}/4$, $y(\pi) = 0$. Les tangentes verticales sont en $(x(t), y(t))$ tels que $t = 0, 2\pi/3$, i.e. en $(2, 0), (-1/4, \sqrt{3}/4)$ et les tangentes horizontales sont en $(x(t), y(t))$ tels que $t = \pi/3$, i.e. en $(3/4, 3\sqrt{3}/4)$.
- La courbe étant périodique, il n'y a pas de branches infinies.
- Un développement limité de $\gamma(\pi + s)$ pour $s \rightarrow 0$ montre qu'il y a un point de rebroussement de première espèce en $(0, 0)$, avec une tangente horizontale.

Pour la longueur, on calcule :

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

où la dernière égalité vient de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On a alors :

$$\rho^2 + \rho'^2 = (1 + \cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 2(1 + \cos(\theta)) = 4 \cos^2(\theta/2).$$

D'où :

$$\text{long}(\gamma) = 4 \int_0^\pi \cos(\theta/2) d\theta = 8[\sin(\theta/2)]_0^\pi = 8.$$

Solution de l'exercice 4.9

On a :

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Par intégration par parties, on obtient aisément une primitive F de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$:

$$F(x) = x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

En faisant une nouvelle intégration par parties et en utilisant la fonction initiale, on obtient l'égalité :

$$F(x) = x\sqrt{1+x^2} - \left(F(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \right) \iff 2F(x) = x\sqrt{1+x^2} + \text{Arg sinh}(x)$$

ou $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est la fonction dérivée de la fonction réciproque du sinus hyperbolique, à savoir Argsh . On calcule donc l'expression de Argsh :

$$y = \text{Argsh}(x) \iff x = \sinh(y) \iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Ainsi, à une constante additive près :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right).$$

On revient alors à $\text{long}(\gamma)$, en faisant le changement de variable $u = 2x$:

$$\text{long}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+u^2} du = \frac{F(2) - F(0)}{2} = \frac{F(2)}{2} = \frac{2\sqrt{5 + \ln(2 + \sqrt{5})}}{4},$$

soit $\text{long}(\gamma) = 1,48$ à $0,01$ près.

Solution de l'exercice 4.10

On utilise un paramétrage (I, f) de la courbe par abscisse curviligne. Soit α une détermination de l'argument du vecteur tangent, c'est-à-dire qu'en tout s de I , on a $f'(s) = e^{i\alpha(s)}$. Les formules de Frenet entraînent que $\alpha'(s) = \kappa(s) = C$, où κ est la fonction courbure. En intégrant, on trouve $\alpha(s) = Cs + \alpha_0$. Quitte à effectuer une rotation du repère, on peut supposer que $\alpha_0 = 0$. On a alors $f'(s) = e^{iCs}$. On intègre alors, et on distingue deux cas : si $C \neq 0$ on obtient $f(s) = -iCe^{iCs} + z_0$ qui est la paramétrisation d'un cercle, et si $C = 0$ on obtient une droite.

Chapitre 5

Compléments de topologie

5.1 Les objets de base

5.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1. On appelle *distance* sur X une application $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, et
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un ensemble X muni d'une distance d s'appelle un **espace métrique**. Si la propriété plus forte

$$3' \quad d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$$

est satisfaite, on dit que (X, d) est un **espace ultramétrique**.

Exemple 1.2. Toute norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E induit une distance définie par $d(x, y) := \|x - y\|$. Donc toute partie d'un espace vectoriel normé est naturellement un espace métrique. C'est un exemple fondamental, et en un certain sens générique^a, mais il faut bien saisir que les espaces métriques généraux peuvent avoir des propriétés géométriques un peu "exotiques" (cf. l'exercice 5.3)

a. Chercher sur internet la notion de "plongement de Kuratowski", et voir un peu plus loin la discussion après l'Exemple 1.5.

Rappel 1.3. À partir de la notion de distance, on définit les notions suivantes exactement comme dans le cas des espaces normés : boules ouvertes et fermées, ouverts et fermés, voisinages, intérieur, adhérence, frontière, etc., et on a les mêmes propriétés (il suffit de remarquer que la norme n'apparaît pas explicitement dans les preuves, mais seulement la distance!) On se reportera pour cela au cours de topologie de L2.

Exemple 1.4. Sur \mathbb{R} , les boules ouvertes sont les intervalles $]a, b[$: un ouvert est donc par définition une union quelconque d'intervalles ouverts. En fait, on peut même démontrer que tout ouvert est la réunion d'un ensemble au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints (Exercice 5.1).

Exemple 1.5. Le **cube de Hilbert** $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, muni de la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

est un espace métrique.

Exemple 1.6. Sur tout ensemble X on peut définir une (ultra)distance par

$$\begin{cases} d(x, y) = 0 & \text{si } x = y \\ d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

qui est par définition la distance discrète. Quelles sont les boules pour cette distance ? Les ouverts ?

Remarquer qu'aussi étrange qu'il puisse paraître, on peut voir un tel espace métrique discret X comme une partie d'un espace vectoriel normé, et même d'un espace de Hilbert ! En effet, prenons un ensemble en bijection avec X (par exemple X lui-même), fabriquons un espace vectoriel abstrait E en associant à chaque $x \in X$ un vecteur e_x et décrétons que e_x est une base. (En d'autres termes, $E = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{R}e_x$ est l'ensemble des combinaisons linéaires abstraites finies des e_{x_i} .) On peut alors introduire un produit scalaire sur V en décrétant que la base e_x est orthonormale. Si $x \neq x'$ on a $\|e_x - e_{x'}\| = \sqrt{2}$. Ainsi, en posant $e'_x = e_x/\sqrt{2}$, l'application $\Phi : X \rightarrow V$ définie par $\Phi(x) = e'_x$ réalise un plongement isométrique de X dans V , autrement dit, comme espace métrique, X est la même chose que comme l'ensemble des e'_x . On voit que l'existence d'un tel plongement n'apporte pas beaucoup d'information sur les propriétés de X , et il est tout aussi utile de travailler directement dans X .

Exemple 1.7.

— On peut munir l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ de la distance

$$d(x, y) = e^{-\min\{j \mid x_j \neq y_j\}},$$

qui en fait un espace ultramétrique (exercice!) (une variante consiste à prendre $d(x, y) = (\min\{j \mid x_j \neq y_j\})^{-1}$).

— On peut définir sur \mathbb{Q} , pour tout nombre premier p , la **valuation p -adique**

$$v_p(x) = \sup \left\{ n \in \mathbb{Z} : x = p^n \frac{a}{b}, a \wedge p = b \wedge p = 1 \right\}$$

On montre (exercice!) la fonction $|\cdot|_p : x \mapsto p^{-v_p(x)}$ est une norme (ou valeur absolue) sur \mathbb{Q} qui munit \mathbb{Q} d'une structure d'espace ultramétrique via $d_p(x, y) = |x - y|_p$.

Le **théorème d'Ostrowski** stipule que toute norme non-triviale sur \mathbb{Q} est de la forme $x \mapsto |\cdot|^\alpha$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue usuelle (dite parfois "norme infinie" $|\cdot|_\infty$) ou une valeur absolue p -adique.

Définition 1.8. Si (X, d) est un espace métrique et Y est un sous ensemble de X , alors la restriction de d à $Y \times Y$ définit une distance sur Y . C'est par définition la distance induite par d sur Y .

Remarquer qu'une boule (ouverte, fermée) dans Y pour la distance induite est l'intersection de la boule correspondante de X avec Y . On en déduit qu'un sous ensemble $\Omega \subset Y$ est ouvert pour la structure métrique induite si et seulement si c'est l'intersection de Y avec un ouvert de X (exercice). On utilise souvent la terminologie "relativement ouvert" (ou fermé) pour préciser qu'on travaille avec la topologie induite.

Attention c'est une notion souvent un peu délicate à appréhender ! Par exemple, pour la distance induite par la distance usuelle de \mathbb{R} sur $[0, 1] \cup 2, \{2\}$ est (relativement) ouvert, $[1/2, 1[$ est fermé, et $[0, 1[$ est ouvert et fermé (pourquoi ?).

Définition 1.9. Deux distances d et d' sont dites **équivalentes** s'il existe $C, C' > 0$ tels que $d' \leq Cd$ et $d \leq C'd'$.

Exemple 1.10. Dans un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et donc induisent des distances équivalentes.

5.1.2 Espaces topologiques (pour la culture !)

Définition 1.11 (Topologie). Une topologie sur X est une classe de sous-ensembles $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, qui vérifie les axiomes suivants

1. contient \emptyset et X ,
2. est stable par union quelconque, et
3. est stable par intersection finie.

Les éléments de \mathcal{T} s'appellent par définition des **ouverts**. Un tel couple (X, \mathcal{T}) s'appelle un **espace topologique**. Le complémentaire d'un ouvert est dit **fermé**.

Cette définition axiomatique rappelle un peu la notion de tribu. Mais malgré cette similarité apparente, ces deux définitions donnent lieu à des théories (la théorie de la mesure et la topologie) totalement différentes ! Deux exemples extrêmes de topologies¹, qui sont définies sur n'importe quel ensemble, sont

- la topologie discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$;
- la topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Bien sûr, la Définition 1.11 est compatible avec ce que nous savons sur les ouverts dans un espace métrique, de sorte qu'un espace métrique (X, d) est naturellement topologique.

Inversement, une topologie est dite **métrisable** s'il existe une distance qui l'induit. Toutes les topologies ne sont pas métrisables : par exemple la **topologie de Zariski** sur \mathbb{C} est la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les complémentaires des ensembles finis (exercice : vérifier que ceci définit bien une topologie). C'est un cas particulier d'une notion fondamentale en algèbre commutative. La topologie de Zariski ne peut pas être métrisable : en effet deux ouverts non vides pour cette topologie s'intersectent. Or, une telle propriété ne peut pas avoir lieu dans un espace métrique : si $x \neq y$ les boules ouvertes $B(x, d(x, y)/2)$ et $B(y, d(x, y)/2)$ sont non-vides et disjointes. (La topologie grossière n'est pas métrisable pour les mêmes raisons.)

Remarque 1.12. Plus généralement, un espace topologique est dit **séparé** si pour tous $x \neq y$, il existe des ouverts U_x et U_y contenant respectivement x et y et tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. La topologie induite par une distance est toujours séparée (cf. ci-dessus).

Définition 1.13. Un sous-ensemble Y d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) hérite d'une topologie dont les ouverts sont les $\Omega \cap Y$, $\Omega \in \mathcal{T}$. C'est par définition la **topologie induite** par \mathcal{T} sur Y (exercice : vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie).

