

ORSAY

N° d'ordre : 7071

UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

LE GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

par

Romain DUJARDIN

Sujet : **Dynamique d'applications non polynomiales et courants laminaires.**

Soutenue le **9 décembre 2002**, devant la Commission d'examen:

M. Dominique CERVEAU	Examineur
M. Julien DUVAL	Rapporteur
M. Hakan ELIASSON	Examineur
M. John Erik FORNÆSS	Rapporteur
M. François LABOURIE	Président
M. Nessim SIBONY	Directeur de thèse

Avant propos

J'ai longtemps été sceptique sur les cascades de remerciements accompagnant en général ce genre d'introduction. L'échéance approchant, il a fallu me rendre à l'évidence : j'avais moi aussi envie de me prêter à ce jeu un peu narcissique consistant à déterminer "ceux qui ont compté pour moi". Voici le fruit de cette rétro/introspection.

Nessim Sibony a consacré un temps incalculable à l'écoute de mes élucubrations hebdomadaires. Il a su me laisser une totale liberté de recherches tout en me faisant profiter de sa grande expérience et de sa clarté de vues lors des passages plus délicats. Il m'a également poussé à participer pleinement à la vie de notre petit groupe de travail, qui m'a beaucoup appris. Pour tout cela je lui dois énormément.

Les professeurs Julien Duval et John Erik Fornæss ont l'un et l'autre manifesté leur intérêt pour mes travaux et m'ont fait l'honneur d'accepter la lourde tâche de rapporter le manuscrit. Je leur en suis particulièrement reconnaissant.

Je remercie également vivement les professeurs Dominique Cerveau, Hakan Eliasson et François Labourie pour leur présence dans le jury.

Charles Favre a joué à merveille son rôle de "grand frère", m'encourageant continuellement, et passant –lui aussi– un temps considérable à écouter mes travaux. J'ai aussi largement bénéficié des conseils –toujours avisés– de Vincent Guedj, et de la puissance cognitive impressionnante de Tien-Cuong Dinh. Je n'oublierai pas que depuis l'époque de nos réunions hebdomadaires à l'ENS, tous trois m'ont toujours traité en égal.

Enfin, puisque je n'aurai pas si souvent l'occasion de l'exprimer de la sorte, j'en profite pour saluer et remercier ici ma famille ainsi que mes amis (en ordre dispersé) mathématiciens, musiciens, journalistes, sociologues, vigneron, philosophes, chimistes, marins, professeurs, thésards et penseurs de tout poil, pour l'atmosphère dont ils m'entourent, et bien sûr Charlotte, pour tout le reste.

Table des matières

Introduction	1
Présentation des résultats	7
1 Applications d'allure Hénon dans \mathbb{C}^2	17
1.1 The graph transform for currents	20
1.2 Hénon-like mappings and other examples	26
1.3 Topological entropy	36
1.4 Mixing	39
1.5 Entropy and product structure of μ	47
1.6 Some transcendental examples	54
2 Courants laminaires	57
2.1 Courants uniformément laminaires.	58
2.2 Courants uniformément laminaires à plis.	63
2.3 Courants laminaires.	69
3 Construction de courants laminaires dans \mathbb{P}^2	77
3.1 Introduction	78
3.2 Laminar currents as limits of divisors in \mathbb{P}^2	79
3.3 Applications to holomorphic dynamics in \mathbb{P}^2	86
3.4 Birational invariance and applications.	92
4 Intersection géométrique	95
4.1 Compléments de théorie du pluripotentiel.	96
4.2 Définition et exemples.	101
4.3 Courants uniformément laminaires.	104
4.4 Courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2	108
4.5 Un cas particulier.	113
5 Structure des courants approximables	117
5.1 Courants horizontaux fortement approximables.	118
5.2 Fonction de défaut et prolongement analytique.	123
5.3 Construction de laminations : la méthode de Su.	136
5.4 Courants fortement approximables : cas général.	142
Bibliographie	145

Introduction

Deux articles intéressants figurent au sommaire du volume 47 (de l'année 1926) de la grande revue suédoise *Acta Mathematica*. Après avoir consacré une dizaine d'années à l'itération des fractions rationnelles, Pierre Fatou et Gaston Julia, les deux maîtres français du domaine, décident en effet d'étendre la théorie de deux manières complémentaires.

Fatou signe un article intitulé "Sur l'itération des fonctions transcendantes entières", dans lequel il pose les bases du sujet, montrant en particulier que dans ce cadre l'ensemble de Julia (dans la terminologie actuelle !) est parfait et qu'il y a une infinité de cycles périodiques. Il étudie en détail la dynamique de $z + 1 + e^{-z}$, ainsi que celle de $a + h \sin z$ ($0 < h < 1$, $a \in \mathbb{R}$), et conjecture que l'ensemble de Julia de e^z est la totalité du plan complexe \mathbb{C} .

L'article de Julia, intitulé "Sur les familles de fonctions holomorphes de plusieurs variables", ne porte pas à proprement parler sur l'itération, mais en est une extension. L'auteur étudie l'ensemble des points où une famille de fonctions holomorphes $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ cesse d'être normale, où D désigne un domaine de \mathbb{C}^2 (si $D \subset \mathbb{C}$ on voit l'analogie avec l'ensemble de Julia). Il montre qu'un tel ensemble est parfait et que la distance à cet ensemble vérifie le principe du maximum. Il établit également que ces ensembles sont exactement les points d'accumulation des suites de sous ensembles analytiques de D .

L'objet de ce mémoire est de contribuer aux deux directions ouvertes par Fatou et Julia. Premièrement, nous étudions la dynamique de certaines applications, non nécessairement rationnelles, définies dans des domaines de \mathbb{C}^2 . Plus précisément, nous nous intéressons à une classe de difféomorphismes définis au voisinage d'un bidisque dans \mathbb{C}^2 , et qui sont aux applications de Hénon complexes ce que les applications d'allure polynomiale sont aux polynômes dans \mathbb{C} , et établissons pour ces applications un certain nombre de propriétés dynamiques analogues à celles des applications de Hénon complexes.

Par ailleurs nous analysons en détail la structure de la limite, au sens des courants, de certaines suites de sous ensembles analytiques apparaissant naturellement dans ce cadre. Nous développons en effet une étude systématique des courants laminaires, à travers divers aspects : construction de tels courants, intersection, propriétés de prolongement analytique, etc.

Afin de comprendre nos motivations, il n'est pas inutile, sans remonter jusqu'à Fatou et Julia, d'avoir un aperçu¹ de la théorie des systèmes dynamiques depuis le début des années 1960. Que le lecteur ne s'y méprenne pas, il ne s'agit en aucune façon pour nous de se "placer" dans cette histoire, mais uniquement d'en opérer une lecture brève et sélective, afin de dégager les racines des objets que nous considérerons par la suite. Nous mettrons en lumière les étapes

¹Pour ne pas alourdir indûment la bibliographie générale, nous avons indiqué en note de bas de page les références n'apparaissant que dans cette introduction.

essentiels du cheminement qui a mené à l'étude des systèmes dynamiques holomorphes de plusieurs variables complexes, ainsi qu'à l'introduction des courants laminaires. Nous ne nous attarderons pas sur les définitions dynamiques, pour lesquelles nous renvoyons le lecteur aux monographies de Robinson [Ro] ou de Katok-Hasselblatt [KH]. Nous présenterons ensuite le sujet de cette thèse, ainsi que les résultats que nous avons obtenus.

◇

La découverte par S. Smale de l'exemple du "fer à cheval" et de la notion de système dynamique (uniformément) hyperbolique font souffler un vent d'espoir sur la théorie des systèmes dynamiques au début des années 60. Non seulement, le modèle du fer à cheval explique complètement la dynamique au voisinage d'un point homocline, qui pourtant faisait dire à Poincaré au début du siècle² :

"On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne chercherai même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps, et en général de tous les problèmes de Dynamique (...)"

mais de plus le concept d'hyperbolicité, associé à celui de stabilité structurelle (introduit par Anosov) paraît être la clef de l'étude de "la plupart" des systèmes dynamiques. Smale ne tardera pas à se rendre compte lui-même de son optimisme quelques années plus tard³, et c'est S. Newhouse⁴ qui portera le coup fatal à cette idée en montrant que ni l'hyperbolicité, ni la stabilité ne sont génériquement satisfaites. Il reste que les systèmes hyperboliques –notamment à travers leurs nombreuses généralisations– et le modèle du fer à cheval sont devenus un modèle de référence pour le développement ultérieur de la théorie.

Une caractéristique des systèmes dynamiques hyperboliques mise en évidence par Hirsch, Palis, Pugh et Shub⁵ est l'existence de "feuilletages" locaux (nous dirions maintenant laminations) en variétés stables et instables près d'un compact hyperbolique invariant (ces feuilletages sont particulièrement simples dans le cas d'un fer à cheval). Ruelle et Sullivan [RS1] ont remarqué, que si le compact hyperbolique K est localement maximal (c'est à dire s'il existe un voisinage U de K pour lequel $K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$), ces feuilletages sont "incompressibles" i.e. munis d'une mesure transverse invariante, et, fait tout à fait remarquable, c'est dans ce contexte qu'a été introduite la notion de *cycle feuilleté*⁶ c'est à dire un *courant* (au sens de De Rham) localement défini par l'intégration sur les familles mesurées de feuilles. Ruelle et Sullivan définissent également une mesure d'*intersection géométrique* de ces courants, dont ils montrent que c'est la mesure de Bowen, c'est à dire l'unique mesure maximisant l'entropie sur K . Les cycles feuilletés sont devenus ensuite (notamment depuis l'article [Sul]) un outil usuel de l'étude des feuilletages.

²Cité par Smale au Congrès International des Mathématiciens, 1962.

³Abraham et Smale *Non-genericity of Ω -stability* in Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 14

⁴*The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 50(1979).

⁵*Neighborhoods of hyperbolic sets*. Invent. Math. 9 (1970).

⁶Nous reviendrons en détail sur ces définitions au paragraphe suivant.

Une généralisation particulièrement importante de la notion d'hyperbolicité est celle d'*hyperbolicité non-uniforme* (au sens de Osedeleks et Pesin), c'est à dire d'hyperbolicité "presque sûre" relativement à une mesure invariante ergodique. Ceci est formalisé en disant que les exposants de Lyapounov sont non nuls (on pourra consulter [KH] pour plus de détails). De nombreux systèmes dynamiques possèdent cette propriété, le plus célèbre d'entre eux étant sans doute *l'application de Hénon*, de \mathbb{R}^2 dans lui même,

$$(x, y) \longmapsto (1 - ax^2 + by, x).$$

Issue des expérimentations numériques –elles même motivées par des questions physiques– de M. Hénon dans les années 70⁷, cette famille de difféomorphismes polynomiaux du plan a depuis suscité un intérêt considérable, par la naturalité et la simplicité de sa définition, et la complexité de sa dynamique. Il est établi depuis les travaux de Benedicks et Carleson⁸ –repris depuis par de nombreux auteurs– que pour certaines valeurs des paramètres, ces applications présentent des "attracteurs étranges" non uniformément hyperboliques; ces applications ont par ailleurs un caractère "universel" puisqu'elles sont intimement liées au phénomène de *bifurcation homocline*. Ces propriétés dynamiques remarquables furent une motivation sérieuse pour développer une théorie dynamique des automorphismes polynomiaux du *plan complexe*, nous y reviendrons plus loin.

Parallèlement, l'itération des polynômes et des fractions rationnelles en dimension complexe 1, en état de semi léthargie depuis les travaux de Fatou et Julia, connaît au cours des années 80 un regain d'activité important, notamment sous l'impulsion de Douady-Hubbard, Lyubich et Sullivan. Plusieurs points méritent ici notre attention. Le premier est que la dynamique des fractions rationnelles est non uniformément hyperbolique (Lyubich⁹) et présente des similitudes frappantes avec la théorie uniformément hyperbolique : unicité de la mesure maximisant l'entropie, propriété de Bernoulli, etc. Deuxièmement, la théorie du potentiel joue (ou peut être amenée à jouer) un rôle important en dynamique des polynômes dans \mathbb{C} : Brolin¹⁰ –ces travaux sont très antérieurs à ceux de Lyubich– montre que la mesure harmonique μ_P de l'ensemble de Julia J_P du polynôme P (de degré d) a des propriétés dynamiques remarquables : elle est mélangeante et si $z \in \mathbb{C}$ est un point générique,

$$\frac{1}{d^n} \sum_{\{w, P^n(w)=z\}} \delta_w \rightarrow \mu_P.$$

Cette mesure est la mesure d'entropie maximale de Lyubich. Si l'on pose

$$G_P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |P^n(z)|,$$

la "fonction d'échappement" du polynôme P , alors G_P est sous harmonique et c'est la fonction de Green de l'ensemble de Julia J_P , de plus $\mu_P = dd^c G_P$. Sibony¹¹ a remarqué que le lemme de Hartogs pouvait ainsi remplacer le théorème de Montel pour montrer certaines propriétés

⁷A 2 dimensional mapping with a strange attractor. Comm. Math. Phys. 50 (1976).

⁸The dynamics of the Hénon map. Ann. of Math. 133 (1991).

⁹Entropy properties of rational mappings of the Riemann sphere. Ergodic Th. Dyn. Systems 3 (1983).

¹⁰Invariant sets under iteration of rational functions. Ark. Mat. 6 (1965).

¹¹Notes de cours UCLA, non publiées, 1984.

de l'ensemble de Julia. Ces idées sont le point de départ de la théorie de l'itération des applications polynomiales de plusieurs variables.

Un troisième point important est la notion d'*application d'allure polynomiale* (Douady-Hubbard [DH]) : une application est dite d'allure polynomiale si c'est un revêtement ramifié holomorphe $U \rightarrow V$, où U et V sont des disques topologiques du plan tels que $U \subset\subset V$. Autrement dit une telle application présente la même allure topologique qu'un polynôme au voisinage de l'infini. Le fait remarquable est que la dynamique de ces applications n'est pas plus générale que celle des polynômes puisqu'une application d'allure polynomiale est conjuguée à un polynôme de même degré.

Un développement plus récent est l'introduction par Sullivan¹² de *laminations* associées à la dynamique, hors de l'ensemble de Julia, des applications d'allure polynomiale (ou des endomorphismes dilatants du cercle), dans le but de "coder" la dynamique par cet objet géométrique. Plus précisément, on munit d'une structure de lamination l'*extension naturelle* de la dynamique¹³. Lyubich et Minsky [LM2] ont montré qu'on pouvait de façon générale associer un tel objet à la dynamique des fractions rationnelles de \mathbb{P}^1 , et que de plus la construction avait sa place dans le fameux "dictionnaire" proposé par Sullivan, entre dynamique dans \mathbb{P}^1 et groupes Kleinéens. Meiyu Su construit dans [Su] une version "mesurable" de la lamination de Lyubich-Minsky, qui a le mérite de naturellement faire apparaître une mesure transverse et faire ainsi le lien avec la théorie de Ruelle-Sullivan.