Dans le cadre métrique, on retrouve alors la notion de topologie induite (par la distance induite) vue précédemment, qui prend peut être un sens un peu plus naturel dans ce cadre. Par exemple, un sous-ensemble Y d'un espace métrique X est discret si la topologie induite par X sur Y est la topologie discrète, autrement dit, pour tout $y \in Y$, $\{y\}$ est relativement ouvert (exercice).

Une propriété des espaces métriques qui peut s'énoncer en parlant uniquement d'ouverts et de fermés a un sens dans un espace topologique. Par exemple : les fonctions continues (l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert), la notion d'adhérence (le plus petit fermé contenant), de voisinage, de suite convergente, etc. On parle de **notions topologiques**. Inversement, la notion de suite de Cauchy, par exemple, n'est pas topologique. De façon générale, c'est un bon exercice mental de tenter de comprendre si une notion donnée du cours de topologie est métrique ou topologique.

Proposition 1.14. Deux distances équivalentes induisent la même topologie, mais la réciproque est fausse.

En particulier, sur un espace vectoriel réel de dimension finie, comme toutes les normes sont équivalentes, il y a une **topologie canonique** qui est la topologie induite par toutes ces normes (on parle de "la topologie usuelle sur \mathbb{R}^n ").

1. Qui sont aussi des tribus, soit dit en passant.

Démonstration. Soient d et d' deux distances équivalentes, i.e. il existe $C > 0$ tel que $\frac{1}{C}d \leq d' \leq Cd$. Alors pour tous $a \in X$ et $r > 0$ on a $B_d(a, \frac{r}{C}) \subset B_{d'}(a, r) \subset B_d(a, rC)$. Par définition, Ω est un ouvert pour d' , si pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B_{d'}(a, r) \subset \Omega$. Dans ce cas, $B_d(a, \frac{r}{C}) \subset \Omega$ et donc Ω est ouvert pour d . Les hypothèses étant symétriques, on en déduit de même qu'un ouvert pour d est ouvert pour d' .

Voir l'Exercice 5.8 pour un exemple montrant que la réciproque est fausse. \square

5.2 Connexité

5.2.1 Définition et premiers exemples

Définition/Proposition 2.1. Un espace topologique X est dit **connexe** s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (i) Si $X = U \sqcup V$ est l'union disjointe d'ouverts, alors l'un d'eux est trivial.
- (ii) Si $X = F \sqcup G$ est l'union disjointe de fermés, alors l'un d'eux est trivial.
- (iii) Si $A \subset X$ est ouvert et fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$.
- (iv) Toute application continue $X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

La définition est énoncée dans le cadre des espaces topologique pour en souligner l'aspect topologique. En pratique nous ne travaillerons que dans des espaces métriques, et en première lecture on pourra partout remplacer "espace topologique" par "espace métrique" sans gâcher l'intérêt.

Démonstration. Exercice (5.9) \square

Remarque 2.2.

- Le point (iv) est le plus pratique pour *démontrer* la connexité.
- Les points (i), (ii) et (iii) sont plus utiles quand il s'agit d'*utiliser* la connexité.
- Si on veut montrer qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tout x dans un espace connexe X , une **preuve par connexité** consiste à établir que ensemble $\{x \in X : P(x) \text{ est vraie}\}$ est à la fois ouvert, fermé et non vide pour pouvoir appliquer le point (iii).

Théorème 2.3. Les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Démonstration.

\Leftarrow) Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \{-1, 1\}$ continue. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, f est constante.

\Rightarrow) Supposons que I n'est pas un intervalle. Il existe $x, y \in I$ et $z \in]x, y[$ tels que $z \notin I$. Mais alors

$$I = (I \cap \mathbb{R}_{<z}) \cup (I \cap \mathbb{R}_{>z})$$

est l'union de deux ouverts disjoints non-triviaux, donc il n'est pas connexe. \square

Proposition 2.4. Soit X un espace topologique.

1. La réunion d'une famille \mathcal{A} de connexes d'intersection deux-à-deux non vide est encore connexe.
2. Si $A \subset X$ est connexe, tout $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.
3. L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Démonstration.

1. Considérons une application continue $f : \bigcup \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$. Alors f est constante sur sa restriction à chaque A_i , et de plus $f(A_i) = f(A_i \cap A_j) = f(A_j)$ pour tout $i, j \in I$. Ainsi f est bien constante partout.

2. Soit $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue. Alors $f(A) = c$, et $f^{-1}(c)$ est fermé donc contient \bar{A} et en particulier B .
3. Supposons que $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Soit $g : f(X) \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Il s'agit de montrer que g est constante. Par connexité de X , $g \circ f$ est constante, et donc g est constante sur $f(X)$, comme annoncé. \square

Corollaire 2.5. *Si X est connexe et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X)$ est un intervalle.*

Autrement dit, les fonctions continues sur un connexe vérifient le théorème des valeurs intermédiaires ! Réciproquement si toute fonction continue de X dans \mathbb{R} vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, X est connexe (pourquoi ?) Ainsi, les espaces connexes sont exactement les espaces où le TVI est vérifié.

Exemple 2.6.

- Une partie Ω d'un espace vectoriel réel est **étoilée** s'il existe $x \in \Omega$ tel que pour tout $y \in \Omega$, on a $[x, y] \subset \Omega$. Ainsi

$$\Omega = \bigcup_{y \in \Omega} [x, y],$$

et il découle du premier point de la Proposition 2.4 que Ω est connexe.

- Ω est **convexe** si pour tous $x, y \in \Omega$ on a $[x, y] \subset \Omega$, ou de manière équivalente, si Ω est étoilé par rapport à chacun de ses points. Par exemple, les boules de \mathbb{R}^n (pour n'importe quelle norme) sont convexes et en particulier connexes.

5.2.2 Composantes connexes

Définition 2.7. *Si X est un espace topologique, la relation " $x \sim y$ s'il existe un connexe contenant x, y " est une relation d'équivalence. On appelle **composantes connexes** les classes d'équivalences pour cette relation.*

Proposition 2.8.

- $C(x)$ est la réunion de tout les connexes contenant x .
- La composante connexe $C(x)$ de x est connexe. En particulier, $C(x)$ est le plus grand connexe de X contenant x .
- $C(x)$ est fermée.

Démonstration. Le premier point est (plus ou moins) évident. Supposons maintenant que $f : C(x) \rightarrow \{0, 1\}$ soit continue et pour $y \in C(x)$, considérons un connexe C contenant x et y . Alors $f|_C$ est constante, et en particulier $f(x) = f(y)$. Il s'ensuit que f est constante, ce qui prouve que $C(x)$ est connexe. Finalement $C(x)$ est un connexe contenant x , soit $\overline{C(x)} \subset C(x)$, et donc $\overline{C(x)} = C(x)$. \square

Définition 2.9. *Un espace topologique X est **totalelement discontinu** si ses composantes connexes sont réduites à des points.*

Remarque 2.10. La définition de la connexité montre que X est totalelement discontinu si et seulement si pour tout $x, y \in X$ il existe une fonction continue $X \rightarrow \{0, 1\}$ valant 0 en x et 1 en y (exercice !)

Exemple 2.11.

- L'ensemble \mathbb{Q} , muni de la topologie du sous-espace $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, est totalelement discontinu. En effet, toute paire de rationnels distincts est séparée par un réel r contenu entre les deux. On peut alors considérer la fonction $\mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\}$ valant 0 sous r et 1 au-dessus.
- Les ensembles discrets sont totalelement discontinus.
- L'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance introduite à l'Exemple 1.7 est totalelement discontinu. Plus généralement, nous allons voir que tous les espaces ultramétriques sont totalelement discontinus.

Lemme 2.12. *Un espace topologique X est totalement discontinu si et seulement si pour tout $x \in X$ il existe une famille d'ouverts-fermés \mathcal{A} ne se rencontrant qu'en x .*

Démonstration.

- \Leftarrow) Supposons que $x, y \in C \subset X$ où C est connexe. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $C \cap A = C$ par connexité, d'où $y \in \bigcap \mathcal{A} = \{x\}$.
- \Rightarrow) Soit $x \in X$. Considérons pour tout $y \in X$ une fonction continue $f_y : X \rightarrow \{0, 1\}$ valant 0 en x et 1 en y . Alors $A_y = f_y^{-1}(0)$ est ouvert-fermé, et les $(A_y)_{y \in Y}$ sont d'intersection $\{x\}$. \square

Proposition 2.13. *Dans un espace ultramétrique X , les boules ouvertes sont fermées.*

Démonstration. Soit $B = B(x, r)$ une boule et $y \notin B$, c'est à dire $d(x, y) \geq r$. Alors pour tout $z \in B(y, r)$,

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) = d(x, y) \quad \text{et} \quad d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)) = d(x, z).$$

Ainsi $d(x, z) = d(x, y) \geq r$ d'où $X - B$ est ouvert, c'est à dire que B est fermée, comme annoncé. \square

Attention! Le fait que la boule ouverte $B(x, r)$ soit fermée ne signifie pas qu'elle coïncide avec la boule fermée de centre x et de rayon r .

Corollaire 2.14. *Un espace ultramétrique est totalement discontinu.*

Démonstration. En effet pour tout $x \in X$ on a $\{x\} = \bigcap_{r>0} B(x, r)$, mais les boules ouvertes $B(x, r)$ sont aussi fermées. \square

Remarque 2.15. Il faut se méfier de l'intuition sur la connexité quand on travaille sur des espaces qui ne sont pas compacts. Le lecteur ne craignant pas la migraine peut par exemple faire une recherche internet sur le "tapi de Cantor". De façon générale, quand on travaille avec la notion de composante connexe, il faut bien prendre garde à appliquer scrupuleusement les définitions.

5.2.3 Connexité par arcs et par chaînes

Définition 2.16. *Un espace topologique X est dit **connexe par arcs** si tous points $x, y \in X$ sont reliés par un chemin continu, c'est à dire s'il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Remarque 2.17. Comme on l'a déjà vu, selon certains auteurs, un **arc** est un chemin injectif. Il faudrait donc différencier les notions de connexité par chemins et de connexité par arcs. Par chance, on peut montrer que ces notions sont équivalentes, donc la terminologie est cohérente.

Proposition 2.18. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Considérons une application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ ainsi que deux points $x, y \in X$. Il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ reliant x à y , et la connexité de $[0, 1]$ implique que $f \circ \gamma$ est constante. En particulier $f(x) = f(y)$, d'où le résultat. \square

Théorème 2.19. *Un ouvert Ω de \mathbb{R}^n (muni de sa topologie usuelle) est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs. Dans ce cas, on appelle Ω un **domaine**.*

Démonstration. Nous allons raisonner par connexité. Soit $x \in \Omega$ et A l'ensemble de tous les points atteignables par un chemin partant de x . Alors A est clairement ouvert, car les boules sont convexes. Pour montrer qu'il est fermé, supposons que l'on dispose d'une suite $y_n \rightarrow y$ où $y_n \in A$ pour tout n . Comme Ω est ouvert, il existe une boule $B(y, r)$ contenue dans Ω , et $y_n \in B(y, r)$ à partir d'un certain rang n_0 . Par convexité des boules, on peut relier y_{n_0} à y , et donc par concaténation on obtient un chemin de x à y . Ainsi A est ouvert et fermé, et on conclut que $\Omega = A$. \square

Exemple 2.20. Attention ! Il existe des parties de \mathbb{R}^n qui sont connexes mais pas connexes par arcs. Considérons par exemple

$$A = \overline{\{(x, \sin 1/x) \mid x > 0\}}.$$

Ce graphe est connexe en tant qu'image de $\mathbb{R}_{>0}$ par une application continue. En revanche, supposons qu'il existe un arc $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (0, 0) \sim (\pi^{-1}, 0)$. Alors en posant $t_0 = \inf \{t \in [0, 1] \mid \gamma_0(t) > 0\}$, on a

$$\gamma_2(t) = \sin\left(\frac{1}{\gamma_1(t)}\right) \quad \forall t > t_0.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \gamma_1(t) = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de trouver des suites $t_n \rightarrow t_0^+$ et $s_n \rightarrow t_0^+$ vérifiant respectivement $\gamma_1(t_n)^{-1} = n\pi$ et $\gamma_1(s_n)^{-1} = n\pi + \pi/2$. Mais alors

$$0 = \gamma_2(t_n) \rightarrow \gamma_2(t_0^+) \text{ et } \gamma_2(s_n) = 1 \rightarrow \gamma_2(t_0^+),$$

ce qui est une contradiction.

Définition 2.21. On appelle ε -*chaîne* une famille finie de points (a_i) telle que $a_0 = x$, $a_n = y$, et $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout $0 \leq i < n$.

Si tous les points d'un espace métrique X sont reliés par des ε -chaînes, on dit que X est **connexe par chaînes**.

Proposition 2.22. Tout espace métrique connexe est connexe par chaînes.

Démonstration. Voir l'exercice 5.17. □

Proposition 2.23. Un espace métrique compact est connexe si et seulement s'il est connexe par chaînes.

Démonstration. On doit montrer l'implication connexe par chaînes implique connexe. Pour cela on prend X un compact connexe par chaînes et f une fonction continue à valeurs dans $\{0, 1\}$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue. En particulier il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x, y) < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < 1/2$. Ceci implique que f est constante sur toute δ -chaîne, et ainsi f est constante. □

Exemple 2.24. \mathbb{Q} est totalement discontinu, connexe par chaînes, mais pas connexe. L'ouvert $]0, 1[\cup]1, 2[$ est connexe par chaînes mais pas connexe.

5.2.4 Dans les espaces de matrices

Théorème 2.25.

(i) $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

(ii) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\text{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Lemme 2.26. L'ensemble \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Démonstration. Notons $\{z_1, \dots, z_n\}$ l'ensemble fini en question et étudions la connexité par arcs de $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Posons $r := \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\} + 1$; alors le cercle C centré en l'origine de rayon r est une partie connexe par arcs incluse dans Ω . Soit $z \in \Omega$ et montrons qu'il peut être relié à un point de C .

— Si $|z| \geq r$: on écrit $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Le segment d'extrémités z et $re^{i\theta}$ est inclus dans Ω et rejoint z à un point de C .

- Si $|z| < r$: toutes les droites passant par z coupent C en deux points ; il y a une infinité de ces droites mais qu'un nombre fini qui passent par l'un des z_1, \dots, z_n . Il existe donc une droite passant par z et coupant C en restant incluse dans Ω : il est donc possible de relier z à C par un segment inclus dans Ω . Quitte à transiter par un arc (du cercle C), il est possible de relier n'importe quels points de Ω tout en restant dans ce dernier : Ω est donc une partie connexe par arcs. □

Démonstration.[Démonstration du théorème]

- (i) Pour $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, on considère l'application $\lambda \mapsto \lambda A + (1 - \lambda)B$. $\lambda = 0$ donne B et $\lambda = 1$ donne A . Considérons l'application $D : \lambda \mapsto \det(\lambda A + (1 - \lambda)B)$ qui va de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On cherche

$$\begin{aligned} \lambda : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \lambda(t) \end{aligned}$$

telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $D(\lambda(t)) \neq 0$. Or D est un polynôme de degré n non identiquement nulle (car $D(0) \neq 0$ et $D(1) \neq 0$). Autrement dit, $D \in \mathbb{C}_n[X]$. Donc D a un nombre fini de racines. Or \mathbb{C} privé d'un ensemble fini est connexe par arcs (Lemme 4.2.3.6). Donc il existe $\lambda(t)$ telle que $\lambda(0) = B$ et $\lambda(1) = A$.

- (i) Démonstration alternative. L'application $M \mapsto A^{-1}M$ est un homéomorphisme. En appliquant cet homéomorphisme, on se ramène à relier I et $C = BA^{-1}$. Comme C est trigonalisable, il existe triangulaire supérieure inversible telle que $C = P^{-1}TP$. On relie alors T à I par un chemin γ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t)$ est inversible (dans les matrices triangulaires supérieures : facile) et on pose $\tilde{\gamma}(t) = P^{-1}\gamma(t)P$.
- (ii)
 - $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe car $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \sqcup \text{GL}_n^-(\mathbb{R})$ qui sont deux ouverts disjoints et non vides (par exemple $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est ouvert car $\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ avec l'application $\det(\cdot)$ continue et \mathbb{R}_+^* ouvert).
 - Montrons que $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe. Le cas de $\text{GL}_n^-(\mathbb{R})$ s'en déduit car GL_n^- est l'image de GL_n^+ par $M \rightarrow AM$, où A est n'importe quelle matrice de déterminant strictement négatif. On rappelle que les transvections et dilatations engendrent GL_n . Concrètement, cela veut dire que pour $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un nombre fini de transvections T_1, \dots, T_k , et une matrice de dilatation $\exists D$ telles que $A = T_1 \cdots T_k D$. (Cette décomposition découle de l'existence du pivot de Gauss.) Rappelons qu'une matrice de transvection est de la forme $T_k = I_n + cE_{ij}$ où E_{ij} est la matrice élémentaire ; une dilatation est la matrice identité ou le coefficient en bas à droite a été remplacé par $\det(A)$. On pose alors $T_k(t) = I_n + ctE_{ij}$: pour $t = 1$, on retrouve $T_k(1) = T_k$ et pour $t = 0$, $T_k(0) = I_n$. On pose $D(t)$ la matrice identité où le coefficient en bas à droite a été remplacé par $td + (1 - t)$. On combine tout cela pour obtenir

$$A(t) = T_1(t) \cdots T_k(t)D(t),$$

qui est un chemin continu de matrices reliant l'identité à A , et le théorème est démontré. □

Remarque 2.27. De même on montre que le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 est connexe par arcs.

5.3 Compacité

5.3.1 Compacité séquentielle

Définition 3.1. Un espace métrique X est dit **séquentiellement compact** si de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite convergente.

Rappel 3.2. On connaît déjà grâce au cours de L2 certaines propriétés des espaces séquentiellement compacts. Par exemple, le théorème de Bolzano-Weierstraß affirme qu'une partie K de \mathbb{R}^n est séquentiellement compacte si et seulement si elle est fermée bornée. Le théorème de Heine affirme que toute fonction continue sur d'un espace séquentiellement compact K est uniformément continue.

Proposition 3.3. Soit K un espace séquentiellement compact. Alors

- (i) K est complet ;
- (ii) tout fermé de K est séquentiellement compact ;
- (iii) l'image de K par une application continue (à valeurs dans un espace métrique quelconque) est séquentiellement compacte ;
- (iv) une fonction continue sur K est bornée et atteint ses bornes ;
- (v) toute fonction continue sur K est uniformément continue ;
- (vi) une suite dans K n'ayant qu'une valeur d'adhérence converge.

Démonstration. Ces résultats ont été vus dans le cours de L2. Pour le point (1), on remarquera qu'une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge. Le point (2) est très simple, et le point (3) implique le (4) en prenant l'image de K dans \mathbb{R} . Pour le (3) on prend une suite (y_n) dans $f(K)$. Par définition pour chaque n , il existe $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$, on extrait une sous-suite convergente de (x_n) , on applique la continuité de f , et c'est gagné. Le point (5) (Théorème de Heine) a été démontré au premier chapitre.

Il est peut être utile de détailler la preuve du dernier point (6). Soit x_n une suite n'ayant qu'une valeur d'adhérence α . Supposons par l'absurde que x_n ne converge pas vers α . On a donc :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, d(x_m, \alpha) \geq \varepsilon.$$

Alors il existe m_0 tel que $d(x_{m_0}, \alpha) \geq \varepsilon$ et il existe $m_1 \geq m_0$ tel que $d(x_{m_1}, \alpha) \geq \varepsilon$. Ainsi de suite, on construit une suite extraite (x_{m_n}) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{m_n}, \alpha) \geq \varepsilon$.

Par compacité, on peut extraire une suite convergente de $(x_{m_n}) := (x_{m_\varphi(n)})$ tel que (x_{m_n}) tend vers β quand n tend vers l'infini, qui est une valeur d'adhérence de x_n . Or par continuité de la distance, $d(\beta, \alpha) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta \neq \alpha$: contradiction. \square

5.3.2 Compacité

La définition suivante est la "bonne" définition topologique de la compacité. On prendra garde au fait qu'elle n'est **pas** équivalente à la précédente (les contre exemples sont néanmoins assez sophistiqués).

Définition 3.4. Un espace topologique X est dit **compact** si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).

Remarque 3.5.

1. Noter qu'en prenant le complémentaire, une formulation équivalente de la propriété de Borel-Lebesgue est "de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie qui a la même propriété".
2. La définition a été énoncée dans un cadre topologique pour mettre en évidence le fait qu'elle ne dépend que de la notion d'ouvert. Mais dans la suite nous ne travaillerons que dans le cadre métrique.