C'est Hubbard [Hu] –assisté de Douady et Oberste-Vorth, mentionnés dans l'article– qui a l'idée en 1985 de considérer dans le champ des applications de Hénon, vues cette fois comme des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 , les fonctions d'échappement en temps positif et négatif (pour une application f de degré d)

$$G^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|f^n(z)\| \quad \text{et} \quad G^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|f^{-n}(z)\|,$$

qu'il étudie à des fins topologiques. Ces définitions s'étendent sans difficulté aux compositions d'automorphismes de Hénon, qui représentent, à conjugaison près, tous les automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 de dynamique non triviale. Ces fonctions sont plurisousharmoniques et continues dans \mathbb{C}^2 . Sibony introduit la théorie du pluripotentiel dans le sujet, et considère les courants $T^+ = dd^c G^+$ et $T^- = dd^c G^-$, ainsi que la mesure invariante

$$\mu = (dd^c \max(G^+, G^-))^2 = T^+ \wedge T^-.$$

Bedford et Sibony utilisent alors ces idées pour établir les premières propriétés des ensembles invariants K^+ , K^- et K , qui sont respectivement l'ensemble des points d'orbite bornée en temps positif, négatif et total (ces résultats sont rapportés dans le §3 de [BS1]). Bedford et Smillie [BS1] montrent que les courants T^+ et T^- décrivent respectivement la distribution asymptotique des images réciproques et directes des courbes algébriques, par exemple, si C est une courbe algébrique

$$\frac{1}{d^n} [f^{-n}(C)] \rightarrow (\deg C) T^+.$$

¹²*Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures.* in *Mathematics for the twenty-first century*, AMS centennial publications, Providence RI.

¹³Ceci est exposé par exemple dans le panorama de Ghys [Gh], auquel nous renvoyons le lecteur pour les définitions et résultats de base concernant les laminations par surfaces de Riemann

Ce fait doit être compris comme un analogue du “ Λ -lemma” en dynamique hyperbolique : la suite des images réciproques d’un disque coupant la variété instable d’un point converge vers la variété stable de ce point. La raison pour laquelle une variété algébrique doit “couper” les courants invariants étant ici de nature homologique (dans \mathbb{P}^2), un fait compris par Fornæss-Sibony [FS1], qui établissent que le théorème de convergence précédent vaut pour une classe beaucoup plus vaste de courants, et que les courants T^+ et T^- sont les seuls courants respectivement portés par K^+ et K^- .

L’analogie des courants $T^{+/-}$ avec des variétés stable/instable va en fait plus loin [BS1] : dans le cas des applications de Hénon hyperboliques, ces courants sont exactement ceux de Ruelle et Sullivan. Une conséquence en est que la mesure μ est dans ce cas la mesure de Bowen, en particulier μ mélange, est une mesure de Bernoulli, est l’unique mesure d’entropie maximale, et décrit la répartition des points selles.

La généralisation de ces résultats à l’ensemble de toutes les applications de Hénon complexes (et plus généralement des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2) fait l’objet d’une série d’articles [BS3, BLS, BLS2]. Les auteurs montrent dans [BS3] que la mesure μ mélange et que ses exposants de Lyapounov sont non nuls, autrement dit que le système est non uniformément hyperbolique –un fait qui n’a depuis été démenti à notre connaissance par aucun système holomorphe “non trivial”. Ceci ouvre la voie à l’utilisation de la théorie de Pesin, et dans [BLS] et [BLS2] les auteurs montrent que μ est l’unique mesure d’entropie maximale, est une mesure de Bernoulli, et décrit la répartition des points selles.

Attardons nous un instant sur ces derniers travaux. Les auteurs étudient en détail la structure des courants invariants T^+ et T^- , et généralisent à cet effet les cycles feuilletés de Ruelle et Sullivan. Voici comment comprendre leur définition. La théorie de Pesin dit (grossièrement) que si un système dynamique est non uniformément hyperbolique relativement à une mesure de probabilité invariante μ , alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de mesure $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ sur lequel il y a une décomposition (uniformément) hyperbolique ; en particulier les variétés stables et instables y ont une taille minorée. La définition des *courants laminaires* de [BLS] est adaptée à ce cadre : un courant laminaire T est courant qui est un cycle feuilleté hors d’un ensemble de $\|T\|$ -mesure arbitrairement petite (nous reviendrons longuement sur ces définitions plus tard). Les auteurs montrent que les courants T^+ et T^- sont laminaires en ce sens.

La propriété de laminarité, des courants T^+ et T^- , associée à la dynamique, élucide complètement la structure des courants T^+ et T^- dans les “boîtes de Pesin”, poussant ainsi plus loin l’analogie avec les cycles feuilletés de Ruelle-Sullivan. Ceci permet également de décrire géométriquement la mesure $\mu = T^+ \wedge T^-$ comme *intersection géométrique* de ces courants, ce qui était la motivation (voir [BLS] pp.79-80) pour l’introduction des courants laminaires. Un corollaire de ce résultat est que les points selles sont situés dans le support de μ . Ceci corrobore le principe heuristique selon lequel les systèmes dynamiques holomorphes présentent des similitudes remarquables avec les systèmes dynamiques hyperboliques : les courants laminaires jouant ici le rôle des laminations stable et instable. La laminarité apparaît comme une manifestation *globale* de l’hyperbolicité non uniforme. Il est à noter que les seuls autres exemples de biholomorphismes globaux (en dimension 2) dont la dynamique ait été étudiée sont les automorphismes des surfaces complexes compactes [Ca] et que les courants laminaires apparaissent aussi dans ce cadre.

La dynamique holomorphe à plusieurs variables complexes s'étend maintenant largement au delà de la théorie des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 , et la place manque ici pour en relater tous les récents développements. Un effort important a été effectué pour trouver le bon cadre d'étude pour la dynamique des applications polynomiales : applications rationnelles (méromorphes) de \mathbb{P}^k [Si1] et d'autres variétés, algébriques ou non [DF, Gu1, DiS]. Briend et Duval ont montré que les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k sont non uniformément hyperboliques, i.e. que les exposants de Lyapounov relativement à la mesure, analogue de celle de Lyubich, sont strictement positifs. Fornæss et Sibony ont également étudié la dynamique générique dans certaines classes d'applications transcendantales (de nombreuses références se trouvent dans [Fo]), ainsi que certaines propriétés générales de l'itération des applications holomorphes entières¹⁴. Nous conclurons ce petit aperçu par la mention du travail récent de Dinh-Sibony [DiS] sur la dynamique des applications d'allure polynomiale dans les variétés complexes, qui permet en particulier d'étudier précisément la dynamique de certaines applications holomorphes (non injectives) sans hypothèse d'algébricité.

◇

À la lumière de ce qui vient d'être exposé, la question que nous nous posons est alors la suivante : que dire de la dynamique des automorphismes *non polynomiaux* de plusieurs¹⁵ variables complexes ? Nous n'avons pas d'indication sur la dynamique globale des automorphismes transcendants de \mathbb{C}^2 (outre les travaux déjà mentionnés de Fornæss-Sibony), la singularité essentielle à l'infini induisant des difficultés que nous n'avons pas su résoudre. En revanche, nous montrons que la plus grande partie des propriétés que nous avons mentionnées des applications de Hénon de \mathbb{C}^2 sont indépendantes de leur caractère polynomial. Celles ci sont vraies pour une classe de "fers à cheval non uniformément hyperboliques" holomorphes, qui sont aux applications de Hénon ce que les applications d'allure polynomiale (généralisées) sont aux polynômes dans \mathbb{C} .

Par ailleurs, nous étudions en détail –et hors de leur contexte dynamique– la structure des courants laminaires, qui apparaissent naturellement dans ce cadre, et dont nous pensons qu'ils pourraient être amenés à jouer un rôle dans la compréhension de la dynamique holomorphe non uniformément hyperbolique.

¹⁴Fatou and Julia sets for entire mappings in \mathbb{C}^k . Math. Ann. 311 (1998).

¹⁵Nous ne considérons en fait que le cas de deux variables.

Présentation des résultats obtenus

Applications d’allure Hénon. Nous venons de voir que les méthodes mises au point pour l’étude des automorphismes polynomiaux dépendent de façon cruciale de leur caractère polynomial, et plus précisément des fonctions d’échappement de Broliin-Hubbard. Nous allons voir que les propriétés dynamiques elles-mêmes, établies dans [BS1, BS3, BLS, BLS2], sont vraies dans un cadre plus général, indépendamment du caractère algébrique de la dynamique. Entrons dès à présent plus avant dans les détails.

Soit $\mathbb{B} = \{(z, w), |z|, |w| < 1\}$ le bidisque unité dans \mathbb{C}^2 , et $\partial_v \mathbb{B} = \{(z, w), |z| = 1, |w| < 1\}$ la partie “verticale” de son bord. Un objet (sous variété ou courant) sera dit “horizontal” si son support est inclus dans $\mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ (un objet horizontal s’appuie sur la frontière verticale). Soit f une application holomorphe injective définie au voisinage de $\overline{\mathbb{B}}$; f est une *application d’allure Hénon* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i. $f(\partial_v \mathbb{B}) \cap \overline{\mathbb{B}} = \emptyset$;
- ii. $f(\overline{\mathbb{B}}) \cap \partial \mathbb{B} \subset \partial_v \mathbb{B}$.

Nous nous proposons d’étudier la dynamique de ces applications. Remarquer que les applications de Hénon elles-mêmes vérifient cette définition dans un bidisque suffisamment grand¹⁶, autrement dit, notre étude généralise bien celle des automorphismes polynomiaux. Le deuxième fait à observer est qu’une définition essentiellement équivalente a été proposée par Hubbard et Oberste-Vorth [HO]. Un aspect intéressant de la définition de [HO] est qu’elle fait naturellement intervenir une notion de *degré*. Voici comment il est défini : si L est une droite horizontale quelconque de \mathbb{B} , $f(L) \cap \mathbb{B}$ est une sous variété horizontale de \mathbb{B} et la première projection pr_1 fait donc de $f(L) \cap \mathbb{B}$ un revêtement ramifié de degré d sur le disque unité \mathbb{D} . Le nombre d ne dépend pas de L et sera donc appelé le *degré* de f –bien entendu si f est une application de Hénon les deux notions coïncident si le bidisque est assez grand. Nous allons montrer que d est le “degré dynamique” de f .

L’ingrédient essentiel de notre étude est –comme pour l’étude ergodique de la plupart des systèmes dynamiques holomorphes de plusieurs variables– la construction de *courants invariants* par la dynamique. Même si celle-ci est assez simple pour les applications d’allure Hénon, nous avons délibérément placé la construction dans un cadre aussi général que possible, en vue d’éventuelles applications futures. Soit donc un ouvert relativement compact Ω d’une surface complexe M , et $V \subset \partial \Omega$ l’intérieur d’une variété à bord incluse dans $\partial \Omega$ (de dimension réelle 3). On suppose que le couple (Ω, V) satisfait

- i. $f(V) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$;
- ii. $f(\Omega) \cap \partial \Omega \subset V$.

On note $\mathcal{C}(\Omega, V)$ l’ensemble des courants positifs fermés T de bidegré $(1,1)$ à support dans $\Omega \cup V$ et tels que $\text{Supp } dT \subset V$ (courants positifs fermés de Ω de masse finie, et dont le

¹⁶Cette propriété est à rapprocher de l’existence de la *filtration invariante* de Friedland-Milnor, qui est une propriété de base de la dynamique.

support s'appuie sur V). Le point de départ est la proposition suivante (“la transformée de graphe pour les courants”) :

PROPOSITION *Sous les hypothèses i. et ii. ci-dessus, si $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$, $\mathcal{L}T = \mathbf{1}_\Omega f_* T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$.*

Si l'on veut itérer l'opérateur \mathcal{L} , en vue d'obtenir des courants invariants, il faut le normaliser afin que les suites de courants obtenues soient de masse localement bornée. Un apport important des recherches menées sur le sujet ces dernières années est que si f est une application méromorphe définie sur une variété Kählérienne M , ceci est déterminé par l'action de f sur $H_*(M)$ (où $H^*(M)$ c'est ici équivalent). Plus précisément, la normalisation dépend de la suite des itérés de l'application linéaire $f^* : H^{1,1}(M) \rightarrow H^{1,1}(M)$, dont le rayon spectral est le *degré dynamique* de f .

L'adaptation de ce résultat à notre cadre est la suivante (voir la section 1.1 ; tous les groupes d'homologie considérés ici sont des groupes d'homologie relative à support compact)

THÉORÈME 1. *Si le triplet (f, Ω, V) satisfait les hypothèses ci dessus, l'opérateur \mathcal{L} induit naturellement une action linéaire*

$$\mathcal{L}_* : H_2(\Omega \cup V, V) \longrightarrow H_2(\Omega \cup V, V).$$

Si de plus (Ω, V) satisfait la condition de convexité (C) suivante :

$\forall x \in \Omega$, *il existe une (1,1) forme positive ω_x , $\omega_x > 0$ près de x , $\omega_x = 0$ au voisinage de V ;*

si ρ_n désigne la norme d'opérateur de \mathcal{L}_^n , et $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$, alors la suite de courants $\rho_n^{-1} \mathcal{L}_*^n T$ est de masse localement bornée dans Ω .*

Il suffit en fait de restreindre l'action de \mathcal{L}_* sur le sous espace $H_2^+(\Omega \cup V, V)$ engendré par les classes des courants de $\mathcal{C}(\Omega, V)$. Le *degré dynamique* est ici le rayon spectral de l'opérateur \mathcal{L}_* . Naturellement ce théorème s'applique au cas des applications d'allure Hénon, pour lesquelles le groupe d'homologie correspondant $H_2(\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B})$ est de dimension 1 et le degré dynamique est identique au degré déjà défini. Nous indiquons brièvement à la section 1.2 d'autres classes d'exemples redevables de ce théorème. Le lien entre degré dynamique et entropie est établi (dans le bidisque) à la section 1.3.

Un courant positif fermé horizontal dans \mathbb{B} sera dit *normalisé* s'il est homologue (dans $H_2(\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B})$) à une droite horizontale. Nous noterons dorénavant \mathcal{L} l'opérateur de transformée de graphe normalisé sur les courants horizontaux : $\mathcal{L} = d^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{B}} f_*$; \mathcal{L} préserve l'ensemble des courants normalisés. Par une extraction convenable on en déduit l'existence d'un courant normalisé \mathcal{L} -invariant T^- , et un raisonnement analogue fournit un courant T^+ invariant par l'opérateur adjoint ${}^t \mathcal{L} = d^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{B}} f^*$. Le produit extérieur $\mu = T^+ \wedge T^-$ définit alors une mesure de probabilité invariante.