Lemme 3.6. Si (K_n) est une suite décroissante de compacts non vides, l'intersection $\bigcap_n K_n$ est non-vide.

Démonstration. En effet, les K_n peuvent être vus comme des fermés de K_0 , et la propriété de Borel-Lebesgue dit que si l'intersection des K_n est vide, il existe n_0 tel que $\bigcap_{n=1}^{n_0} K_n$ est vide. Mais cette intersection est égale à K_{n_0} , ce qui est contradictoire. \square

Corollaire 3.7 (Variante). Soit K l'intersection d'une suite décroissante de compacts. Si U est un ouvert contenant K , on a $K_n \subset U$ à partir d'un certain rang.

À retenir : La compacité est un moyen d'obtenir des propriétés de finitude.

Lemme 3.8 (de Lebesgue). Soit X un espace métrique séquentiellement compact, et \mathcal{U} un recouvrement ouvert. Alors il existe $\alpha > 0$ tel qu'en tout point $x \in X$ la boule $B(x, \alpha)$ est contenue dans un des ouverts de \mathcal{U} . Le réel $\alpha > 0$ est appelé **nombre de Lebesgue** du recouvrement.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe pour tout $\alpha > 0$ un point x_α vérifiant $B(x_\alpha, \alpha) \not\subset U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. On choisit $\alpha_n = 1/n$, qui nous fournit une suite (x_n) dont on extrait une suite convergente $x_{\varphi n} \rightarrow x$. Mais \mathcal{U} recouvre X , donc il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U$. Fixons $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. À partir d'un certain rang, on a $x_{\varphi(n)} \in B(x, r/2)$ et donc on obtient

$$B(x_{\varphi(n)}, r/2) \subset B(x, r) \subset U.$$

C'est une contradiction. □

Proposition 3.9.

1. Un fermé d'un compact est compact.
2. L'image continue d'un compact est un compact.

Démonstration. Ces deux points découlent directement de la définition, et sont laissés en exercice (le faire!). □

Théorème 3.10. Un espace métrique est séquentiellement compact si et seulement s'il est compact.

Démonstration.

\Rightarrow) Par l'absurde, supposons que \mathcal{U} est un recouvrement ouvert d'un espace séquentiellement compact X n'admettant pas de sous-recouvrement fini. On pose α son nombre de Lebesgue. Soit $x_0 \in X$ quelconque. On fixe U_0 tel que $B(x_0, \alpha) \subset U_0$. Par hypothèse, U_0 ne recouvre pas x . Il existe donc $x_1 \in X \setminus U_0$. Soit $U_1 \in \mathcal{U}$ tel que $B(x_1, \alpha) \subset U_1$. Par hypothèse, $U_0 \cup U_1$ ne recouvre pas X . En itérant ce raisonnement, on construit ainsi une suite (x_n) pour laquelle

$$B(x_n, \alpha) \subset U_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i.$$

Puisque X est séquentiellement compact, on peut en extraire une suite convergente $x_{\varphi(n)}$. Mais par construction on a

$$d(x_{\varphi n}, x_{\varphi m}) \geq \alpha \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

donc cette sous-suite ne peut pas être de Cauchy. Cette contradiction montre que \mathcal{U} admet bien un sous-recouvrement fini.

\Leftarrow) Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \geq 0$ on pose

$$F_n = \overline{\{x_p, p \geq n\}}.$$

C'est une suite décroissante de fermés, donc par propriété de Borel-Lebesgue, son intersection est non vide. On montre alors aisément que tout élément de $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) . □

Définition 3.11. Un espace métrique X est dit **précompact** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε .

Théorème 3.12. *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Démonstration.

⇒) Si X est compact, la famille des boules $\{B(x, \varepsilon), x \in X\}$ recouvre X , et en extrayant un sous-recouvrement fini on voit que X est précompact. Par ailleurs, une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge (exercice!) donc un compact est complet.

⇐) Considérons une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ dont on cherche à extraire une sous-suite convergente. On va s'inspirer de la preuve du théorème de Bolzano-Weierstraß. Puisque X est recouvert par un nombre fini de boules $B(y, 1)$, l'une d'entre elles, disons $B(y_1, 1)$, contient une infinité de termes de la suite. Alors son adhérence est encore compacte, recouverte par une finitude de boules de rayon $1/2$. L'une d'elles contient une infinité de termes de la suite (x_n) . On procède ainsi itérativement, une extraction diagonale fournissant une sous-suite vérifiant

$$x_{\varphi n} \in B(y_n, 2^{-n}) \supseteq B(y_{n+1}, 2^{-n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or les $\bar{B}(y_n, 2^{-n})$ constituent une suite décroissante de fermés non-vides, et de diamètre tendant vers 0. Par le théorème des fermés emboîtés (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse de complétude) son intersection est réduite à un point y , qui est une valeur d'adhérence de (x_n) . □

Remarque 3.13. Si X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d on a précompact \Leftrightarrow borné et complet \Leftrightarrow fermé.

Théorème 3.14 (Bicontinuité automatique). *Si X et Y sont des espaces métriques, avec X compact et $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et bijective, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une telle application. Puisqu'un fermé de X est compact, f est fermée (i.e. l'image d'un fermé par f est fermé). Autrement dit, f^{-1} est continue, cqfd. □

Définition 3.15. *Un espace topologique X est localement compact si tout point admet un voisinage compact, c'est à dire qu'en tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert contenu dans un compact $x \in U \subset K \subset X$.*

Théorème 3.16 (Riesz). *Soit E un espace vectoriel normé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. E est localement compact ;
2. la boule unité fermée est compacte ;
3. E est de dimension finie.

Démonstration. On vérifie aisément l'équivalence (1) \Leftrightarrow (2). L'implication (3) \Rightarrow (2) a été vue dans le cours de topologie de L2, reste à montrer (2) \Rightarrow (3). Par précompactité, il existe une famille finie x_1, \dots, x_n telle que $\bar{B}(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1/2)$. Soit F l'espace vectoriel engendré par les x_i . Nous allons montrer que $E = F$.

On note $B = B(0, 1)$; remarquer que $B(x_i, 1/2) = x_i + B/2$ (avec des notations évidentes). Ainsi on a $B \subset F + B/2$. Mais alors $B/2 \subset F + B/4$ et donc $B \subset F + F + B/4 = F + B/4$. Par récurrence immédiate on déduit que $B \subset F + B/2^n$. Autrement dit, tout $x \in B$ s'écrit sous la forme $x = y_n + z_n$, avec $\|z_n\| < 2^{-n}$. Donc la suite (y_n) tend vers x . Mais $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$, et F est un sous-espace de dimension finie donc il est fermé : en effet il est complet, donc fermé si on le plonge dans n'importe quel espace métrique. On conclut donc que x appartient à F , et comme $x \in B$ était quelconque, le théorème est démontré. □

5.3.3 Normalité des compacts

Définition 3.17. Un espace topologique X est **normal** si pour tous fermés disjoints $F_1, F_2 \subset X$ on peut trouver des ouverts disjoints $O_1, O_2 \subset X$ tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$.

Rappel 3.18. Si A est une partie d'un espace métrique X , on peut définir la **distance à A** par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Il découle directement de la définition que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$. On montre que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, et en particulier continue (voir l'exercice 5.23).

Si B est une autre partie de X , on pose

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y) = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf_{y \in B} d(y, A).$$

Si A, B sont fermés disjoints et l'un au moins compact, alors $d(A, B) > 0$ (voir la proposition suivante).

Proposition 3.19. Les espaces métriques compacts sont normaux.

Remarque 3.20. Un espace topologique compact (séparé) est également normal.

Démonstration. Soient $F_1, F_2 \subset X$ des fermés, donc compacts. Comme la fonction $x \mapsto d(x, F_2)$ est continue sur le compact F_1 , elle atteint ses bornes, et on en déduit que $\delta := d(F_1, F_2) > 0$. Alors les ouverts

$$O_1 = \{x, d(x, F_1) < \delta/3\} \quad \text{et} \quad O_2 = \{x, d(x, F_2) < \delta/3\}$$

conviennent. □

Proposition 3.21 (Lemme d'Urysohn). Si F_1, F_2 sont des fermés disjoints d'un espace métrique X , il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ vérifiant $f|_{F_1} = 0$ et $f|_{F_2} = 1$.

Démonstration. $f : x \mapsto \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$ convient. □

Remarque 3.22. En appliquant une transformation affine, le lemme est valable en remplaçant $[0, 1]$ par n'importe quel intervalle fermé.

Corollaire 3.23. Un espace métrique quelconque est normal.

Démonstration. Il suffit de considérer les ouverts $f^{-1}(]-\infty, 1/3])$ et $f^{-1}(]2/3, +\infty[)$, où f est comme dans la proposition précédente. □

Théorème 3.24 (prolongement de Tietze). Soit $F \subset X$ un fermé dans un compact, et $f : F \rightarrow [-1, 1]$ une application continue. Alors f admet un prolongement continu à X , c'est-à-dire il existe une application continue $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$ telle que $\bar{f}|_F = f$.

Lemme 3.25. Soit X un espace métrique compact et $F \subset X$ un fermé. Pour toute fonction continue $f : F \rightarrow [-1, 1]$ il existe une application continue $g : X \rightarrow [-1, 1]$ vérifiant

- $|g| \leq 1/3$ sur X .
- $|f - g| \leq 2/3$ sur F .

Démonstration. Considérons les fermés

$$F_+ = \{x \in F \mid f(x) \geq 1/3\} \quad \text{et} \quad F_- = \{x \in F \mid f(x) \leq -1/3\}.$$

On pose $g|_{F_+} = 1/3$ et $g|_{F_-} = -1/3$. Il est clair que $-2/3 \leq f-g \leq 2/3$ sur $F^+ \cup F^-$. Le lemme d'Urysohn permet d'étendre g en $X \rightarrow [-1/3, 1/3]$ (voir la Remarque 3.22). Si maintenant $x \in F \setminus (F^+ \cup F^-)$, alors $|f(x)| \leq 1/3$ et $|g(x)| \leq \frac{1}{3}$. Ainsi on a bien $|f-g| \leq 2/3$ sur F . \square

Démonstration.(Théorème de Tietze) On applique le lemme précédent qui fournit une première approximation g_1 . On applique alors de nouveau le lemme à $(f-g)|_F$ (ou plutôt à sa renormalisée $\frac{3}{2}(f-g)|_F$), construisant $g_2 \in \mathcal{C}(F)$ telle que

$$|g_2| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \text{ sur } K \quad \text{et} \quad |f-g_1-g_2| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \text{ sur } F.$$

Procédant itérativement ainsi, on obtient une suite de fonctions (g_n) vérifiant

$$|g_n| \leq \frac{2}{3^n} \text{ sur } X \quad \text{et} \quad \left| f - \sum_{k=1}^n g_k \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \text{ sur } F.$$

La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} g_k$ converge normalement, et on conclut que la fonction $\bar{f} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$ définit une extension continue de f à X . \square

Remarque 3.26. Une variante utile du résultat précédent est la suivante : si $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact, toute application continue $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge continûment en une fonction à support compact sur \mathbb{R}^n .

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. On considère une fonction plateau θ valant 1 sur $\overline{B(0, R)}$ et nulle hors de $B(0, 3R/2)$. Le théorème de prolongement de Tietze fournit une extension continue f^* de f à $\overline{B(0, 2R)}$ et on pose alors $f^{**} = \theta f^*$, qui est l'extension souhaitée. \square

5.4 Exhaustions, recouvrements localement finis et partitions de l'unité

Dans cette section, nous travaillerons principalement dans \mathbb{R}^d .

Proposition 4.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Il existe une suite croissante de compacts $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \subset K_{n+1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \geq 0} K_n = \Omega.$$

Une telle suite s'appelle une **exhaustion** de Ω .

Démonstration. Il suffit de poser

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{B(0, n)}. \quad \square$$

Définition 4.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et F une partie de Ω . On dit que F est **relativement compact** dans Ω , lorsque \overline{F} est compact et $\overline{F} \subset \Omega$. Ceci se note en général $F \Subset \Omega$.

Remarque 4.3. En particulier, cela implique que l'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ pour lequel

$$F_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, F) \leq \varepsilon\} \subset \Omega.$$

En effet, il suffit d'appliquer le Corollaire 3.23 à F et Ω^c .

Proposition 4.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Il existe un recouvrement de Ω par un ensemble dénombrable \mathcal{F} de boules ouvertes :

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$$

, tel que :

1. $B(x_j, 2r_j) \subset \Omega$ pour tout $j \geq 1$;
2. \mathcal{F} est **localement fini**, c'est à dire que tout $x \in \Omega$ possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini d'éléments de \mathcal{F} ;
3. $r_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Remarque 4.5. Le troisième point découle en fait des deux premiers (Exercice 5.25).

Démonstration. On se donne une exhaustion (K_j) de Ω , étendue par $K_0 = \emptyset$. Pour chaque j on recouvre $K_{j+1} - K_j$ par un nombre fini de boules $B(x_i, r_i)$ telles que $B(x_i, 2r_i) \subset \Omega$ et $r_i \leq 1/j$, ce que l'on peut faire car $\overline{K_{j+1} - K_j} \subset K_{j+1}$ est compact.

Considérons la collection de toutes les boules obtenues. Il est clair qu'elles recouvrent Ω et vérifient le premier et dernier points. Pour le second, fixons $x \in \Omega$ et soit j l'indice minimal pour lequel $x \in K_j$ (qui existe car (K_j) forme un recouvrement de Ω). Par définition $x \in \overset{\circ}{K}_{j+1}$, et

$$\delta := d(x, K_{j+2}^c) > 0.$$

En particulier $B(x, \delta/2)$ est disjointe de $B(x_i, r_i)$ pour i suffisamment grand, car $r_i \rightarrow 0$ et ces boules sont centrées dans $K_{i+1} - K_i$. □

Remarque 4.6. Il est possible de faire en sorte que tout point appartienne à au plus $C(d)$ boules, où $C(d)$ est une constante ne dépendant que de la dimension (Théorème de Besicovitch).

Proposition 4.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $\mathcal{F} = \{B(x_j, r_j), j \geq 1\}$ un recouvrement localement fini comme à la Proposition 4.4. Alors il existe une famille $(\theta_j)_{j \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ , telles que pour tout j on ait $\text{supp } \theta_j \subset B(x_j, 2r_j)$ et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j = 1 \text{ sur } \Omega.$$

Une telle famille de fonctions s'appelle une **partition de l'unité**. Les partitions de l'unité sont un outil essentiel de l'analyse et de la géométrie : leur utilité est de permettre de globaliser les propriétés locales, en classe C^∞ .

Démonstration. Pour chaque boule du recouvrement \mathcal{F} on considère une fonction plateau lisse $\tilde{\theta}_j$ valant 1 sur $B(x_j, r_j)$ et 0 hors de $B(x_j, 2r_j)$. Alors la fonction

$$\tilde{\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_j$$

est trivialement de classe C^∞ car pour tout point de Ω , il existe un voisinage dans lequel la somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Par ailleurs comme \mathcal{F} est un recouvrement, $\tilde{\theta}$ est strictement positive partout. Pour conclure, il suffit donc de poser pour tout $j \geq 0$

$$\theta_j = \frac{\tilde{\theta}_j}{\tilde{\theta}}.$$

□

Remarque 4.8.

1. On peut construire une partition de l'unité subordonnée à n'importe quel recouvrement localement fini.
2. Ici on a travaillé avec des fonctions C^∞ , mais cette notion est également intéressante dans un cadre continu, sur un espace métrique muni d'un recouvrement localement fini.

Voici une première application :

Théorème 4.9 (Lemme d'Urysohn C^∞). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et K un compact inclus dans Ω . Alors il existe $\varphi \in C^\infty$, telle que $\varphi = 1$ au voisinage de K et $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$*

Démonstration. On considère une exhaustion de Ω par des K_j , et comme au dessus on obtient un recouvrement de Ω par des $B(x_i, r_i)$ telles que $\begin{cases} B(x_i, 2r_i) \subset \Omega \\ r_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \\ \text{le recouvrement est localement fini} \end{cases}$. Par ailleurs, il existe

j_0 tel que $K \subset K_{j_0}$. En effet, comme $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ on a $\bigcup \overset{\circ}{K}_j = \Omega$. Ainsi, les $\overset{\circ}{K}_j$ forment un recouvrement ouvert de K , et il suffit d'extraire un sous recouvrement fini.

On va construire φ une fonction plateau au voisinage K_{j_0} . Considérons une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $B(x_i, r_i)$. On considère dans cette famille $I := \{i \mid B(x_i, 2r_i) \supseteq K_{j_0} \neq \emptyset\}$. Par construction, I est fini, et on pose $\varphi := \sum_{i \in I} \theta_i$. C'est une fonction C^∞ , à support compact dans Ω , et comme au voisinage de K on a

$$\sum_{i \in I} \theta_i(x) = \sum_{i \geq 0} \theta_i(x) = 1,$$

on obtient $\varphi = 1$ au voisinage de K , comme annoncé. □

Théorème 4.10. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est ouvert, et $F \subset \Omega$ est fermé, alors il existe une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $F = \{f = 0\}$.*

En d'autres termes, il n'y a pas de limite à la complexité du lieu des zéros d'une fonction C^∞ , outre la propriété nécessaire d'être un fermé. Noter qu'il est évident que tout fermé est le lieu des zéros de la fonction **continue** $x \mapsto d(x, F)$.

À l'inverse, le lieu des zéros d'une fonction analytique est très régulier, c'est ce qu'on appelle un **ensemble analytique**. Par exemple, dans le plan, un ensemble analytique est localement la réunion finie d'une courbe analytiquement paramétrée et d'un ensemble fini.

Démonstration. Posons $\Omega' = \Omega - F$, et fixons un recouvrement de Ω' par des boules $B(x_i, r_i)$ vérifiant les propriétés de la proposition 4.4. Nous allons construire la fonction recherchée, ci-après désignée par f , sous la forme de la somme d'une série de fonctions $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \theta_j$ où les ε_i sont des constantes judicieusement choisies afin que f soit lisse. Il suffit pour cela que les séries dérivées

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon_j \theta_j^{(k)}$$

convergent normalement pour tout $k \geq 0$. (Ici on écrit abusivement $\theta^{(k)}$ pour la dérivée k^e d'une fonction de d variables, il faudrait en fait considérer les dérivées partielles une à une.)

Pour cela on rappelle que θ_j est de la forme $\theta_j(x) = \theta((x - x_j)/r_j)$, où θ est une fonction plateau C^∞ valant 1 sur $B(0, 1)$ et 0 hors de $B(0, 2)$. On en déduit que

$$\left\| \theta_j^{(k)} \right\| = \frac{1}{r_j^k} \left\| \theta^{(k)} \right\|.$$

L'ordre de différentiabilité k étant fixé, pour garantir que f est C^k , il suffit donc de s'assurer que la convergence

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon_j r_j^{-k} \|\theta^{(k)}\| < \infty$$

a lieu. Pour cela, on choisit $\varepsilon_j = 2^{-j} e^{-1/r_j}$. Dans ce cas, comme $x^{-k} e^{-1/x}$ tend vers 0 en 0^+ , et comme $r_j \rightarrow 0$ il existe une constante C_k ne dépendant que de k telle que pour tout j , $e^{-1/r_j} r_j^{-k} \leq C_k$, et la convergence normale est assurée par le facteur 2^{-j} . Ainsi $f = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \theta_j$ est une fonction bien définie et de classe C^∞ sur Ω , qui est nulle sur F et strictement positive sur $\Omega \setminus F$ par construction. \square

Remarque 4.11. On pourrait montrer ce théorème sans connaître la forme explicite de θ_j ni employer l'hypothèse $r_j \rightarrow 0$ pour assurer

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \|\theta_j^{(n)}\| < \infty.$$

Pour ce faire, on modifie (ε_j) une infinité de fois par récurrence de manière à ce que pour tout j fixé, ε_j n'est modifié qu'au plus j fois.

5.5 Ensemble de Cantor

Définition 5.1. On appelle *ensemble de Cantor abstrait* (on dit aussi parfois *espace de Cantor*) l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la distance

$$d(x, y) = 2^{-\inf\{i \in \mathbb{N}^* \mid x_i \neq y_i\}}.$$

- Remarque 5.2.**
1. Il est plus pratique de travailler avec des suites d'entiers démarrant à 1 ici, d'où le \mathbb{N}^* .
 2. Comme on l'a déjà vu, on peut modifier la distance en une distance non-équivalente comme $d(x, y) = 1/\inf\{i \in \mathbb{N}^* \mid x_i \neq y_i\}$ et conserver les mêmes propriétés. L'important est que la distance induise la **topologie produit** sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$.

Proposition 5.3. L'ensemble de Cantor est un espace ultramétrique compact. En particulier, il est totalement discontinu.