THÉORÈME 2. *Soit f une application d'allure Hénon de degré d dans \mathbb{B} , et $K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathbb{B})$ le compact totalement invariant maximal.*

Alors l'entropie topologique $h_{\text{top}}(f|_K)$ vaut $\log d$ et la mesure μ définie ci dessus est l'unique mesure d'entropie maximale. De plus μ mélange, est une mesure de Bernoulli, et décrit la répartition des points selles.

La structure de la preuve est similaire à celle de Bedford, Lyubich et Smillie, mais la preuve elle-même doit être remaniée à tous les niveaux. Deux arguments importants sont notamment issus du travail de Dinh-Sibony [DiS]. Le premier est que les courants invariants sont à potentiels continus (théorème 1.2.12). Le point essentiel de la preuve de la propriété de mélange de μ est le théorème de convergence suivant.

THÉORÈME 3. *Si T est un courant horizontal positif fermé normalisé, la suite de courants $\mathcal{L}^n T$ converge vers l'unique courant \mathcal{L} -invariant normalisé T^- .*

La difficulté de la preuve réside dans le fait que nous travaillons directement au niveau des courants, et non des potentiels –il nous a été impossible de mener à bien cette deuxième approche. Nous adaptons les arguments de [DiS], basés sur le Principe du Maximum et le lemme de Hartogs; pour cela nous devons nous ramener à la convergence d'une suite de fonctions sous harmoniques, et ces fonctions sont construites de la façon suivante : si T est un courant positif fermé horizontal, φ une (1,1) forme verticale telle que $dd^c \varphi \geq 0$, et si i_θ est une famille à un paramètre holomorphe d'applications linéaires, alors

$$\theta \longmapsto \langle T, (i_\theta)^* \varphi \rangle$$

est une fonction sous harmonique.

La preuve des propriétés entropiques de μ nécessite également un certain nombre d'adaptations, dues essentiellement à la forme du théorème de convergence précédent, plus précisément au fait qu'il ne donne pas d'information sur la convergence des suites de potentiels. En particulier, nous ne savons pas si comme pour les applications de Hénon, on a $\text{Supp } T^{+/-} = J^{+/-} = \partial K^{+/-}$, qui est un point essentiel de la preuve de [BLS]. Nous utilisons à la place la proposition suivante, qui utilise le résultat de S. Newhouse [N1] liant entropie et taux de croissance (local) des volumes –déjà utilisé à la section 1.3 pour évaluer $h_{top}(f)$ – et dont nous pensons qu'elle pourrait s'avérer utile dans d'autres circonstances.

PROPOSITION *Si ν est une mesure de probabilité ergodique telle que $h_\nu(f) > \frac{\log d}{2}$, alors pour ν -presque tout x , $\mathbf{M}(T^+|_{W_{loc}^u(x)}) > 0$.*

La notation $W_{loc}^u(x)$ désigne ici la variété instable locale de Pesin du point x , dont l'existence est assurée pour ν -presque tout x par l'hypothèse sur l'entropie de ν . Un autre argument utilisé dans la preuve du théorème est la structure (laminaire) des courants invariants dans les "Boîtes de Pesin".

Nous concluons le chapitre par quelques exemples d'automorphismes transcendants de \mathbb{C}^2 , dont la dynamique est d'allure Hénon dans certains domaines, ce qui était la motivation initiale de ce travail.

◇

Courants laminaires. Nous entreprenons dans la deuxième partie de ce mémoire (chapitres 2 à 5) une étude systématique des courants laminaires. Une motivation sérieuse pour l'investigation détaillée de ces courants est la question suivante, qui est un des problèmes ouverts

majeurs de la théorie des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 : le problème est de savoir si $J^* = \text{Supp}(\mu) = J$, autrement dit si

$$\text{Supp}(T^+) \cap \text{Supp}(T^-) = \text{Supp}(T^+ \wedge T^-).$$

Ceci nous interroge sur la “géométrie” des courants T^+ et T^- , et de leur produit extérieur. Même si nous ne contribuons pas à proprement parler à ce problème, nous allons introduire des classes de courants laminaires, incluant ces courants dynamiques, dont nous analyserons la structure, de même que les propriétés de produit extérieur.

Le lecteur ayant déjà été en contact avec cette théorie n’aura pas manqué de remarquer le foisonnement de définitions interdépendantes. Le problème de déterminer la “bonne” définition semble en effet central : cette définition hypothétique doit être suffisamment générale pour autoriser les applications en dynamique non uniforme, et suffisamment riche pour conserver de bonnes propriétés géométriques –la référence en ce domaine étant bien entendu les courants d’intégration. Nous n’avons pas su résister à la tentation de modifier certaines définitions déjà existantes, ainsi que d’en proposer de nouvelles, et nous encourageons le lecteur à conserver à l’esprit la place de chacune d’entre elles dans la hiérarchie des courants laminaires.

Comme nous l’avons mentionné précédemment, les courants laminaires sont apparus dans [BLS] comme une généralisation des cycles feuilletés de Ruelle-Sullivan [RS1] au cadre non uniformément hyperbolique. Rappelons pour commencer quelques définitions basiques (on pourra consulter pour plus de détails le panorama de Ghys [Gh]). Une *lamination par surfaces de Riemann* (nous dirons plus simplement *lamination*) est un espace topologique localement homéomorphe à $\tau \times \mathbb{D}$ où τ est un certain espace topologique, dit “transverse”, et tel que les cartes ainsi définies soient *compatibles*, c’est à dire que les homéomorphismes de transition préservent le deuxième facteur. Nous considérerons essentiellement des laminations plongées, c’est à dire des fermés de l’espace ambiant, laminés pour la topologie induite, et à l’occasion, des laminations abstraites (en particulier à la section 5.3). Les feuilletages (holomorphes) sont des cas particuliers de laminations. On définit les *feuilles* et les *transversales* de manière analogue au cas des feuilletages. On définit également le pseudogroupe *d’holonomie* : rappelons qu’il consiste en une collection d’homéomorphismes locaux entre transversales, qui représentent le “transport le long des feuilles”. Une *mesure transverse invariante* est la donnée d’une mesure sur chaque transversale, cette famille de mesures étant invariante par holonomie. Il est connu depuis [RS1, Sul] qu’à une mesure transverse invariante (positive) on peut naturellement associer un courant fermé (ici positif) de la façon suivante : si U est un ouvert de la lamination, que par abus de notation nous supposerons de la forme $\tau \times \mathbb{D}$, la mesure transverse induit une mesure positive μ_τ sur τ et le courant a la forme suivante dans U :

$$T = \int_{\tau} [\{t\} \times \mathbb{D}] d\mu_\tau(t).$$

Noter que pour pouvoir parler de courants il faut définir des formes différentielles : une forme différentielle sur la lamination est dans une carte une famille de formes différentielles sur les plaques, dépendant continûment du paramètre transverse. Pour que les formes différentielles soient localement intégrables, il faut que la lamination soit localement compacte. Nous retiendrons également le fait que dans le cas de laminations plongées, les cycles feuilletés sont localement des courants de bidimension (1,1) au sens usuel dans l’espace ambiant.

Nous définissons en détail l’objet de notre étude au chapitre 2. Les *courants uniformément laminaires* sont exactement les courants de Ruelle-Sullivan, c’est à dire les cycles feuilletés sur une lamination plongée (dans un ouvert) et munie d’une mesure transverse invariante –nous n’utiliserons plus la terminologie “cycle feuilleté” par la suite. Nous établissons une liste de propriétés de base de ces courants. Nous présentons également les *courants uniformément laminaires à plis* qui sont une généralisation naturelle des précédents, et qui se situent du côté des courants uniformément laminaires dans la gradation souple/rigide évoquée plus haut. Nous renvoyons à l’introduction de la section 2.2 pour plus de renseignements sur nos motivations pour introduire cette classe de courants.

Venons-en aux *courants laminaires* généraux ; il est d’abord à noter que nous n’utilisons pas exactement la même définition que [BLS], plus précisément, notre notion de courant laminaire correspond dans leur terminologie aux “courants faiblement laminaires”, et nous incluons les “courants laminaires” de [BLS] comme cas particulier de la définition. Il nous semble en effet que les propriétés de ces deux classes de courants ne présentent pas de différences significatives, et que ce sont –ce que nous appelons– les courants laminaires qui apparaissent le plus naturellement dans les applications. Rappelons que l’esprit de la définition des courants laminaires est “un courant laminaire T est uniformément laminaire hors d’un ensemble de $\|T\|$ mesure arbitrairement petite”. En voici la définition exacte¹⁷ :

DÉFINITION *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^2 . Le courant T est laminaire dans Ω s’il existe une suite d’ouverts $\Omega_i \subset \Omega$ et des courants $T_i, i \geq 0$, uniformément laminaires dans Ω_i tels que la suite (T_i) croisse vers T .*

En particulier (proposition 2.3.3) il existe une famille mesurée de disques holomorphes disjoints $(\mathcal{A}, (\Delta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, \mu)$ dans Ω et pour tout α une fonction p_α , s.c.i. et positive sur Δ_α , tels que (il s’agit de la définition originale de [BLS])

$$T = \int_{\mathcal{A}} p_\alpha[\Delta_\alpha] d\mu(\alpha). \quad (1)$$

Toute la subtilité de la définition réside dans le fait que les disques Δ_α ne sont pas nécessairement des sous variétés de Ω , i.e. on peut avoir $\partial\Delta_\alpha \neq \emptyset$ dans Ω . Ceci est nécessaire en vue d’applications en dynamique non uniformément hyperbolique, où justement on ne dispose pas de renseignements sur la taille des variétés stables/instables locales. Par définition le disque Δ sera dit *subordonné* à T s’il existe un courant uniformément laminaire $S \leq T$, pour lequel Δ est inclus dans une feuille de la lamination sous jacente, qui est située dans le support de la mesure transverse. Cette définition est indépendante de la représentation (1) de T comme intégrale d’une famille de disques.

Les courants laminaires fermés peuvent alors avoir, en regard de leur caractère de “courants d’intégration généralisés”, un comportement surprenant, dont nous présentons quelques cas au chapitre 2. Un exemple important, étudié par Demailly [De2], est le courant

$$T = dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|) \quad (2)$$

¹⁷La définition que nous donnons à la section 2.3 est énoncée de façon légèrement différente –et plus opératoire– en termes d’une suite \mathcal{Q}_i de subdivisions de plus en plus fines de Ω ; l’ouvert Ω_i correspondant est alors $\Omega \setminus \partial\mathcal{Q}_i$.

dans \mathbb{C}^2 , qui a la structure suivante

$$T = \int_{S^1} [\{e^{i\theta}\} \times \mathbb{D}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [\mathbb{D} \times \{e^{i\theta}\}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [V_\theta] d\lambda(\theta),$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité S^1 , et $V_\theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, z = e^{i\theta}w, |z| > 1\}$. T est un courant laminaire fermé de potentiel continu, néanmoins $T \wedge T > 0$, et les disques subordonnés à T “s’arrêtent”, tandis que leurs prolongements analytiques se coupent. Le reste du mémoire sera essentiellement consacré à la construction d’une classe de courants laminaires –les *courants fortement approximables*– naturelle en vue d’applications dynamiques, et évitant ce type de comportement “pathologique”.

Les seules classes générales connues d’exemples de courants laminaires sont les suivantes : soit une application holomorphe injective $f : \mathbb{C} \rightarrow M$, où M est une surface complexe Kählerienne, on appelle (suivant Cantat [Ca])

$$A(r, f) = \frac{1}{\mathbf{M}([f(D_r)])} [f(D_r)] \text{ et } N(r, f) = \frac{1}{m(r, f)} \int_0^r [f(D_t)] \frac{dt}{t}$$

où les masses sont évaluées relativement à la forme de Kähler ambiante et le facteur $m(r, f)$ est choisi de sorte que $N(r, f)$ soit de masse 1. Un lemme classique d’Ahlfors affirme alors qu’il existe une suite $r_j \rightarrow \infty$ telles que la suite de courants $A(r_j, f)$ (et de même pour $N(r_j, f)$) tende vers un courant fermé $A(f)$ (resp. $N(f)$). Nous dirons de ces courants qu’ils sont “adhérents” à la courbe entière f . La “théorie de Nevanlinna topologique” d’Ahlfors donne permet de montrer alors les résultats suivants :

- [BLS] *Si $M = \mathbb{C}^2$ et le support de $f(\mathbb{C})$ est verticalement compact (i.e. $\forall R, \exists K_R, f(\mathbb{C}) \cap (D_R \times \mathbb{C}) \subset D_R \times D_{K_R}$) alors les courants de la forme $A(f)$ sont laminaires.*
- [Ca] *Si M est une variété projective les courants de la forme $N(f)$ sont laminaires.*

Ces résultats sont appliqués en dynamique pour obtenir respectivement la laminarité des courants dynamiques “de Green” pour les applications de Hénon complexes et les automorphismes des surfaces K3 projectives. La preuve repose sur des résultats très précis concernant la répartition des variétés stables (ou instables), qui ne sont pour l’instant disponibles, sauf pour certains exemples particuliers, que dans ce cadre ; les images de \mathbb{C} n’apparaissent pas par ailleurs dans la dynamique des applications d’allure Hénon.

Considérons la situation suivante : f est une application rationnelle de degré d de \mathbb{P}^2 , et on cherche à étudier la laminarité éventuelle du courant de Green T de f . Si L est une droite générique, la suite de *diviseurs rationnels* $d^{-n}(f^{-n}(L))$ converge au sens des courants vers T –il faut pour cela supposer que f est *algébriquement stable* (voir [Si1] ou le chapitre 3 pour plus de détails). Nous sommes alors amenés à étudier la laminarité de la limite au sens des courants d’une suite de diviseurs rationnels dans \mathbb{P}^2 –cette approche a été adoptée dans [BS5] dans le cas des automorphismes polynomiaux. Nous donnons au chapitre 3 un critère géométrique général de laminarité. Le résultat est le suivant. Si C est une courbe algébrique dans \mathbb{P}^2 , on note d son degré, \widehat{C} sa normalisée, g son genre géométrique (c’est à dire le genre de \widehat{C}), et si $x \in C$ est un point singulier, on note $n_x(C)$ le nombre de composantes connexes locales de C en x .

THÉORÈME 4. *Soit C_n une suite de courbes (algébriques) irréductibles dans \mathbb{P}^2 , de degré d_n , et telles que $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$. On suppose que*

$$g_n + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d_n).$$

Alors T est laminaire.

Ce théorème peut être vu comme un résultat de compacité pour certaines suites de courbes vérifiant des conditions géométriques particulières. En particulier les courbes considérées sont nécessairement singulières, ce qui n'est pas une surprise puisque tous les courants positifs fermés de \mathbb{P}^2 sont limites de diviseurs rationnels lisses.

Nous pouvons alors donner de nouveaux exemples de courants laminaires en dynamique des applications rationnelles. Soit \mathcal{M}_d l'espace (projectif) des applications rationnelles de degré d . On note $d_{\text{top}}(f)$ le degré topologique de $f \in \mathcal{M}_d$.