Démonstration. Le caractère ultramétrique de la distance est clair de par sa définition. La compacité s'obtient par un argument diagonal. \square

Définition/Proposition 5.4. Étant donné un intervalle $I = [a, b]$, considérons l'application

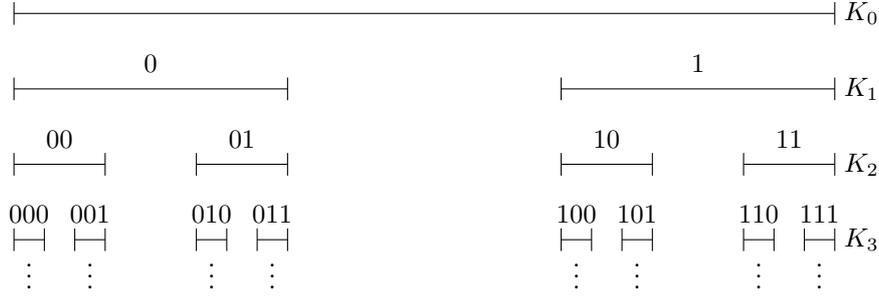
$$T : \underbrace{[a, b]}_{I_\alpha} \mapsto \underbrace{\left[a, a + \frac{b-a}{3} \right]}_{I_{\alpha 0}} \cup \underbrace{\left[a + \frac{2b-a}{3}, b \right]}_{I_{\alpha 1}}.$$

Définissons alors une chaîne décroissante de compacts par récurrence, initialisée par $K_0 = [0, 1] = I_0$. Étant donné $K_n = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^n} I_\alpha$, on pose

$$K_{n+1} = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^n} T(I_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^n} (I_{\alpha 0} \cup I_{\alpha 1}) = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^{n+1}} I_\alpha.$$

L'intersection $\mathcal{C} = \bigcap_{\mathbb{N}} K_n$ est un compact de $[0, 1]$ appelé **ensemble triadique de Cantor**.

FIGURE 5.1 – Cantor triadique



Proposition 5.5. *L'ensemble triadique de Cantor est un compact d'intérieur vide, totalement discontinu, et de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Remarquer qu'une intersection décroissante de compacts n'est jamais vide, donc \mathcal{C} est un compact non-vide. Pour chaque n , K_n est la réunion d'un ensemble de 2^n intervalles disjoints de longueur $1/3^n$, donc $\text{Leb}(K_n) = (2/3)^n$, et par intersection on obtient $\text{Leb}(\mathcal{C}) = 0$. Ainsi \mathcal{C} ne contient aucun intervalle, il est donc totalement discontinu et d'intérieur vide. \square

Théorème 5.6. *Les ensembles de Cantor abstrait et triadique sont homéomorphes via l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}. \end{aligned}$$

Une conséquence de ce théorème est que \mathcal{C} est exactement l'ensemble des nombres réels dans $[0, 1]$ dont le développement triadique ne contient pas le chiffre 1. Attention dans cette assertion on autorise un développement impropre : le réel $0,02222\dots = 0,1 = 1/3$ est bien un point de \mathcal{C} (développements en base 3 ici).

Démonstration. Vérifions d'abord que φ est un homéomorphisme. Soient $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ tels que $d(x, y) = 2^{-n} \neq 0$; supposons sans perte de généralité que $x_n = 0$ et $y_n = 1$. Alors

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2(y_i - x_i)}{3^i}.$$

En outre,

$$\left| 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{y_i - x_i}{3^i} \right| \leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^n}.$$

On en déduit donc que

$$\frac{1}{3^n} = d(x, y)^{\log_2 3} \leq |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \frac{3}{3^n} = 3d(x, y)^{\log_2 3}.$$

Ceci implique que φ est continue, injective, et que φ et son inverse sont h"olderiennes. En particulier φ est un homéomorphisme sur son image.

Pour montrer que l'image de φ est \mathcal{C} , montrons que pour tout $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, on a

$$\varphi(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_{x_{\leq n}},$$

où $x_{\leq n}$ désigne la troncature de x à $\{0, 1\}^n$. En effet, l'intervalle $I_{x_{\leq n}}$ est précisément le lieu des points $y \in [0, 1]$ où le développement triadique (propre ou impropre) de y démarre par $x_{\leq n}$. Il s'ensuit que

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}$ appartient à $I_{x \leq n}$ pour tout n . Finalement, comme la longueur de $I_{x \leq n}$ est 3^{-n} , l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_{x \leq n}$ est réduite à un point, et on conclut.

Ensuite, par construction, tout élément y de \mathcal{C} vérifie que

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_{\alpha_n},$$

où la famille (α_n) est compatible au sens où $\alpha_n|_{\leq k} = \alpha_k$ pour tout $k \leq n$. Autrement dit, les α_n induisent un élément $\alpha = (\alpha_{i,i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ pour lequel $\varphi(\alpha) = y$. \square

Corollaire 5.7. *L'ensemble de Cantor triadique est indénombrable, plus précisément il a le même cardinal que \mathbb{R} (la puissance du continu).*

Démonstration. Par définition l'ensemble de Cantor s'injecte dans $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, et réciproquement on a une surjection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$ donnée par le développement binaire. Ainsi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ est en bijection avec $[0, 1]$, donc avec \mathbb{R} et on conclut. \square

Remarque 5.8. Le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor est un ouvert, donc une réunion disjointe d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts (ce sont les "trous" de la Figure 5.1). Comme il est d'intérieur vide, on a $\mathcal{C} = \partial\mathcal{C}$. Mais comme le complémentaire de \mathcal{C} n'a qu'un nombre dénombrable de composantes connexes, on voit que la plupart des points de \mathcal{C} sont "enfouis", c'est à dire qu'ils ne se situent pas au bord d'une composante du complémentaire ! Plus précisément, on dit qu'un point de $x \in \mathcal{C}$ est **accessible** depuis $\mathbb{R} - \mathcal{C}$, s'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\gamma([0, 1]) \subset \mathbb{R} - \mathcal{C}$ et $\gamma(1) = x$, et l'énoncé est que seul un ensemble dénombrable de points de \mathcal{C} sont accessibles.

Remarque 5.9. Comme l'ensemble de Cantor abstrait et l'ensemble de Cantor triadique sont homéomorphes, pour les questions topologiques on peut utiliser à notre guise l'un ou l'autre, désigné simplement comme "ensemble de Cantor".

On pourrait arguer qu'une différence entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ et \mathcal{C} est que l'un est inclus dans \mathbb{R} , donc admet une structure d'ordre naturel. Mais en fait l'homéomorphisme φ du Théorème 5.6 est strictement croissant pour l'ordre lexicographique (exercice !), donc la structure ordonnée est également présente dans le Cantor abstrait.

Définition 5.10. *On dit qu'un espace X est parfait s'il ne possède aucun point isolé, autrement dit pour tout $x \in X$ et toute boule B centrée en x , il existe $y \in B \setminus \{x\}$. Topologiquement, ceci signifie qu'un singleton n'est jamais ouvert.*

Corollaire 5.11. *L'ensemble de Cantor triadique est parfait.*

Démonstration. En effet c'est clairement le cas pour l'ensemble de Cantor abstrait. \square

Théorème 5.12. *Il existe une surjection continue et croissante de l'ensemble de Cantor sur $[0, 1]$.*

Démonstration. L'application $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$$

convient. \square

Remarque 5.13. Au niveau de l'ensemble de Cantor triadique, l'application précédente envoie le réel dont le développement triadique est $0,020022200\dots$ sur le nombre dont le développement binaire est $0,010011100\dots$. On peut étendre cette application de manière affine en chacun des intervalles du complémentaire de \mathcal{C} dans $[0, 1]$, et on montre facilement que l'extension y est constante (exercice!). Cette fonction est parfois nommée l'escalier du diable. Elle a la propriété qu'elle est dérivable que sur \mathcal{C}^c , donc elle est dérivable presque partout et sa dérivée est presque partout nulle. Ainsi on a

$$0 = \int_0^1 f'(x)dx \neq f(1) - f(0) = 1.$$

Théorème 5.14. Si K est un espace métrique compact, il existe une surjection continue de l'ensemble de Cantor sur X . En particulier, le cardinal de K est au plus celui du continu.

Démonstration. On fixe un recouvrement fini par des boules fermées de rayon 2^{-1} ,

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{n_1}.$$

Quitte à répéter artificiellement K_{n_1} , on peut supposer que $n_1 = 2^{q_1}$ est une puissance de 2. Les K_{j_1} pour $1 \leq j_1 \leq n_1$ étant eux-mêmes compacts et métriques, on peut chacun les recouvrir par 2^{q_2} boules fermées K_{j_1, j_2} de rayon 2^{-2} . Répéter ce procédé donne, à n fixé, un recouvrement de K par des boules fermées de rayon 2^{-n} de la forme

$$K = \bigcup_{j \in \prod_{i=1}^n \{0,1\}^{q_i}} K_{j_1, \dots, j_n}$$

D'autre part, on peut découper tout $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ en

$$x = \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_{q_1}}_{y_1}, \underbrace{x_{q_1+1}, x_{q_1+2}, \dots, x_{q_1+q_2}}_{y_2}, \dots$$

puis définir ϕ une application $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow K$ par $\phi(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{y|_{\leq k}}$. Alors $\phi(x)$ est une intersection (essentiellement) décroissante de compacts non-vides dont le diamètre tend vers 0, donc correspond bien à un unique point de K . Cette application est surjective par construction, et continue car l'image de deux suites proches est contenue dans un compact de petit diamètre. \square

Corollaire 5.15. Tout compact convexe C d'un espace vectoriel normé E est une **courbe de Peano**, c'est à dire une image continue de $[0, 1]$.

Démonstration. On considère une surjection continue $\phi : \mathcal{C} \rightarrow C$, et on l'étend de manière affine par morceaux à $\tilde{\phi} : [0, 1] \rightarrow E$. L'image de cette application étendue est contenue dans C car il est convexe, et comme $\tilde{\phi}|_{\mathcal{C}}$ est déjà surjective, $\tilde{\phi}$ est une surjection.

Reste à vérifier que $\tilde{\phi}$ est continue. Pour cela on remarque que comme ϕ est uniformément continue, pour $\varepsilon > 0$, il existe η tel que pour tout intervalle I de longueur inférieure à η , $\phi(I \cap \mathcal{C})$ est contenu dans une boule B de rayon ε . Mais comme cette boule est convexe, et que par construction $\tilde{\phi}(I)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de $\tilde{\phi}(I \cap \mathcal{C}) = \phi(I \cap \mathcal{C})$, on conclut que $\tilde{\phi}(I \cap \mathcal{C}) \subset B$, et la continuité est établie. \square

Définition 5.16. On dit que X est **localement connexe** si tout point x admet une base de voisinages connexes, ou en d'autres termes si pour tout voisinage U de x on trouve un ouvert connexe $x \in V \subset U$.

Remarque 5.17. Attention, il n'y a pas d'implication entre localement connexe et connexe! D'une part, la réunion de deux intervalles disjoints est localement connexe mais pas connexe. D'autre part, le peigne

$$([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \geq 1} (\{1/n\} \times [0, 1])$$

est fermé connexe par arcs mais pas localement connexe. De même le graphe de la fonction $\sin(1/x)$ considéré à l'Exemple 2.20

Voici un complément au théorème précédent :

Théorème 5.18 (Hahn-Mazurkiewicz). *Un espace métrique est l'image continue de $[0, 1]$ si et seulement s'il est compact, connexe, et localement connexe.*

Et une caractérisation topologique des ensembles de Cantor.

Théorème 5.19 (Brouwer). *Si X est compact, parfait et totalement discontinu, alors X est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Démonstration. C'est un peu au delà de notre niveau....mais la preuve n'est pas si difficile. Il faut raffiner celle du Théorème 5.14 pour s'assurer qu'un point de X a une unique adresse dans le codage par $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. □

5.6 Exercices

Exercice 5.1 structure des ouverts de \mathbb{R}

Montrer que tout ouvert de \mathbb{R} est la réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 5.2

Vérifier les assertions de l'Exemple 1.7. Quelles sont les suites tendant vers 0 dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$?

Exercice 5.3

Montrer que dans un espace ultramétrique :

- Tout point d'une boule en est le centre.
- Tout triangle est isocèle.
- Deux boules ouvertes sont soit disjointes, soit incluses l'une dans l'autre.
- Toute boule ouverte est fermée, et réciproquement.

Exercice 5.4

Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe une suite dense ;
- (ii) il existe une base dénombrable de voisinages, c'est à dire une famille dénombrable d'ouverts (pour simplifier) B_n tels que Ω est ouvert si et seulement pour tout $x \in \Omega$, il existe n tel que $x \in B_n \subset \Omega$.

Un espace métrique ayant ces propriétés est dit **séparable**.

Exercice 5.5

Montrer qu'une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.

Exercice 5.6

Montrer que dans un espace vectoriel normé E les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est complet.
2. Toute série absolument (ou normalement) convergente, i.e. telle que $\sum_n \|u_n\| < \infty$ converge.

Exercice 5.7

Soit $F \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini. Quelle est la topologie induite par la topologie usuelle de \mathbb{R} sur F ? Même exercice si F est un sous-ensemble discret, une suite convergente.

Exercice 5.8

Montrer que si dans la définition du cube de Hilbert on remplace 2^n par 3^n (ou par $n^2 \dots$) on obtient une distance qui n'est pas équivalente à la précédente mais néanmoins induit la même topologie.

Exercice 5.9

Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$, avec $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_d$, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$
- (ii) Si $X = F_1 \sqcup F_2$, avec F_1, F_2 fermés dans la topologie \mathcal{T}_d , alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$
- (iii) Si $A \subset X$ ouvert et fermé, alors $A \in \{\emptyset, X\}$
- (iv) $\forall f \in \mathcal{C}(X, \{0, 1\})$, f constante.

Exercice 5.10

Montrer que \mathbb{Q} n'est pas connexe.

Exercice 5.11

Soit X, Y deux espaces métriques, où l'on suppose Y complet. Soit $A \subset X$ une partie dense. Montrer que toute application $A \rightarrow Y$ uniformément continue admet une unique extension continue sur X .

Exercice 5.12

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert (resp. fermé), montrer que Ω convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \Omega$ on a $\frac{x+y}{2} \in \Omega$.

Exercice 5.13

1. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue du cercle dans la droite.
2. Montrer que \mathbb{R} n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^2

Exercice 5.14

Soient A, B deux parties de X , où B connexe, tels que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap A^c \neq \emptyset$. Montrer $B \cap \partial A \neq \emptyset$ ("lemme du passage des douanes")

Exercice 5.15

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe.
2. Montrer que pour tout $1 \leq r \leq n-1$ l'ensemble des matrices de rang r de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Exercice 5.16

Montrer qu'un espace métrique connexe et non réduit à un point n'est pas dénombrable.

Exercice 5.17

1. Soit X un espace métrique connexe. Fixons $x \in X$ ainsi que $\varepsilon > 0$. Montrer que l'ensemble

$$A_\varepsilon = \{y \in X \mid \text{il existe une } \varepsilon\text{-chaîne reliant } x \text{ et } y\}$$

est ouvert et fermé, et en déduire que X est connexe par chaînes.

2. Soit X un espace métrique compact et $F_1, F_2 \subset X$ deux fermés disjoints de X , Montrer que $\inf_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} (d(x, y)) > 0$ En déduire une deuxième démonstration du fait qu'un espace métrique compact connexe par chaînes est connexe.

Exercice 5.18

Utiliser la connexité par chaînes pour démontrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes est connexe.

Exercice 5.19

Montrer que dans un espace métrique compact, une suite admettant une unique valeur d'adhérence converge.

Exercice 5.20

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. On suppose de plus que (u_n) est bornée et que (u_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. Montrer que (u_n) converge. Ce résultat est-il vrai dans le cas général ?
3. Ce résultat reste-t-il vrai si (u_n) n'est pas récurrente ?
4. Pour une suite de \mathbb{R}^d , montrer que si (u_n) est bornée et $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.
5. Imaginer un exemple montrant que le résultat de la deuxième question ne subsiste pas dans \mathbb{R}^d (difficile !)

Exercice 5.21

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n - u_n^2 \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 5.22

Montrer que dans tout espace métrique compact, il existe une suite dense.

Exercice 5.23

Montrer que si $A \subset X$, la fonction $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 5.24

Montrer que $K \subset \mathbb{R}^d$ compact est totalement discontinu si et seulement si $\forall x \in K$ il existe une suite d'ouverts U_n tels que $\bigcap U_n = \{x\}$ et $\partial U_n \cap K = \emptyset$

Exercice 5.25

Montrer que si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d tel que

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$$

Avec

1. pour tout j $B(x_j, 2r_j) \subset \Omega$
2. pour tout x , il existe un voisinage $V(x)$ qui intersecte un nombre fini de cet ensemble de boules (recouvrement localement fini)

Alors $r_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

5.7 Solutions

Solution de l'exercice 5.1

Penser à la décomposition en composantes connexes.

Solution de l'exercice 5.4

[[$(i) \Rightarrow (ii)$]] Soit (x_n) une suite dense. Posons $\{B(x_n, r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^*\}$. Soit $U \subset X$ ouvert. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in U$ par densité, donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x_N, r) \subset U$. On prend $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < r' < r$.

[[$(ii) \Rightarrow (i)$]] Soit (V_n) une base dénombrable de voisinages. Par définition, pour tout U ouvert, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $V_N \subset U$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in V_n$ et (x_n) est dense par définition.

Solution de l'exercice 5.6

Pour l'implication $(2) \Rightarrow (1)$, il suffit de répéter la preuve vue dans \mathbb{R} .

Pour l'implication réciproque, considérer une suite de Cauchy (u_n) et remarquer que pour une sous-suite u_{n_k} bien choisie on a $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. D'après (2) la série $\sum_k u_{n_{k+1}} - u_{n_k}$ converge, et donc la suite (u_{n_k}) converge. Mais une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge, et on conclut.

Solution de l'exercice 5.9

Commençons par l'équivalence $(iii) \Leftrightarrow (iv)$

- \Rightarrow : Soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ continue. $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts et fermés dans $\{0, 1\}$, donc $f^{-1}(\{0\})$ aussi. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est soit X (et on a fini, f constante égale à 0), soit \emptyset (et on a fini, f constante égale à 1) :
- \Leftarrow Soit $A \subset X$ ouverte et fermée, considérons $\mathbb{1}_A$. On a

$$\begin{cases} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \text{ ouvert par définition} \\ f^{-1}(\{0, 1\}) = X \text{ ouvert par définition} \\ f^{-1}(\{0\}) = X \setminus A \text{ ouvert par hypothèse} \\ f^{-1}(\{1\}) = A \text{ ouvert par hypothèse} \end{cases}$$

Donc f est continue, donc constante, i.e. $A \in \{\emptyset, X\}$

Montrons $(iii) \Leftrightarrow (i)$

- \Leftarrow : $X = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts. Alors $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1^c$ est ouvert et fermé, donc $\mathcal{O}_2 = X$ (auquel cas $\mathcal{O}_1 = \emptyset$), ou $\mathcal{O}_2 = \emptyset$
- \Rightarrow : Soit $A \subset X$ ouvert et fermé. Alors $X = A \sqcup A^c$ avec A^c ouvert car A fermé. Donc $A = \emptyset$ ou $A^c = \emptyset$ (i.e. $A = X$)

La preuve (iii) \Leftrightarrow (ii) est strictement la même en interchangeant les mots "ouvert" et "fermé" :

- \Leftarrow : $X = F_1 \sqcup F_2$ avec F_1, F_2 fermés. Alors $F_2 = F_1^c$ est fermé et ouvert, donc $F_2 = X$ (auquel cas $F_1 = \emptyset$), ou $F_2 = \emptyset$
- \Rightarrow : Soit $A \subset X$ fermé et ouvert. Alors $X = A \sqcup A^c$ avec A^c fermé car A ouvert. Donc $A = \emptyset$ ou $A^c = \emptyset$ (i.e. $A = X$)

D'où (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)

Solution de l'exercice 5.10

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty; \sqrt{2}[) \cup (\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}; +\infty[)$$

Solution de l'exercice 5.11

Soit $x \in X \setminus A$. Posons $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$. Alors (x_n) de Cauchy car convergente, or f uniformément continue (donc Cauchy-continue, donc conserve les suites de Cauchy), donc $(f(x_n))$ de Cauchy. Or Y complet, donc $(f(x_n))$ convergente.

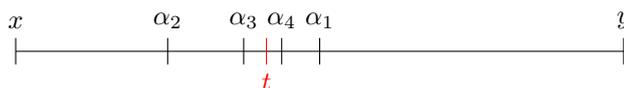
Sa limite ne dépend que de x : Soient $(a_n), (b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ toutes deux convergentes vers x , alors $(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots)$ est de Cauchy et convergente vers x , donc son image par f converge, d'où l'unicité de la limite.