THÉORÈME 5. *Il existe un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_d$, résiduel pour la topologie de Zariski, tel que si $f \in \mathcal{U}$ et $d_{\text{top}}(f) < d$, alors le courant de Green de f est bien défini et est laminaire.*

Remarquer que le théorème n'implique pas *a priori* que la laminarité du courant de Green est générique parmi les applications satisfaisant la condition $d_{\text{top}}(f) < d$, car la géométrie de cet ensemble est mal connue. En revanche si \mathcal{F} est une famille à paramètres holomorphes d'applications rationnelles satisfaisant $d_{\text{top}}(f) < d$, et si $\mathcal{F} \cap \mathcal{U}$ est non vide (nous présentons un exemple de telle famille à la page 87), alors la laminarité est génériquement vraie dans \mathcal{F} .

Notre approche traite néanmoins complètement le cas des applications birationnelles des surfaces projectives ; l'existence du courant de Green est assurée par les travaux de Cantat [Ca] et Diller-Favre [DF].

THÉORÈME 6. *Soit un endomorphisme birationnel d'entropie topologique positive d'une surface projective, alors son courant de Green est laminaire.*

Ceci ne comprend pas le cas des courants stable et instable des applications d'allure Hénon, pour lesquelles il faut légèrement adapter l'argument. Le théorème analogue au théorème 4 pour les courants horizontaux dans un bidisque est vrai et sera démontré à la section 5.1.

Une question vient alors naturellement à l'esprit. Le courant de Demailly (2), qui est limite de la suite de courbes de Fermat (lisses) dans \mathbb{P}^2 , d'équation

$$z^n + w^n + t^n = 0 \quad (\text{en coordonnées homogènes } [z : w : t])$$

peut-il s'obtenir grâce au théorème 4? Nous allons voir que ce n'est pas le cas, de deux manières distinctes, aux chapitres 4 et 5. Nous dirons par la suite des courants laminaires qui sont limites de diviseurs $d_n^{-1}[C_n]$ satisfaisant la condition du théorème 4 qu'ils sont *fortement approximables*¹⁸ (ou plus simplement *approximables*) dans \mathbb{P}^2 . Nous considérerons également les courants fortement approximables horizontaux qui sont les courants obtenus grâce au critère analogue au théorème 4 pour les courants horizontaux dans un bidisque.

¹⁸La définition est en fait plus générale puisqu'elle englobe également les courants adhérents aux courbes entières, de la forme $A(f)$.

La motivation de Bedford-Lyubich-Smillie pour introduire les courants laminaires était de comprendre géométriquement le produit extérieur $T^+ \wedge T^-$, ce à quoi les auteurs parviennent en utilisant de façon cruciale la dynamique. Nous étudions plus systématiquement (i.e. hors de tout cadre dynamique) au chapitre 4 l'intersection des courants laminaires, et retrouvons en particulier le résultat de [BLS]; un autre corollaire de notre étude est le fait que le courant de Demailly (2) n'est pas fortement approximable dans \mathbb{P}^2 .

Notre objectif est le suivant : donner une interprétation géométrique au produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ de deux courants laminaires, lorsque celui ci est défini (nous donnerons un sens précis à cette dernière assertion à la section 4.1). Il est bien connu (on pourra par exemple consulter Demailly [De1]) que dans le cas de courants d'intégration sur des diviseurs, le produit extérieur pluripotentieliste –lorsqu'il existe– et l'intersection algèbro-géométrique coïncident. Nous n'étudierons donc cette question que dans le cas de courants ne chargeant pas les courbes.

Soient Δ_1 et Δ_2 deux disques holomorphes, par définition la mesure $[\Delta_1 \cap \Delta_2]$ est la somme des masses de Dirac aux points d'intersection de Δ_1 et Δ_2 , comptés sans multiplicité (celle ci n'a pas d'influence sur l'intersection des courants diffus, et on aurait tout autant pu la compter) si ceux ci sont isolés, $[\Delta_1 \cap \Delta_2] = 0$ si les deux disques ont un ouvert en commun. Si T_1 et T_2 sont des courants uniformément laminaires diffus, ayant dans l'ouvert U la représentation

$$T_i = \int_{\mathcal{A}_i} [\Delta_{i,\alpha}] d\mu_i(\alpha), \quad i = 1, 2,$$

on définit la *mesure d'intersection géométrique* dans U comme

$$T_1 \dot{\wedge} T_2 = \int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} [\Delta_{1,\alpha} \cap \Delta_{2,\beta}] d\mu_1(\alpha) d\mu_2(\beta),$$

(en particulier $T_1 \dot{\wedge} T_1 = 0$) et on dira que l'intersection $T_1 \wedge T_2$ est *géométrique* si le produit extérieur est bien défini et $T_1 \wedge T_2 = T_1 \dot{\wedge} T_2$.

THÉORÈME 7. *L'intersection des courants uniformément laminaires est géométrique.*

Il y a de plus un critère simple assurant que le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ soit bien défini dans ce cas : il suffit que les laminations associées n'aient pas de feuille commune (un ensemble de mesure nulle de feuilles communes suffit pour avoir la même conclusion).

Si maintenant T_1 et T_2 sont des courants laminaires, on dira que *le produit extérieur de T_1 et T_2 est géométrique* si celui ci est bien défini, et est la limite croissante des produits extérieurs (géométriques) des courants uniformément laminaires croissant vers T_1 et T_2 respectivement. On voit en particulier que l'auto intersection d'un courant laminaire est géométrique si et seulement si elle est nulle. Des exemples très simples montrent qu'il est illusoire d'espérer avoir un théorème tel que le précédent pour des courants laminaires généraux (même fortement approximables). Nous montrons en revanche le résultat suivant¹⁹.

THÉORÈME 8. *Soient T_1 et T_2 des courants laminaires fortement approximables dans \mathbb{P}^2 , ayant des potentiels locaux continus dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}^2$. Alors le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est géométrique dans Ω .*

¹⁹Ce résultat est spécifique à \mathbb{P}^2 et ne s'applique donc pas aux courants invariants des applications d'allure Hénon.

Ce théorème est une généralisation du résultat de [BLS] sur la structure de la mesure $T^+ \wedge T^-$. Un corollaire est que si T est un courant fortement approximable de potentiel continu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}^2$, alors $T \wedge T = 0$ dans Ω ; ceci montre que le courant de Demailly (2) n'est pas fortement approximable dans \mathbb{P}^2 .

Nous analysons plus en détail la structure des courants fortement approximables au chapitre 5. Pour des raisons de clarté, l'exposé est fait dans le cas des courants horizontaux dans un bidisque –qui est celui des applications (resp. d'allure) de Hénon–, mais nous expliquons à la section 5.4 comment étendre nos résultats aux courants approximables de \mathbb{P}^2 .

La condition d'horizontalité fait de ces courants des analogues des revêtements ramifiés, dont la fibre est une mesure de probabilité “variant de façon holomorphe” (proposition 5.1.2, classique). Notre premier objectif est d'étudier le prolongement analytique des disques subordonnés à un tel courant T , plus précisément de montrer l'assertion suivante : “le prolongement analytique d'un disque subordonné à T , s'il existe, est lui même subordonné à T ”. Rappelons que ceci est faux pour le courant (2). Des guillemets sont ici nécessaires car notre définition des disques subordonnés à T fait intervenir un courant uniformément laminaire $S \leq T$, et qu'il s'agirait en fait de parler du prolongement analytique de S . De plus un tel énoncé ne donne aucune information sur la propagation de la mesure transverse. En voici une version précise.

THÉORÈME 9. *Soit T un courant horizontal fortement approximable dans le bidisque $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Supposons que S soit un courant uniformément laminaire dans $U \times \mathbb{D}$, où $U \subset \mathbb{D}$ est un ouvert connexe, et tel que $S \leq T$ dans $U_1 \times \mathbb{D}$, où $U_1 \subset U$ est un ouvert non vide.*

Alors cette relation s'étend à $U \times \mathbb{D}$, i.e. $S \leq T$ dans $U \times \mathbb{D}$.

La preuve repose sur une étude précise de l'approximation de T par des diviseurs horizontaux satisfaisant la condition du théorème 4, et en particulier sur une notion de *défaut*, analogue à celle d'Ahlfors-Nevanlinna. Le défaut de T dans $Q \times \mathbb{D}$ mesure la proportion de graphes au dessus de Q dans la masse de T dans $Q \times \mathbb{D}$.

Nous montrons ensuite comment associer une lamination abstraite à un courant fortement approximable, en adaptant à ce contexte la méthode développée par Meiyu Su [Su] pour construire une lamination mesurée –qui s'apparente d'ailleurs plutôt à un courant laminaire abstrait– associée à l'extension naturelle de la dynamique d'une fraction rationnelle dans \mathbb{P}^1 .

THÉORÈME 10. *Soit T un courant horizontal fortement approximable. Il existe une lamination \mathcal{L} munie d'une injection continue et lisse le long des feuilles $i : \mathcal{L} \hookrightarrow T$, respectant la structure laminaire.*

La lamination \mathcal{L} est munie d'une mesure transverse invariante telle que si \tilde{T} désigne le cycle feuilleté associé, on ait naturellement $i_\tilde{T} = T$.*

Cette construction n'est véritablement satisfaisante que lorsque le courant T est de potentiel continu, puisqu'on démontre dans ce cas que les disques subordonnés à T ne peuvent pas se couper –c'est un corollaire simple du théorème 8. Dans ce cas c'est à “l'ensemble des disques subordonnés à T ” (privé d'un ensemble de disques de mesure nulle) qu'on donne une structure de lamination; la lamination construite ne dépend alors que de T . Ceci peut être vu, si T est un courant invariant pour un difféomorphisme holomorphe, comme un analogue

(mesurable) de la construction de Lyubich-Minsky –il est à signaler que Kaimanovitch et Lyubich [KL] ont récemment étudié la structure mesurable des laminations de Lyubich-Minsky. Les laminations ainsi construites sont ainsi des versions non uniformément hyperboliques de celles de Ruelle-Sullivan, le raffinement de la topologie nécessaire pour construire la lamination étant une manifestation de la non-uniformité.

◇

Publications. Nous n'avons pas mentionné dans cet aperçu un travail sur la dynamique générique en temps réel des champs de vecteurs Hamiltoniens dans \mathbb{C}^{2k} , dans lequel nous montrons notamment que les orbites génériques (en temps réel) d'un champ de vecteur Hamiltonien polynomial dans \mathbb{C}^2 sont denses dans les lignes de niveau (complexes) du Hamiltonien. Nous en déduisons l'existence de familles denses de Hamiltoniens transcendants pour lesquels les orbites génériques explosent en temps fini. Nous reportons le lecteur à l'article [Du1] (paru au Michigan Math. Journal) pour plus de détails.

Signalons à ce sujet que la dynamique (en temps réel et complexe) des champs de vecteurs Hamiltoniens holomorphes, de même que la dynamique holomorphe à plusieurs variables (vue comme section de Poincaré des systèmes précédents) apparaissent en Physique théorique, notamment pour la modélisation de "l'effet tunnel", dans l'approximation semi classique²⁰. La dynamique des applications birationnelles apparaît également en Physique statistique (voir les références de [DF]).

Les travaux présentés dans ce mémoire ont fait l'objet de la rédaction de deux articles : [Du2], inclus comme chapitre 3, à paraître aux Mathematische Annalen, ainsi que [Du3], soumis, reproduit au chapitre 1.

²⁰A.Shudo, T.Ikeda. *Chaotic tunneling : a remarkable manifestation of classical complex dynamics in non-integrable quantum phenomena.* Phys. D 115(1998).

Chapitre 1

Applications d'allure Hénon dans \mathbb{C}^2

Ce premier chapitre est consacré à l'étude des applications d'allure Hénon dans \mathbb{C}^2 , qui sont aux applications de Hénon complexes ce que les applications d'allure polynomiale sont aux polynômes dans \mathbb{C} . Ces applications ont été introduites par Hubbard et Oberste-Vorth. Plutôt que de chercher à conjuguer ces applications à des automorphismes polynomiaux, nous adaptons aux premières les méthodes mises au point pour l'étude des seconds.

Le point crucial est de construire des courants invariants, et nous esquissons à cette fin (§1.1, et §1.2) une théorie dans un cadre général, en liant l'action sur certains groupes d'homologie relative et un *degré dynamique* général.

Nous montrons ensuite dans le cas des applications d'allure Hénon que ces courants sont "attirants" pour la dynamique, en adaptant une méthode de Dinh-Sibony (§1.4). En utilisant les méthodes mises au point par Bedford, Lyubich et Smillie, nous en déduisons (§1.5) l'existence d'une unique mesure d'entropie maximale (l'entropie topologique est calculée à la section 1.3), mélangeante, et décrivant la répartition des points selles. Nous donnons à la dernière section 1.6 quelques exemples d'applications d'allure Hénon en dynamique des automorphismes transcendants de \mathbb{C}^2 .

Ce chapitre est une reproduction de l'article [Du3].

Introduction

One of the most famous 2-dimensional dynamical systems is Smale's Horseshoe. It is a basic example of "simple" map with "complicated" dynamics, and has served as a guideline for the whole modern development of discrete-time dynamical systems. A very natural question in this context is to understand the dynamical phenomena occurring when uniform hyperbolicity of the horseshoe degenerates. This was a motivation for the study of the so called "Hénon map"

$$(x, y) \longmapsto (x^2 + c + ay, x).$$

An elegant approach for this problem, which was initiated at the end of the 80's is to view the Hénon map as a polynomial selfmap of \mathbb{C}^2 , and try to use complex analytic tools, as well as intuition from the well developed theory of complex 1 dimensional dynamical systems, to derive some dynamical information (e.g. [Hu], [BS1], [FS1]). This program led to numerous results, such as : the computation of topological entropy, the structure of stable/unstable manifolds, the existence of a unique, mixing, measure of maximal entropy, equidistribution of saddle orbits, etc., all reminiscent of uniform hyperbolicity.

However, turning back to our original problem, it remains unclear whether these features are characteristic of the polynomial nature of Hénon mappings, or not. The purpose of this article is to show that the answer to this last question, in the complex setting, is "no". More specifically, we study a class of "Hénon-like" holomorphic diffeomorphisms defined in the bi-disk, and prove they display many of the properties of the preceding list. Our construction suggests more generally that for many holomorphic dynamical systems defined in open subsets of (two dimensional) complex manifolds, some conditions of topological nature allow to construct invariant currents (see e.g. theorem 1.1.7).

Hénon-like mappings were first introduced by J.H. Hubbard and R. Oberste-Vorth [HO] under the name of "crossed mappings". They have the same relationship with Hénon maps as (generalized) polynomial-like mappings do with polynomials in one variable. Let us precise a little this statement. A Hénon-like map is an injective holomorphic map defined in the neighborhood of the unit bidisk \mathbb{B} , such that f (resp. f^{-1}) maps the "vertical" (resp. "horizontal") part of $\partial\mathbb{B}$ strictly outside itself (definition 1.2.1). In particular the image of any horizontal line is a branched cover of some degree d over the unit disk. The integer d is called the *degree* of the Hénon-like map.

It seems natural in this situation to ask for a conjugacy between Hénon-like and Hénon maps : nevertheless it is easy to produce Hénon-like maps with both attractive and repelling fixpoints, which is impossible for Hénon maps due to their constant Jacobian. We have to point out at this stage that T. Dinh and N. Sibony [DiS] studied recently polynomial-like maps in several variables, obtaining results that parallel properties of holomorphic self maps of \mathbb{P}^k .

THEOREM 1.1 *Let f be a Hénon-like map of degree $d > 1$ in the bidisk \mathbb{B} , and K be the maximal totally invariant set.*

Then the topological entropy $h_{\text{top}}(f|_K)$ equals $\log d$ and there exists a unique invariant measure μ of entropy $\log d$. Moreover μ is mixing, has local product structure, and saddle orbits are equidistributed towards μ .

The method for constructing and studying μ is basically the same as in the complex Hénon case. The main step is to construct stable/unstable invariant currents and show they are attracting under backward/forward iteration. However, no natural “Green function” is available here and the invariant currents are obtained by using an adaptation of the classical Graph Transform method (which aims at constructing invariant manifolds). The ergodic properties of μ are crucially related to convergence of the iterative graph transform process. Once again, convergence of the Green potentials seems to be ineffective here, and we have to follow a different approach. We use some convexity properties (“subharmonic variation”) of positive currents along with an idea of [DiS].

The precise outline of this chapter is as follows. In §1.1 we describe the graph transform for currents in a general setting. We provide, in dimension 2, a link between this construction and the formalism of relative homology; this allows us to define a general *dynamical degree*. The paragraph concerning relative homology may be skipped as a first reading since for the convenience of the reader we do not use it in the study of Hénon-like maps.

In section 1.2 we define and detail the action on currents of Hénon-like maps, as well as “horizontal-like” maps, which are the non injective Hénon-like maps. We also sketch other possible case studies for the graph transform. Topological entropy of Hénon-like maps is computed in §1.3, using standard methods.

The convergence of the graph transform is proved in §1.4. This implies, together with the fact that the invariant currents have continuous potentials, that μ is mixing. The fine structure of μ is analyzed in §1.5, following the fundamental paper [BLS] by E. Bedford, M. Lyubich and J. Smillie closely. There are however some technical difficulties in following the Pesin-theoretical ideas of this paper, mainly due to the form of our convergence theorem 1.4.1.

We end up (§1.6) by studying some examples of Hénon-like maps occurring in transcendental automorphisms of \mathbb{C}^2 .

1.1. The graph transform for currents

Let Ω be a relatively compact open subset of a n -dimensional complex manifold M , and $f : N(\overline{\Omega}) \rightarrow M$ be a dominating holomorphic map (i.e. the Jacobian of f does not vanish identically), where $N(\overline{\Omega})$ is some neighborhood of $\overline{\Omega}$. We also let $K^+ = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\Omega)$ where $f^{-n}(\Omega)$ is by definition the set of points in Ω whose forward n first iterates remain in Ω (resp. $K^- = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\Omega)$) be the maximal forward (resp. backward) invariant set. We want to find conditions on (Ω, f) ensuring that K^+ and K^- have some “analytic structure”. Examples in higher-dimensional complex dynamics lead us to look for currents supported on these sets.

The setting of the classical graph transform is the following (see for example [Ro]) : Ω is some small ball centered at a hyperbolic fixpoint x of the C^1 map f , of index $(k, n - k)$ (k positive exponents). Then in suitable coordinates, $\Omega \simeq D^k \times D^{n-k}$ and if $\Gamma \subset \Omega$ is a graph over the k first coordinates, the restriction $\mathcal{L}\Gamma = f(\Gamma)|_{\Omega}$ is also a graph. One proves that $\mathcal{L}^n\Gamma$ converges in the C^0 topology to $K^- = W_{loc}^u(x)$, the local unstable manifold of x . This construction also appears in a more abstract setting near non-periodic points, assuming some hyperbolic structure (e.g. in Pesin Theory).

Let $V \subset M$. We define $\mathcal{C}_p(\Omega, V)$ as the set of (weakly) positive currents T of bidegree (p, p) in M , with support in $\Omega \cup V$, such that $\text{Supp}(dT) \subset V$. If $V \subset \partial\Omega$, $\mathcal{C}_p(\Omega, V)$ is also the set of positive closed (p, p) currents T of finite mass in Ω , such that $\overline{\text{Supp}(T)} \cap \partial\Omega \subset V$. Throughout this section, the closure of a set is always meant in M and $\mathbf{1}_A$ denotes the characteristic function of the set A .

The basic analogue of the graph transform for pushing forward currents is the following proposition. We postpone the examples to the next section.

PROPOSITION 1.1.1 *Let $f : N(\overline{\Omega}) \rightarrow M$ as before and suppose there exists a subset V of $\partial\Omega$ satisfying*

- i. $f(V) \cap \overline{\Omega} \subset V$;
- ii. $f(\Omega) \cap \partial\Omega \subset V$.

Then if $T \in \mathcal{C}_p(\Omega, V)$, then $\mathcal{L}T = \mathbf{1}_{\Omega} f_ T \in \mathcal{C}_p(\Omega, V)$. Moreover \mathcal{L} is continuous in the weak topology.*

An important special case of condition i. is when $f(V) \cap \overline{\Omega}$ is empty. The key point is that f sends V outside Ω .

The action of a current T on a test form $\varphi \in \mathcal{D}^{2n-2p}(\Omega)$ is denoted by $\langle T, \varphi \rangle$. Of course $\langle T, \varphi \rangle$ is also well defined, even if φ is not compactly supported in Ω , under the weaker assumption $\text{Supp } \varphi \cap \text{Supp } T \subset \subset \Omega$. We also recall for reference the following obvious fact : if α is a $2n - 2p - 1$ form such that $\text{Supp } T \cap \text{Supp } \alpha \subset \subset \Omega$, and T is closed in Ω , then $\langle T, d\alpha \rangle = 0$: only write $\alpha = \chi\alpha + (1 - \chi)\alpha$, where χ is an appropriate cutoff function (notice that this is not true under the weaker hypothesis $\text{Supp } T \cap \text{Supp } d\alpha \subset \subset \Omega$).

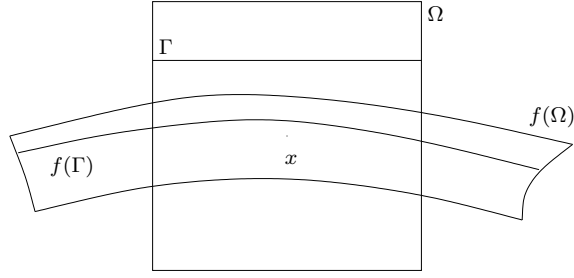


FIG. 1.1 – The classical graph transform.

PROOF : Let $T \in \mathcal{C}_p(\Omega, V)$, $\mathbf{1}_\Omega f_* T$ is the restriction to Ω of the current $f_* T$ defined in $f(\Omega)$. If $\varphi \in \mathcal{D}^{2n-2p}(\Omega)$, then by definition

$$\langle \mathbf{1}_\Omega f_* T, \varphi \rangle = \langle f_* T, \varphi \rangle = \langle T, f^* \varphi \rangle.$$

The last term makes sense because we extend φ by 0 to the whole M , and so $f^* \varphi$ is a smooth form in Ω such that $\text{Supp } T \cap \text{Supp } f^* \varphi \subset \subset \Omega$ (closures are in M). Indeed suppose not : there exists $x \in \overline{\text{Supp } T} \cap \overline{f^{-1}(\text{Supp } \varphi)} \cap \partial\Omega$. In this case $x \in V$ and $f(x) \in \overline{f^{-1}(\text{Supp } \varphi)} \subset \overline{\text{Supp } \varphi} \subset \subset \Omega$. This contradicts condition *i.* . Thus $\mathcal{L}T = \mathbf{1}_\Omega f_* T$ is a well defined current in Ω . Moreover if $\varphi = d\alpha$, $\langle \mathcal{L}T, d\alpha \rangle = \langle T, d(f^* \alpha) \rangle$ and the same reasoning yields $\text{Supp } T \cap \text{Supp}(f^* \alpha) \subset \subset \Omega$, hence $\langle \mathcal{L}T, d\alpha \rangle = 0$, i.e. $\mathcal{L}T$ is closed in Ω .

It only remains to check that $\mathcal{L}T \in \mathcal{C}_p(\Omega, V)$. Of course $\mathcal{L}T$ is weakly positive. Suppose $x \in \overline{\text{Supp } \mathcal{L}T} \cap \partial\Omega$. Then $x = f(y)$, for some $y \in \overline{\text{Supp } T} \subset \Omega \cup V$. By *i.* and *ii.*, necessarily $x \in V$. Lastly, $\mathcal{L}T$ has finite mass because f is defined in a neighborhood of $\overline{\Omega}$. Continuity is obvious. \square

There is an analogue of proposition 1.1.1 for pulling back currents, when this notion makes sense, that is, for coverings and currents of bidegree (1,1) (see e.g.[Sil]). In this general setting, however, the graph transform need not preserve finite mass. So only here we use the following notation : $\mathcal{C}_p^\#(\Omega, V)$ is the set of positive closed (p, p) currents T in Ω , such that $\overline{\text{Supp}(T)} \cap \partial\Omega \subset V$.

PROPOSITION 1.1.2 Assume $f : N(\overline{\Omega}) \rightarrow M$ as in the preceding proposition, and suppose there exists a subset V of $\partial\Omega$ such that

- i. $f^{-1}(V) \cap \overline{\Omega} \subset V$;
- ii. $f^{-1}(\Omega) \cap \partial\Omega \subset V$, where $f^{-1}(\Omega) = \{x \in \overline{\Omega}, f(x) \in \Omega\}$.

Assume also that

- f is a local diffeomorphism ;
- or the bidegree (p, p) equals $(1, 1)$ and V is closed.

Then if $T \in \mathcal{C}_p^\#(\Omega, V)$, $\mathbf{1}_\Omega f^* T \in \mathcal{C}_p^\#(\Omega, V)$.

PROOF : we need only treat the second case because the proof of the first one is very similar to the previous proposition.

We recall that if T is a positive closed current of bidegree (1,1) in Ω , then locally there exists a plurisubharmonic (psh) function u such that $T = dd^c u$. If $x \in f^{-1}(\Omega) \cap \Omega$, $f^* T$ is defined in a neighborhood of x by $f^* T = dd^c(u \circ f)$. This local expression defines a positive

closed current in Ω if it vanishes in a neighborhood of $\partial f^{-1}(\Omega) \cap \Omega$. Suppose $x \in \partial f^{-1}(\Omega) \cap \Omega$; by *i.* $f(x) \notin V$, so if $y \in f^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ is near x , $f(y)$ is far from V which means that $u \circ f$ is pluriharmonic in a neighborhood of y . So $\mathbf{1}_\Omega f^* T$ is a well defined positive closed current in Ω . One readily checks $\mathbf{1}_\Omega f^* T \in \mathcal{C}_1^\#(\Omega, V)$ using *i.* and *ii.* \square

REMARK 1.1.3 If f is injective (which will be the case in many of the next sections), in the setting of proposition 1.1.2, one checks, if $T \in \mathcal{C}_p(\Omega, V)$, that $\mathbf{1}_\Omega f^* T = (f^{-1})_*(\mathbf{1}_{f(\Omega) \cap \Omega} T)$. Note that we do not assume that f^{-1} is defined in Ω .

The two preceding propositions are linked in some cases.

PROPOSITION 1.1.4 *Let $f : N(\overline{\Omega}) \rightarrow M$ as before, and suppose $V \subset \partial\Omega$ satisfies :*

- i. $f(V) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$;*
- ii. $f(\Omega) \cap \partial\Omega \subset V$.*

Then the complement W of V in $\partial\Omega$ satisfies :

- $f^{-1}(W) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$;*
- $f^{-1}(\Omega) \cap \partial\Omega \subset W$.*

PROOF : indeed assume $x \in f^{-1}(W) \cap \overline{\Omega}$, then $f(x) \in W \cap f(\overline{\Omega}) \subset V \cap W = \emptyset$; and if $x \in f^{-1}(\overline{\Omega}) \cap V$, $f(x) \in \overline{\Omega} \cap f(V) = \emptyset$. \square

In the context of proposition 1.1.1, we obtain a graph transform operator

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}_p(\Omega, V) \rightarrow \mathcal{C}_p(\Omega, V),$$

which we want to iterate. In order to get limit currents, we need to normalize it suitably, and find nonwandering conditions ensuring that its range is nonzero. The next theorem tells us that this can be achieved by using appropriate relative homology groups.

Not to overload the statements and proofs with undue technicalities, we restrict ourselves to the situation we shall encounter in the next sections. Namely, let (H) be the following set of hypotheses :

Ω is an open relatively compact subset of a 2-dimensional complex manifold, f is defined in some neighborhood of $\overline{\Omega}$, V is a manifold with boundary in $\partial\Omega$ (we do not assume that $\partial\Omega$ is a manifold). This simplifies the treatment of relative homology. We also assume that f, V satisfy the following hypotheses :

- i. $f(V) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$;*
- ii. $f(\Omega) \cap \partial\Omega \subset V$.*

The complement of a set A is denoted by A^c . It is possible to state a bidimensional (p, p) analogue of these results.

We first associate relative homology classes to currents of $\mathcal{C}(\Omega, V)$ (we drop the subscript "1" since all currents considered are of bidegree (1,1)). This result is presumably not new; however we give here a proof since it seems to us that it does not appear anywhere else in the literature. All homology groups considered in this article are homology groups with compact supports, with coefficients in \mathbb{C} .

LEMMA 1.1.5 *If $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$, then T defines a natural homology class $[T] \in H_2(\Omega \cup V, V, \mathbb{C})$.*

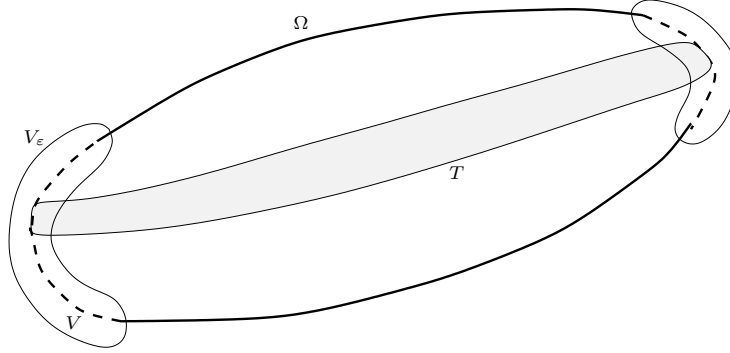


FIG. 1.2 – setting of lemma 1.1.5.