On pose donc $\hat{f} : X \rightarrow A$ telle que $\hat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$. En particulier \hat{f} prolonge f (avec des suites constantes), et est continue (car continue séquentiellement).

Elle est unique car deux fonctions continues qui coïncident sur un sous-ensemble dense coïncident.

Solution de l'exercice 5.12

- Si Ω fermé : Soit $x \neq y \in \Omega$, considérons l'homéomorphisme $\varphi : [0, 1] \rightarrow [x, y]$, $t \mapsto tx + (1-t)y$. Soit $z \in [x, y]$, $t := \varphi^{-1}(z)$. Si t a une écriture dyadique finie, alors z est le résultat d'un nombre fini de milieux sur le segment $[x, y]$. Sinon, on pose $\alpha_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ l'écriture dyadique de t tronquée à l'ordre n . Alors α_n tend vers t et $f(\alpha_n)$ vers z . Or Ω fermé, donc $z \in \Omega$.

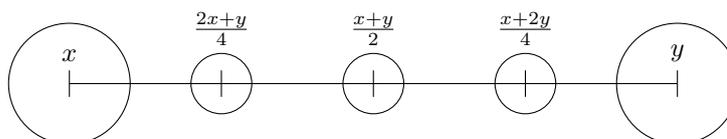


On a donc montré $[x, y] \subset \Omega$

- Si Ω ouvert : alors il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \Omega$ et $B(y, r) \subset \Omega$ (on prend le minimum de deux rayons possibles pour en avoir un unique qui fonctionne pour x et y). Alors $B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{r}{2}\right) \subset \Omega$. De même,

$$B\left(\frac{2x+y}{4}, \frac{r}{2}\right) \subset \Omega \text{ et } B\left(\frac{x+2y}{4}, \frac{r}{2}\right) \subset \Omega.$$

L'idée est donc de recouvrir $[x, y]$ par des boules de rayon fixe $\frac{r}{2}$



Tout élément de $[0, 1]$ dont l'écriture dyadique est finie est donc le centre d'une boule de rayon r , a fortiori $\frac{1}{2^n}$ pour n minimal tel que $\frac{1}{2^n} \leq \frac{r}{2}$. On peut donc voir que l'ensemble fini de centres $I := \{x \mid \text{l'écriture dyadique de } x \text{ est de taille au plus } n+1\}$ permet le recouvrement de

$[0, 1]$ par un nombre fini de boules ouvertes. En transposant ce raisonnement dans $[x, y]$ avec l'homéomorphisme φ défini précédemment, on a donc que $[x, y] \subset \Omega$
Raisonnement probablement trop peu formel ?

Solution de l'exercice 5.13

- Supposons qu'il existe $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{S}^1$. Remarquons que $\mathbb{S}^1 \setminus \{(x, y)\}$ est connexe par arcs, mais pas $\mathbb{R} \setminus \{f((x, y))\}$. Alors $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \setminus \{(x, y)\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{f((x, y))\}$ est une injection continue d'un connexe par arcs (donc connexe) dans un espace non connexe. Contradiction, donc il n'existe pas d'injection continue sur cercle dans la droite.
- Supposons l'existence de φ homéomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . Alors φ conserve la connexité par arcs car φ continue et φ conserve les ouverts. Or $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe mais $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}$ l'est. Or $\varphi(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \varphi(\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\})$. Prouvons que $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}$ est CPA : Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$
 - Le segment $[x, y]$ ne passe pas par $\varphi(0)$, c'est bon
 - On prend $z \notin [x, y]$ et on concatène $[x, z]$ et $[z, y]$ dans \mathbb{R}^2 .

Solution de l'exercice 5.14

Par l'absurde, supposons $B \cap \partial A = \emptyset$. On remarque $B \subset \overset{\circ}{A} \sqcup \overline{A}^c$, et on construit $f : \overset{\circ}{A} \sqcup \overline{A}^c \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $f(\overset{\circ}{A}) = 1$ et $f(\overline{A}^c) = 0$. Vérifions que f est continue : Soit $x \in \overset{\circ}{A} \sqcup \overline{A}^c$, alors

- Si $x \in \overset{\circ}{A}$, $\exists r > 0$, $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$ et $\forall y \in B(x, r)$, $f(y) = f(x) = 1$
- Si $x \in \overline{A}^c$, $\exists r > 0$, $B(x, r) \subset \overline{A}^c$ et $\forall y \in B(x, r)$, $f(y) = f(x) = 0$

On peut donc remarquer que $f|_B$ est continue, non constante (car $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap A^c \neq \emptyset$) ce qui contredit la connexité de B . Donc $B \cap \partial A \neq \emptyset$

Solution de l'exercice 5.15

- Cela découle du fait que $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections, qui lui-même est fondamentalement une conséquence du pivot de Gauss.
- Penser au fait qu'une matrice est de rang r si et seulement si elle s'écrit sous la forme PJ_rQ , où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 5.17

- Soit $y \in A_\varepsilon$, $B := B(y, \varepsilon)$ et $(a_i)_{i \in [1, n]}$: $x_0 \sim y$, ε -chaîne Si $z \in B$, $(b_i)_{i \in [1, n+1]} = (a_i)_{i \in [1, n]} + z$ est une ε -chaîne donc A_ε est ouvert.
— Soit $y \in A_\varepsilon$, $y_n \in A_\varepsilon^{\mathbb{N}} \rightarrow y$. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(y, y_n) < \varepsilon$. $(a_i)_{i \in [1, n]}$: $x_0 \sim y_n$, $(b_i)_{i \in [1, n+1]} = (a_i)_{i \in [1, n]} + y$ est une ε -chaîne, $x_0 \sim y$.

Puisque $x_0 \in A_\varepsilon$, $A_\varepsilon = X$

- Supposons $X = F_1 \sqcup F_2$. F_1, F_2 fermés non vides, soit $\varepsilon < \delta$, il n'y a pas d' ε -chaîne reliant $x \in F_1$ et $y \in F_2$, donc X n'est pas connexe par chaînes.

Solution de l'exercice 5.20

- Formaliser l'idée que (u_n) fait des sauts de puce.
- Si l'intervalle I des valeurs d'adhérence est non-trivial, alors $f|_I = \text{id}$ et du coup la suite ne peut pas transiter le long de I .
- non : $u_n = \sin \sqrt{n}$ par exemple.
- Penser à la connexité par chaînes.

5. On peut construire une suite récurrente dans le disque unité qui se rapproche doucement du cercle tout en tournant, et dont la rotation est suffisante pour empêcher la convergence. Exemple : f est définie en coordonnées polaires par $(r, \theta) \mapsto (r + (1 - r)^2, \theta + (1 - r))$ et on part de $u_0 = (1/2, 0)$. Alors en notant $u_n = (r_n, \theta_n)$, la suite r_n croît vers 1 et on montre que $1 - r_n \sim 1/n$. Alors $\theta_{n+1} \approx \theta_n + 1/n$ et ça va marcher. Vérifier les détails ! (et attention le raisonnement sur θ_n n'est pas assez rigoureux)

Solution de l'exercice 5.21

Si α est une valeur d'adhérence de la suite, alors $\alpha + \alpha^2$ en est une autre. Étudier la suite définie par $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_n^2$ pour en déduire que (u_n) ne peut avoir qu'une valeur d'adhérence.

Solution de l'exercice 5.23

On rappelle que dans le cas métrique, une application $f : E \rightarrow F$ avec E, F métriques, est dite k -lipschitzienne si

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq kd_E(x, y)$$

On veut donc

$$\forall x, y \in E, |f(x) - f(y)| \leq d_E(x, y)$$

On a $\forall z \in A, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ donc

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) \leq \inf_{z \in A} (d(x, y) + d(y, z)) = d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d(y, A)$$

De la même façon $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$ donc $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

Solution de l'exercice 5.25

Reprenons les notations de l'énoncé

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$$

Avec

1. $\forall j, B(x_j, 2r_j) \subset \Omega$
2. $\forall x, \exists V(x), V(x)$ intersecte un nombre fini des boules (recouvrement localement fini)

Par l'absurde, supposons $r_i \not\rightarrow_{i \rightarrow \infty} 0$. Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, r_n \geq \varepsilon$. Fixons un tel ε , et prenons une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, r_{\varphi(n)} \geq \varepsilon$

Ω étant ouvert et borné, a fortiori $\bar{\Omega}$ reste borné, donc fermé borné, donc compact. En effet, $\exists x \in \Omega, R > 0, \Omega \subset B(x, R)$, donc $\bar{\Omega} \subset \bar{B}(x, R)$. Donc $\bar{\Omega}$ est borné et $x_{\varphi(n)}$ admet une sous-suite convergente $x_{\varphi \circ \psi(n)}$ dans $\bar{\Omega}$. Notons $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi \circ \psi(n)}$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x, x_{\varphi \circ \psi(n)}) < \varepsilon$ (par définition de la convergence). Il y a deux cas :

- $x \in \Omega$, auquel cas $\forall n \geq N, x \in B(x_{\varphi \circ \psi(n)}, \varepsilon) \subset B(x_{\varphi \circ \psi(n)}, r_{\varphi \circ \psi(n)})$ d'où $\forall V(x), \forall n \geq N, V(x) \cap B(x_{\varphi \circ \psi(n)}, r_{\varphi \circ \psi(n)}) \neq \emptyset$. Contradiction car le recouvrement est localement fini.
- $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$. D'après l'hypothèse 2, $\forall n \in \mathbb{N}, B(x_{\varphi \circ \psi(n)}, \varepsilon) \subset B(x_{\varphi \circ \psi(n)}, 2r_{\varphi \circ \psi(n)}) \subset \Omega$. Or $x \notin \Omega$ donc nécessairement $d(x, x_{\varphi \circ \psi(n)}) \geq 2\varepsilon$ sinon $x \in B(x_{\varphi \circ \psi(n)}, 2\varepsilon) \subset \Omega$. Contradiction avec $d(x_{\varphi \circ \psi(n)}, x) < \varepsilon$

Donc $r_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$

Bibliographie

- [1] Peter Borwein and Tamás Erdélyi. **Polynomials and polynomial inequalities**, volume 161 of **Graduate Texts in Mathematics**. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [2] Lauwerens Kuipers and Harald Niederreiter. **Uniform Distribution of Sequences**. John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [3] Mickaël Launay. **Le Théorème du parapluie**. Flammarion, 2019.
- [4] Walter Rudin. **Analyse réelle et complexe - 3e éd. - Cours et exercices**. Dunod, 2020.