We recall that the group $H_2(\Omega \cup V, V, \mathbb{C}) = H_2^c(\Omega \cup V, V, \mathbb{C})$ is the quotient of the free additive group (with complex coefficients) of compactly supported 2-chains in $\Omega \cup V$ with boundary in V by the group of chains homologous to a chain in V . Since \mathbb{C} is a field, homology groups with compact support and (non compactly supported) cohomology groups are dual to each other [Gre], in the absolute and relative cases. In many cases -say, if Ω has smooth boundary- a homotopy argument yields $H_2(\Omega \cup V, V, \mathbb{C}) \simeq H_2(\overline{\Omega}, V, \mathbb{C})$. We denote by $\Omega^q(U)$ the space of smooth q-forms in U (possibly without compact support).

PROOF : in the following, the coefficient ring is always equal to \mathbb{C} so we omit it. First note that since V is a manifold with boundary, there exist open tubular neighborhoods V_ε in M , homotopy equivalent to V , and $H_2(\Omega \cup V, V) \simeq H_2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$. Any $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$ is also a current with compact support in $\Omega \cup V_\varepsilon$, with boundary in V_ε , via the natural pairing. In fact we will associate to T a class $[T] \in H_2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$.

For this we have to prove that T acts by duality on $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$. A cohomology class in $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$ can be represented by a couple of differential forms $(\omega, \theta) \in \Omega^2(\Omega \cup V_\varepsilon) \times \Omega^1(V_\varepsilon)$, such that $d\omega = 0$ in $\Omega \cup V_\varepsilon$ and $d\theta = \omega$ in V_ε ([BoTu] p.78). Coboundaries in $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$ are represented by couples (ω, θ) such that there exists $(\kappa, \alpha) \in \Omega^1(\Omega \cup V_\varepsilon) \times \Omega^0(V_\varepsilon)$, with $d\kappa = \omega$ in $\Omega \cup V_\varepsilon$ and $\theta = \kappa - d\alpha$ in V_ε .

For $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$ we consider the following pairing

$$\Omega^2(\Omega \cup V_\varepsilon) \times \Omega^1(V_\varepsilon) \ni (\omega, \theta) \mapsto \langle T, \omega \rangle + \langle dT, \theta \rangle. \quad (1.1)$$

We have to check that it depends only on cohomology classes in $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$, i.e. that it vanishes on coboundaries. First remember that the Stokes formula holds without any compact support assumption on ω and θ , since the currents we consider do have compact support. More precisely, for a current T of bidegree (1,1) with compact support and any smooth differential 1-form φ , we have

$$\langle T, d\varphi \rangle = -\langle dT, \varphi \rangle.$$

Suppose $(\omega, \theta) = (d\kappa, \kappa - d\alpha)$, then

$$\langle T, \omega \rangle + \langle dT, \theta \rangle = \langle T, d\kappa \rangle + \langle dT, \kappa - d\alpha \rangle = \langle T, d\kappa \rangle + \langle dT, \kappa \rangle - \langle dT, d\alpha \rangle.$$

Since T has compact support in $\Omega \cup V_\varepsilon$ and dT has compact support in V_ε , we conclude by using the Stokes formula. \square

EXAMPLE 1.1.6 In the remaining part of the paper we shall mainly be concerned with the case where $\Omega = \{z, w \in \mathbb{C}^2, |z| < 1, |w| < 1\}$ is the unit bidisk and $V = \{(z, w) \in \partial\Omega, |z| = 1\}$. Currents of $\mathcal{C}(\Omega, V)$ are then called *horizontal*. Closed 2-forms in $\Omega \cup V_\varepsilon$ are exact so if (ω, θ) is as in the lemma, then $\omega = d\alpha$ in $\Omega \cup V_\varepsilon$ and in $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$, $(\omega, \theta) \sim (0, \theta - \alpha)$. Conversely if θ' is any closed 1-form in V_ε , then the couple $(0, \theta')$ represents a class in $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$. We thus get that $H^2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon) \simeq H^1(V_\varepsilon) \simeq \mathbb{C}$ since V_ε has the topology of an open solid torus. The pairing between T and $(0, \theta')$ is $\langle dT, \theta' \rangle$: for example the relative homology class of a horizontal subvariety is given by the winding number of its boundary.

We want to use these relative homology groups to normalize conveniently the sequences of currents which occur by iteration. Let $H_2^+(\Omega \cup V, V)$ be the image of $\mathcal{C}(\Omega, V)$ in $H_2(\Omega \cup V, \mathbb{C})$.

THEOREM 1.1.7 *Under the preceding hypotheses (H), assume further that V satisfies the following convexity condition (C) : for every $x \in \Omega$ there exists a weakly positive closed (1,1) form ω_x , vanishing in a neighborhood of V , such that ω_x is strictly positive in a neighborhood of x .*

Then the graph transform operator \mathcal{L} factors as a linear morphism

$$\mathcal{L}_* : H_2^+(\Omega \cup V, V) \rightarrow H_2^+(\Omega \cup V, V)$$

and if ρ_n denotes the operator norm of \mathcal{L}_^n , then the sequence of currents $(\rho_n^{-1} \mathcal{L}_*^n T)_{n \geq 0}$ has locally bounded mass in Ω .*

The spectral radius of \mathcal{L}_* , $\rho = \lim (\rho_n)^{1/n}$ appears as the *dynamical degree* of f . The relationship between ρ and the topological entropy of f will be examined on a class of examples in the next sections.

REMARK 1.1.8 If $M = \mathbb{C}^2, \mathbb{P}^2$ or $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, the convexity condition (C) is true if V is rationally convex in a neighborhood N of $\overline{\Omega}$. Indeed if V is rationally convex in N , then for every $x \in \Omega$ there exists a curve C in N , $x \in C$, and $V \cap C = \emptyset$. Linearly perturbing C and integrating provides the desired ω_x (see [DS]).

This convexity condition has to be understood as the analogue of the Kähler hypothesis in dynamics on complex manifolds.

PROOF OF THEOREM 1.1.7 : we first need to show that homologous currents in $H_2(\Omega \cup V, V)$ have homologous transforms by \mathcal{L} . As in the proof of the preceding lemma, we consider an open tubular neighborhood V_ε of V and we view $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$ as a 2-current with compact support in $\Omega \cup V_\varepsilon$, such that $\text{Supp } dT \subset V \subset \subset V_\varepsilon$. Recall that $H_2(\Omega \cup V, V) \simeq H_2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$.

LEMMA 1.1.9 *If $[T] = 0$ in $H_2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$, then there exists a current U of degree 1, with compact support in $\Omega \cup V_\varepsilon$, and a current R of degree 2, with compact support in V_ε , such that $T = dU + R$ in $\Omega \cup V_\varepsilon$.*

PROOF OF THE LEMMA : note that for usual chains, the claim of the lemma is the definition of relative boundaries. Recall from lemma 1.1.5 that $[T] = 0$ in $H_2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$ if and only if for any couple of forms $(\omega, \theta) \in \Omega^2(\Omega \cup V_\varepsilon) \times \Omega^1(V_\varepsilon)$, such that $d\omega = 0$ in $\Omega \cup V_\varepsilon$ and $d\theta = \omega$ in V_ε ,

$$\langle T, \omega \rangle + \langle dT, \theta \rangle = 0.$$

Recall also (e.g. [dR]) that if a q -dimensional compactly supported current S in an open set U satisfies $\langle S, \alpha \rangle = 0$, for all closed $\alpha \in \Omega^q(U)$, then S is the boundary of some compactly supported $(q + 1)$ -dimensional current.

First, for any closed $\theta \in \Omega^1(V_\varepsilon)$, $\langle dT, \theta \rangle = 0$. Indeed, $\langle dT, \theta \rangle$ is the action by the pairing (1.1) of T on the couple $(0, \theta)$. Thus there exists a 2-dimensional current R_1 , with compact support in V_ε , such that $dR_1 = dT$, and $T - R_1$ is a closed compactly supported current in $\Omega \cup V_\varepsilon$, such that $[T - R_1] = [T]$. By construction, $\langle T - R_1, \omega \rangle = 0$ for any closed $\omega \in \Omega^2(\Omega \cup V_\varepsilon)$ which is exact in V_ε .

Let F be the subspace of $H^2(V_\varepsilon)$ generated by 2-forms in $\Omega^2(V_\varepsilon)$ which are restrictions of closed 2-forms of $\Omega \cup V_\varepsilon$. $T - R_1$ naturally acts by duality on F in the following way : if $u \in F$, let $\omega \in \Omega^2(\Omega \cup V_\varepsilon)$, closed, such that the class of $\omega|_{V_\varepsilon}$ in $H^2(V_\varepsilon)$ is u , we define $(T - R_1)(u)$ to be $\langle T - R_1, \omega \rangle$. The definition is unambiguous since if $\omega|_{V_\varepsilon}, \omega'|_{V_\varepsilon}$ have the same cohomology class in $H^2(V_\varepsilon)$, then $\omega - \omega'$ is exact in V_ε , so $\langle T - R_1, \omega - \omega' \rangle = 0$. Hence there exists some homology class with compact support in V_ε representing the action of $T - R_1$ on F . In other words, there exists a closed current R_2 with compact support in V_ε , such that for any closed $\omega \in \Omega^2(\Omega \cup V_\varepsilon)$, $\langle T - R_1, \omega \rangle = \langle R_2, \omega \rangle$, so $T - R_1 - R_2$ is a boundary in $\Omega \cup V_\varepsilon$. \square

We turn back to the proof of theorem 1.1.7. If $[T_1] = [T_2]$ in $H_2(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon)$, then $T_1 - T_2 = dU + R$. Since $f(V) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, if ε is small enough, $f(V_\varepsilon) \cap (\overline{\Omega} \cup V_\varepsilon) = \emptyset$, and in Ω , $\mathcal{L}(T_1 - T_2) = \mathcal{L}(dU) = d\mathcal{L}U$. Viewed as a current in $\Omega \cup V_\varepsilon$, $\mathcal{L}U$ is a degree 1 current with support in $\Omega \cup V$, such that $\mathcal{L}(T_1 - T_2) - d\mathcal{L}U$ has support in V . Thus the class $[\mathcal{L}(T_1 - T_2)]$ vanishes and there is a well defined map \mathcal{L}_* in homology.

It remains to prove that the homology class mod. V of $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$ controls the mass of T on compact subsets of Ω . If $x \in \Omega$, by (C) there exists a closed positive form ω_x , strictly positive near x . Then the mass of T near x is not greater than $C\langle T, \omega_x \rangle$, (C is a constant depending on ω_x) which in turn only depends on $[T]$ since $\omega_x = 0$ near V (see the pairing (1.1) in lemma 1.1.5). The theorem is proved. \square

1.2. Hénon-like mappings and other examples

Hénon-like and horizontal-like maps. We begin with some notation : $\mathbb{B} = \{|z|, |w| < 1\}$ is the unit bidisk in \mathbb{C}^2 , $\partial_v \mathbb{B}$ (resp. $\partial_h \mathbb{B}$) is the “vertical” (resp. “horizontal”) part of the boundary, $\partial_v \mathbb{B} = \{|z| = 1, |w| < 1\}$ (resp. $\partial_h \mathbb{B} = \{|z| < 1, |w| = 1\}$), $N(\overline{\mathbb{B}})$ is some (unspecified) neighborhood of $\overline{\mathbb{B}}$. Let also \mathbb{D} (resp. $D(a, r)$) be the unit disk (resp. the disk of center a and radius r) in \mathbb{C} . Note that horizontal objects (e.g. horizontal currents, see below) in \mathbb{B} hit the boundary $\partial \mathbb{B}$ in its vertical part.

DEFINITION 1.2.1 *A horizontal-like map in \mathbb{B} is a dominating holomorphic map $f : N(\overline{\mathbb{B}}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfying :*

- i. $f(\partial_v \mathbb{B}) \cap \overline{\mathbb{B}} = \emptyset$;
- ii. $f(\overline{\mathbb{B}}) \cap \partial \mathbb{B} \subset \partial_v \mathbb{B}$.

An injective horizontal-like map is called Hénon-like.

This definition, as well as all subsequent results can easily be transposed to any bounded open set in \mathbb{C}^2 biholomorphic to a bidisk. Note also that the definition is stable under small perturbations in uniform norm ; of course it is interesting only when $f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$. One defines the respective maximal forward and backward invariant sets K^+ and K^- , and let $K = K^+ \cap K^-$.

A basic way to construct Hénon-like maps is to perturb Hénon maps in \mathbb{C}^2 . More precisely let

$$f : (z, w) \mapsto (z_1, w_1) = (aw + p(z), az), \quad |a| < 1$$

be a Hénon map of degree $\deg p = d > 1$, then if R is so large that $|z| = R$ implies $|p(z)| > 2R$, one checks easily that f is Hénon-like in the bidisk $D(0, R)^2$. All holomorphic (possibly transcendental) perturbations of f , close enough to f in the C^0 norm in a neighborhood of $D(0, R)^2$ also satisfy definition 1.2.1 in $D(0, R)^2$.

It is not more difficult to produce non injective examples : once again we build on Hénon maps. Consider the following polynomial map of topological degree 4

$$f : (z, w) \mapsto (z_1, w_1) = ((aw + p(z))^2, (az)^2), \quad |a| < 1/R,$$

with R chosen so large that $f(\partial_v D(0, R)^2) \cap \overline{D(0, R)^2} = \emptyset$ as before. The condition on a ensures that $f(\overline{D(0, R)^2}) \cap \partial D(0, R)^2 \subset \partial_v D(0, R)^2$. Again, all close enough C^0 holomorphic perturbations of f are horizontal-like in the bidisk $D(0, R)^2$.

There is a related definition, due to J.Hubbard and R.Oberste-Vorth [HO], which motivated our definition of Hénon like maps. We denote respectively by $L_{w_0}^h$ and $L_{z_0}^v$ the horizontal line $\{w = w_0\}$ and the vertical line $\{z = z_0\}$; also pr_1 and pr_2 are the natural projections $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$.

DEFINITION 1.2.2 [HO] *$f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ is a crossed map if there exists open subsets U_1 and U_2 of \mathbb{B} such that f is a holomorphic diffeomorphism $U_1 \rightarrow U_2$, and*

- $\forall w \in \mathbb{D}, U_1 \cap L_w^h \subset \subset \mathbb{D}$ and $pr_1 \circ f : U_1 \cap L_w^h \rightarrow \mathbb{D}$ is proper of degree d .
- $\forall z \in \mathbb{D}, U_2 \cap L_z^v \subset \subset \mathbb{D}$ and $pr_2 \circ f^{-1} : U_2 \cap L_z^v \rightarrow \mathbb{D}$ is proper of degree d .

The next proposition allows to check the definition of crossed maps more easily.

PROPOSITION 1.2.3 *Assume f is an injective map defined in $N(\overline{\mathbb{B}})$. Then f is Hénon-like if and only if f is a crossed map.*

PROOF : we need only prove the “only if” statement. Let $U_1 = f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{B}, f(x) \in \mathbb{B}\}$ and $U_2 = f(U_1)$. By condition *i.* of definition 1.2.1, $\overline{U_1} \cap \partial_v \mathbb{B} = \emptyset$, hence for all $w \in \mathbb{D}$, $U_1 \cap L_w^h \subset \subset \mathbb{D}$. Moreover, by condition *ii.* if $(z, w) \in \partial(U_1 \cap L_w^h)$, then $f(z, w) \in \partial_v \mathbb{B}$, which yields the first half of the definition of crossed mappings. Moreover, this also implies $\overline{U_2} \cap \partial_h \mathbb{B} = \emptyset$, so $U_2 \cap L_z^v \subset \subset \mathbb{D}$, and by *i.* if $(z, w) \in \partial(U_2 \cap L_z^v)$, then as f is open and defined in a neighborhood of $\overline{\mathbb{B}}$, we get $(z, w) \in f(\overline{\mathbb{B}})$ and $f^{-1}(z, w) \in \partial_h \mathbb{B}$. Equality of degrees of the corresponding proper maps is easy and proved in [HO] : the degree of $pr_1 \circ f$ is the number of intersection points between $f(L^h) \cap \mathbb{B}$ and a generic vertical line L^v . These points correspond by f^{-1} to intersection points between $f^{-1}(L^v) \cap \mathbb{B}$ and L^h . \square

REMARK 1.2.4 For general horizontal-like maps, one can define a similar degree, studying branched covers which occur by pushing horizontal disks.

We now detail the action of horizontal-like mappings on currents. In particular we shall relate the degree just defined and the dynamical degree of the preceding section. For the convenience of the reader unfamiliar with homology theory, we only use homological free arguments. We first list some (well known) properties of horizontal and vertical currents in \mathbb{B} . A *horizontal* (resp. *vertical*) positive closed (1,1) current (we abbreviate this as “horizontal current” in the sequel) is a current of $\mathcal{C}(\mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbb{B}, \partial_h \mathbb{B})$). In other words, it is a positive closed (1,1) current of finite mass in \mathbb{B} with horizontal (resp. vertical) support. Of course properties of horizontal and vertical currents are similar so by now we focus on horizontal currents.

A basic tool for studying horizontal currents is the following (see also [S1]). Let T be a horizontal current, and u be a potential of T , $T = dd^c u$, where $d^c = (\partial - \bar{\partial})/(2i\pi)$. For $z \in \mathbb{D}$ we let m^z be the measure (0 dimensional current) on L_z^v ,

$$m^z = dd_w^c u = \Delta_w u(z, \cdot) \frac{i}{4\pi} dw \wedge d\bar{w},$$

where dd_w^c , Δ_w are respectively the operator dd^c and the Laplacian in the w variable. The measure m^z has compact support in $L_z^v = \{z\} \times \mathbb{D}$ since u is pluriharmonic near $\partial_h \mathbb{B}$. In the following proposition, we identify measures in L_z^v and measures in \mathbb{B} with support in L_z^v . m^z is normalized (and so is dd^c) so that the potential of a horizontal line is $\log |w - w_0|$, and the mass of the corresponding slice measure is 1.

PROPOSITION 1.2.5 *The 0 dimensional current m^z is the slice of the current T over z with respect to the projection pr_1 . Also m^z equals the wedge product $T \wedge [L_z^v]$.*

PROOF : the existence of the wedge product $T \wedge [L_z^v]$ is ensured because $\text{Supp } T \cap L_z^v \subset \subset \mathbb{B}$, and \mathbb{B} is pseudoconvex ([Si2], [De1], [FS2]). In this case it is proved by G. Raby [Ra] that the slice measure $\langle T, pr_1, z \rangle$ exists and equals $T \wedge [L_z^v]$.

Let $v(z, w) = v_0(z)$, where v_0 is a smooth subharmonic function in \mathbb{D} , harmonic near $\partial\mathbb{D}$, we have

$$T \wedge dd^c v = dd^c u \wedge dd^c v = (\Delta_w u) \frac{i}{4\pi} dw \wedge d\bar{w} \wedge (\Delta_z v) \frac{i}{4\pi} dz \wedge d\bar{z}.$$

Now we let v_0^ε be the usual regularization of $v_0(z) = \log |z - z_0|$, so that $(i/4\pi)\Delta_z v_0^\varepsilon dz \wedge d\bar{z} \rightarrow \delta_{z_0}$ (the Dirac mass at z_0), and get $m^{z_0} = T \wedge [L_{z_0}^v]$. \square

PROPOSITION 1.2.6 *If T is a horizontal current, the slice mass $\|m^z\| = \|T \wedge [L_z^v]\|$ is independent of z . Furthermore if T^h and T^v are respectively horizontal and vertical positive closed currents of slice mass 1, then the wedge product $T^h \wedge T^v$ is a well defined probability measure with compact support in \mathbb{B} .*

Recall that we have normalized slice masses so that the slice mass of a horizontal line is 1. Currents of slice mass 1 will be called *normalized*. It is a classical result (see [Sl]) that the set of normalized horizontal current in \mathbb{B} is weakly compact.

PROOF : we recall that $m^z = dd_w^c u(z, w)$, where u is a potential of T ; $\text{Supp } T \subset \mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$, so u is pluriharmonic, hence smooth, near $\mathbb{D} \times \partial D_{1-\varepsilon}$. First assume u is smooth. If i is the natural embedding $L_z^v \rightarrow \mathbb{B}$, we have $i^* dd^c u = dd_w^c u$, so

$$\int_{L_z^v} dd_w^c u = \int_{L_z^v} dd^c u = \int_{\{z\} \times D_{1-\varepsilon}} dd^c u = \int_{\{z\} \times \partial D_{1-\varepsilon}} d^c u, \quad (1.2)$$

where the first equality is the definition of integrating the (1,1) form $dd^c u$ on L_z^v . Since u is pluriharmonic near $\mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$, this equation holds also, after regularization, for general u . As the form $d^c u$ is closed in a neighborhood of $\mathbb{D} \times \partial D_{1-\varepsilon}$, the integral $\int_{\{z\} \times \partial D_{1-\varepsilon}} d^c u$ does not depend on z since the cycles $\{z\} \times \partial D_{1-\varepsilon}$ are homologous as z varies.

More generally we prove that $\int T^h \wedge T^v$ only depends on the slice mass of T^h if T^v is fixed. Assume first T^v is smooth. Let u_1 and u_2 be potentials of two normalized horizontal currents $T_1 = dd^c u_1$ and $T_2 = dd^c u_2$, the form $d^c(u_1 - u_2)$ is closed near $\mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus D_{1-\varepsilon})$, and by equality of the slice masses, $\int_{\{z\} \times \partial D_{1-\varepsilon}} d^c(u_1 - u_2) = 0$. As $\mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus D_{1-\varepsilon}) \simeq S^1$, this means that $d^c(u_1 - u_2)$ is exact in $\mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus D_{1-\varepsilon})$. So

$$\int T_1 \wedge T^v - \int T_2 \wedge T^v = - \int_{\mathbb{D} \times \partial D_{1-\varepsilon}} d^c(u_1 - u_2) \wedge T^v = - \int_{\mathbb{D} \times \partial D_{1-\varepsilon}} d\alpha \wedge T^v = \int_{\partial \mathbb{D} \times \partial D_{1-\varepsilon}} \alpha T^v = 0$$

since T^v has vertical support.

Moreover for a general vertical positive closed T^v , the wedge product $T^h \wedge T^v$ is well defined and continuous under decreasing sequences, because $\text{Supp } T^h \cap \text{Supp } T^v \subset \subset \mathbb{B}$, and it has compact support in \mathbb{B} . Thus slightly reducing \mathbb{B} and using a standard regularization process gives the result.

By symmetry, we obtain that the mass of the measure $T^h \wedge T^v$ only depends on the slice masses of T^h and T^v . If $T^h = [L^h]$ (resp. $T^v = [L^v]$) is the current of integration over some horizontal (resp. vertical) line, $T^h \wedge T^v$ is a Dirac measure of mass 1. \square

For any horizontal submanifold V (defined in some neighborhood of \mathbb{B}), $pr_1|_V$ is a branched cover of degree d , and the number d is also the slice mass of $[V]$. The preceding proposition is

then a generalization of the well known fact that the number of intersection points (with multiplicity) between a horizontal curve and a vertical curve is the product of the corresponding projection degrees on $\mathbb{D} \times \{0\}$ and $\{0\} \times \mathbb{D}$. In the next definition, $f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{B}, f(x) \in \mathbb{B}\}$.

DEFINITION 1.2.7 *Let $f : N(\overline{\mathbb{B}}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ be a horizontal-like map. The degree of f is the degree of the branched covering $pr_1 \circ f : (f^{-1}\mathbb{B} \cap \mathbb{B}) \cap L^h \rightarrow \mathbb{D}$, where L^h is any horizontal line in \mathbb{B} .*

This definition agrees of course with the one previously discussed in prop 1.2.3. We remark that for Hénon-like maps, f and f^{-1} have the same degree. Let \mathcal{L} be the push forward graph transform operator for currents, normalized by the factor $1/d$, $\mathcal{L} = (1/d)\mathbf{1}_{\mathbb{B}}f_*$.

PROPOSITION 1.2.8 *If T is a normalized horizontal positive closed current, then so is $\mathcal{L}T$.*

Under the same hypothesis, the sequence of currents $(\mathcal{L}^n T)$ is also normalized, hence has locally bounded mass in \mathbb{B} . Extracting convergent subsequences of Cesaro means

$$\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \mathcal{L}^k T \rightharpoonup T^-$$

yields an invariant (unstable) current : $\mathcal{L}T^- = T^-$. In section 1.4 we will study convergence properties towards T^- (in particular T^- will be shown to be unique).

For Hénon-like maps, we may apply the same construction to f^{-1} , and get an unstable vertical current T^+ , invariant under the adjoint of \mathcal{L} ; $\mu = T^+ \wedge T^-$ is then an invariant measure. For horizontal-like maps this requires a little more work (see proposition 1.2.10).

PROOF OF PROPOSITION 1.2.8 : by definition of d , the result holds if $T =: T_0$ is the current of integration over some horizontal line. If T is any normalized horizontal current, let $\phi = T - T_0$. It suffices to prove that for any vertically supported closed (1,1) form ψ , $\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = 0$. By proposition 1.1.2, $\mathbf{1}_{\mathbb{B}}f^*\psi$ is a closed vertical form, hence $\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathbf{1}_{\mathbb{B}}f^*\psi \rangle = 0$ since for every vertical closed form ψ' , $\langle \phi, \psi' \rangle = 0$. \square

REMARK 1.2.9 We deliberately did not use the homological formalism of section 1.1, but the results just stated have a natural interpretation in terms of theorem 1.1.7. First, the exact homology sequence [Gre] yields $H_2(\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B}) \simeq H_1(\partial_v \mathbb{B}) \simeq \mathbb{C}$. Then using the pairing (1.1), one sees that $\int T^h \wedge T^v$ depends only on relative homology class $[T^h] \in H_2(\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B})$ (resp. $[T^v] \in H_2(\mathbb{B} \cup \partial_h \mathbb{B}, \partial_h \mathbb{B})$). Hence proposition 1.2.6 tells that the relative homology class of a horizontal current is given by its slice mass. Last, proposition 1.2.8 is a special case of theorem 1.1.7, and the dynamical degree of f is d .

Suppose f is a horizontal-like map of degree d in the unit bidisk. By propositions 1.1.4 and 1.1.2, we have a normalized pull back graph transform operator,

$$T \longmapsto {}^t\mathcal{L}T = \frac{1}{d}\mathbf{1}_{\mathbb{B}}f^*T.$$

We need to prove it is conveniently normalized. We will make an additional hypothesis on our horizontal-like maps, in order to get good duality properties for the graph transform

operators. Such an hypothesis is necessary due to the potential theoretic definition of ${}^t\mathcal{L}$. Recall that $f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{B}, f(x) \in \mathbb{B}\}$, and make the standing assumption that

$$f : f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})$$

is proper. Of course it is automatically satisfied for Hénon-like maps.

PROPOSITION 1.2.10 *Let $f : N(\overline{\mathbb{B}}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ be a horizontal-like map, such that*

$$f : \mathbb{B} \cap f^{-1}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})$$

is proper. Let T^h and T^v be respectively horizontal and vertical normalized currents, and ϕ be a test form in $\mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})$, then

$$\int_{\mathbb{B}} \phi \mathcal{L}T^h \wedge T^v = \int_{\mathbb{B}} (\phi \circ f) T^h \wedge {}^t\mathcal{L}T^v.$$

In particular, letting $\phi = 1$ in a neighborhood of $\text{Supp } \mathcal{L}T^h \cap \text{Supp } T^v$, we deduce from prop. 1.2.6 that ${}^t\mathcal{L}T^v$ is a normalized current. In the Hénon like case, the result can be slightly improved (see proposition 1.4.7).

PROOF : as integrals are compactly supported, taking a slightly smaller bidisk, we are able to regularize T^v . More precisely, with $T^v = dd^c u$, u_n is a sequence of psh functions, pluriharmonic near $\partial_v \mathbb{B}$ and decreasing to u . Then by definition of ${}^t\mathcal{L}$ (prop 1.1.2), ${}^t\mathcal{L}T^v = dd^c u_1$ in \mathbb{B} , with $u_1 - (u \circ f)/d = h$, h pluriharmonic in $f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$.

We infer

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \phi \mathcal{L}T^h \wedge T^v &= \int_{\mathbb{B}} u dd^c \phi \wedge \mathcal{L}T^h = \lim_n \int_{\mathbb{B}} u_n dd^c \phi \wedge \mathcal{L}T^h \\ &= \lim_n \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{d} f^*(u_n dd^c \phi) \wedge T^h = \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{d} (u \circ f) f^* dd^c \phi \wedge T^h \end{aligned}$$

where the third equality is the definition of \mathcal{L} acting on test forms. Because $f : \mathbb{B} \cap f^{-1}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})$ is proper, $f^* dd^c \phi$ is a form with compact support in $f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$, and the last integral equals

$$\int_{\mathbb{B}} u_1 dd^c(\phi \circ f) \wedge T^h + \int_{f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}} h dd^c(\phi \circ f) \wedge T^h = \int_{\mathbb{B}} (\phi \circ f) T^h \wedge {}^t\mathcal{L}T^v.$$

□

As ${}^t\mathcal{L}T^v$ is normalized, the sequence ${}^t\mathcal{L}^n T^v$ has locally bounded mass and taking convergent subsequences of Cesaro means as before yields an ${}^t\mathcal{L}$ -invariant current T^+ , with support in $\cap_n f^{-n}(\mathbb{B})$; by propositions 1.2.10 and 1.2.6 $\mu = T^+ \wedge T^-$ is an invariant probability measure. We sum up in a theorem what we have done so far.

THEOREM 1.2.11 *Let $f : N(\overline{\mathbb{B}}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ be a horizontal-like map of degree d , and \mathcal{L} and ${}^t\mathcal{L}$ be respectively the push forward and pull back graph transform operators for currents, normalized by the factor $1/d$.*

Then there exists a \mathcal{L} -invariant current T^- . If in addition, $f : \mathbb{B} \cap f^{-1}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})$ is proper, then there exists a ${}^t\mathcal{L}$ -invariant current T^+ , and $\mu = T^+ \wedge T^-$ is an invariant probability measure.

In the remaining sections of the article we will mainly be concerned with Hénon-like maps, for the sake of clarity, and study the ergodic properties of μ . Recall that the properness hypothesis is automatic in this case.

We end by proving the crucial fact that for Hénon-like maps the invariant currents have continuous potentials. We shall prove in section 1.4 that the stable and unstable invariant currents are unique, but of course the next theorem is *a priori* valid for any invariant currents. The theorem is an adaptation of a result of [DiS].

THEOREM 1.2.12 *Let f be a Hénon-like map in \mathbb{B} . The invariant currents T^+ and T^- have continuous potential. Moreover the potentials are Hölder continuous, of exponent $\log d / \log M$ for T^+ , where M dominates the derivatives of f on \mathbb{B} .*

LEMMA 1.2.13 $\text{Supp } T^+ \subset \partial K^+$

PROOF : indeed if ϕ is a test form with support in $\text{Int } K^+$, the pushforwards $f_*^n \phi$ are well defined for $n \geq 0$, and since the sequence (f^n) is a normal family in $\text{Int } K^+$, the sequence of test forms $(f_*^n \phi)$ has bounded coefficients. Thus

$$\langle T^+, \phi \rangle = \langle {}^t \mathcal{L}^n T^+, \phi \rangle = \langle T^+, \frac{1}{d^n} f_*^n \phi \rangle \rightarrow 0.$$

□

PROOF OF THE THEOREM : it is only necessary to deal with T^+ . Let G^+ be a potential of T^+ . We first prove G^+ is locally bounded. Let $\mathbb{B}_{-n} = \{x, f^j(x) \in \mathbb{B}, 0 \leq j \leq n\}$. In \mathbb{B}_{-1} , we have

$$G^+ - \frac{1}{d} G^+ \circ f = h$$

h being a pluriharmonic function. Slightly reducing \mathbb{B} if necessary, we may assume $|h| \leq C$ in \mathbb{B}_{-1} . More generally, iterating this equation and summing yields

$$G^+ - \frac{1}{d^k} G^+ \circ f^k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{d^j} h \circ f^j$$

in \mathbb{B}_{-n} . If $x \in \mathbb{B}_{-k-1} \setminus \mathbb{B}_{-k-2}$ then $f^k(x) \in \mathbb{B}_{-1} \setminus \mathbb{B}_{-2}$ and $G^+(f^k(x))$ is bounded from below, say by C also.

If $x \in \partial K^+$, then $x = \lim x_k$ with $x_k \in \mathbb{B}_{-k-1} \setminus \mathbb{B}_{-k-2}$, so

$$G^+(x_k) \geq \frac{-C}{d^k} - C \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{d^j} \geq -3C.$$

As G^+ is uppersemicontinuous, $G^+(x) \geq \overline{\lim} G^+(x_k) \geq -3C$, so G^+ is bounded on ∂K^+ . Moreover on ∂K^+ we have

$$G^+(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^j} h \circ f^j(x)$$

so by normal convergence G^+ is continuous on ∂K^+ . A classical potential theoretic argument (see [T] p.53) shows that G^+ is then continuous and bounded below by $-3C$ on each complex line. In particular, $G^+ \geq -3C$ on \mathbb{B} .

We prove global Hölder continuity, following [DiS] closely. Throughout the following lines, the symbol \lesssim means “ \leq , up to a constant independent of x and y ”. If $x, y \in \mathbb{B}_{-n}$, for every $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} |G^+(x) - G^+(y)| &= \left| \frac{G^+(f^k(x)) - G^+(f^k(y))}{d^k} - \sum_{j=0}^k \frac{h(f^j(x)) - h(f^j(y))}{d^j} \right| \\ &\lesssim \frac{1}{d^k} + \frac{M^k}{d^k} |x - y|, \end{aligned} \quad (*)$$

where M dominates the norm of df on \mathbb{B} . Let $\alpha = \log d / \log M$, and $N = \frac{-\alpha \log |x - y|}{\log d}$ so that $M^\alpha = d$, and $|x - y|^\alpha = 1/d^N$. Increasing M if necessary, we may assume $\alpha \leq 1$. If $n \geq N$, one puts $k = N$ in the inequality (*), and

$$|G^+(x) - G^+(y)| \lesssim \frac{1}{d^N} + \frac{1}{d^{N(1-\frac{1}{\alpha})}} |x - y| \lesssim |x - y|^\alpha.$$

Now suppose $n < N$ and $x \in \mathbb{B}_{-n} \setminus \mathbb{B}_{-n-1}$; we break the argument in two cases, regarding x and y are close with respect to their distance to K^+ , or not. Suppose first $|x - y| \geq \frac{1}{2}d(x, K^+)$. Remark that $f^n(x) \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{B}_{-1}$ so $f^n(x)$ is far from K^+ . For $x_0 \in K^+$ we have $1 \lesssim |f^n(x) - f^n(x_0)| \leq M^n |x - x_0|$, thus

$$d(x, K^+) \gtrsim \frac{1}{M^n}, \text{ i.e. } \frac{1}{d^n} = \frac{1}{M^{n\alpha}} \lesssim d(x, K^+)^\alpha.$$

Taking $k = n$ in (*), and using $M^n \leq M^N = 1/|x - y|$ yields

$$|G^+(x) - G^+(y)| \lesssim d(x, K^+)^\alpha (1 + M^N |x - y|) \lesssim d(x, K^+)^\alpha \lesssim |x - y|^\alpha.$$

Next, observe that if y satisfies $|x - y| = d(x, K^+)$, then $d(y, K^+) \leq 2|x - y|$, i.e. $|x - y| \geq \frac{1}{2}d(y, K^+)$, so the last result applies also in this case.

To conclude, suppose that $|x - y| < \frac{1}{2}d(x, K^+)$: the function

$$g : y \mapsto G^+(x) - G^+(y)$$

is pluriharmonic in the ball $B(x, d(x, K^+))$, and bounded by $cd(x, K^+)^\alpha$ on the sphere by the preceding observation. By the maximum principle the same is true on the whole ball and by the Poisson integral formula on complex lines there is a control $\lesssim d(x, K^+)^\alpha / d(x, K^+)$ on the derivatives of g on the ball of radius $d(x, K^+)/2$, so

$$|G^+(x) - G^+(y)| \lesssim |x - y| d(x, K^+)^{\alpha-1} \lesssim |x - y|^\alpha.$$

□

Birational-like maps. We want to generalize some classes of birational maps in \mathbb{P}^2 in the same way Hénon maps generalize to Hénon-like maps. Since we shall restrict ourselves to horizontal-like and Hénon-like maps in the remaining of the paper, we deliberately leave some details to the reader. The reader may skip this and the next paragraph as a first reading.

Let $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ be a birational map, with the property that the indeterminacy set $I(f^{-1})$ (resp. $I(f)$) lies in the basins of some attracting cycles of f (resp. f^{-1}). In this setting, f is algebraically stable and the Green currents T^+ and T^- have nice potentials near the nonwandering set of f (except of course at the periodic cycles attracting the indeterminacy sets), so it is possible to derive dynamical properties of the measure $T^+ \wedge T^-$ similar to those of Hénon maps (see e.g. [Gu2]; see also [DF] for an account on the dynamics of birational maps).

We want to show that in this context, the graph transform for currents may be applied, giving rise to new “birational-like” examples.

Let $(B_i)_{i=1}^q$ be a collection of small balls, such that $\cup_{i=1}^q B_i$ is a neighborhood of the cycles which attract $I(f^{-1})$, and such that $f(\cup_i B_i) \subset\subset \cup_i B_i$. There remains finitely many points in the orbit of $I(f^{-1})$, outside $\cup_i B_i$; consider small balls $(B_i)_{i=q+1}^r$ around these points such that $f(\cup_1^r B_i) \subset\subset \cup_1^r B_i$. We do the same operation for the backward orbit of $I(f)$ and get a family of balls $(B'_j)_{j=1}^s$ satisfying analogous properties with respect to f^{-1} . We assume all these balls are disjoint. Furthermore $f(\mathcal{C}(f) \setminus I(f)) \subset I(f^{-1})$ so if B'' is a small enough neighborhood of $\mathcal{C}(f)$, $f(B'' \setminus \cup_1^s B'_j) \subset\subset \cup_1^r B_i$.

Let

$$\Omega = \mathbb{P}^2 \setminus (\cup_i \overline{B_i} \cup_j \overline{B'_j} \cup \overline{B''}),$$

and define V_0 to be $\partial(\cup_1^r B_i)$, $V_1 = \partial(B'' \setminus \cup_1^s B'_j)$, $V = V_0 \cup V_1$, and W to be the complement of V in $\partial\Omega$. One checks easily that $f(V) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, and $f(\Omega) \cap \partial\Omega \subset V$, thus by propositions 1.1.1 and 1.1.4, forward and backward graph transforms for (1,1) currents are defined.

Since $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}(f)$ is a Stein manifold, it is possible to construct transcendental examples by perturbation. Write in coordinates $f = [f_1 : f_2 : f_3]$ and if $(h_i)_{1 \leq 3}$ are holomorphic functions in $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}(f)$, for ε small enough

$$f_\varepsilon = [f_1 + \varepsilon h_1 : f_2 + \varepsilon h_2 : f_3 + \varepsilon h_3]$$

is a well defined injective holomorphic map $\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2$ preserving the topological picture (Ω, V, W) .

The homology group $H_2(\Omega \cup V, V)$ may be somewhat complicated to evaluate, however, since the original birational f naturally preserves the line $H_2(\mathbb{P}^2) \leftrightarrow H_2(\Omega \cup V, V)$, also does f_ε , which is homotopic to f and the action of f_ε on the image $\text{Im } H_2(\mathbb{P}^2) \subset H_2(\Omega \cup V, V)$ is multiplication by d , the degree of f . Furthermore $\text{Im } H_2(\mathbb{P}^2) \subset H_2^+(\Omega \cup V, V)$. Let \mathcal{L}_ε be the graph transform operator, normalized by the factor $1/d$.

The rational convexity condition (C) of theorem 1.1.7 (see also remark 1.1.8) is true at points $x \in f^{-1}(\Omega) \cap \Omega$. Indeed we prove the following : if $x \in f^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ there exists an algebraic curve N such that $N \cap \partial\Omega \subset W$. Let $y = f(x) \in \Omega$ and L be any line through y avoiding $\cup_1^r B_i$, then $N = f^{-1}(L)$ avoids $\cup_1^r B_i$ and also B' since $f(B') \subset \cup_1^r B_i$. If ε is small enough,

$$f_\varepsilon^{-2}(\Omega) \cap \Omega \cap f_\varepsilon(\Omega) \subset f^{-1}(\Omega) \cap \Omega,$$

and S being a positive closed current in $\mathcal{C}(\Omega, V)$, such that $[S] \in \text{Im } H_2(\mathbb{P}^2)$ (this is the case if S is the restriction of a current of \mathbb{P}^2), the sequence of currents $\mathcal{L}_\varepsilon^n S$ has locally bounded mass in $f^{-2}(\Omega) \cap \Omega$, thus in Ω also. This allows us to construct an unstable current T_ε^- .

Let ${}^t\mathcal{L}_\varepsilon$ be the pull back graph transform operator, normalized by $1/d$. To construct a stable current T_ε^+ , as in the horizontal-like case, we need to check that ${}^t\mathcal{L}_\varepsilon$ is conveniently normalized. If ϕ_V and ϕ_W are positive closed (1,1) forms, respectively belonging to $\mathcal{C}(\Omega, V)$ and $\mathcal{C}(\Omega, W)$. We have

$$\langle \mathcal{L}_\varepsilon^n \phi_V, \phi_W \rangle = \langle \phi_V, {}^t\mathcal{L}_\varepsilon^n \phi_W \rangle.$$

We deduce from this equation that the sequence of currents $({}^t\mathcal{L}_\varepsilon^n \phi_W)$ has locally bounded mass in Ω .

Although we do not have an adapted pluripotential theory as in the horizontal-like case, the currents $T_\varepsilon^{+/-}$ can be used to produce invariant measures. Let $T \in \mathcal{C}(\Omega, V)$ be a smooth current, homologous to a complex line ("normalized"), and extract some subsequence n_j of the Cesaro mean of $\mathcal{L}^k T$, so that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \mathcal{L}_\varepsilon^k T = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T_\varepsilon^-.$$

Let T_ε^+ be a normalized ${}^t\mathcal{L}$ invariant current.

For all j , T_j is a smooth current, and $\mu_j = T_j \wedge T_\varepsilon^+$ is a probability measure, compactly supported in Ω . Extract a further subsequence $j_k =: j$ so that $\mu_j \rightharpoonup \mu$. We prove that μ is invariant. Let ϕ be a test function in Ω ,

$$\int \phi d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi T_j \wedge T_\varepsilon^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi T_j \wedge {}^t\mathcal{L} T_\varepsilon^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \mathcal{L}(\phi T_j) \wedge T_\varepsilon^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi \circ f^{-1} \mathcal{L} T_j \wedge T_\varepsilon^+.$$

Furthermore

$$\mathcal{L} T_j - T_j = \frac{1}{n_j} (\mathcal{L}^{n_j+1} T - T)$$

thus

$$(\mathcal{L} T_j - T_j) \wedge T_\varepsilon^+ = \frac{1}{n_j} (\mathcal{L}^{n_j+1} T \wedge T_\varepsilon^+ - T \wedge T_\varepsilon^+)$$

converges to zero as $j \rightarrow \infty$ since T is smooth. We deduce that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi \circ f^{-1} \mathcal{L} T_j \wedge T_\varepsilon^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi \circ f^{-1} T_j \wedge T_\varepsilon^+ = \int \phi \circ f^{-1} d\mu.$$

So μ is an invariant measure.

Ruelle-Sullivan type currents. Dynamical currents were first introduced by D. Ruelle and D. Sullivan [RS1] as the homological counterpart of the stable and unstable laminations associated to a uniformly hyperbolic dynamical system. We sketch here how their construction can be linked to ours.

Let Ω be an open set in \mathbb{C}^2 , and $f : N(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ be a holomorphic diffeomorphism such that $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Omega)$ is a compact hyperbolic set. Ω is said to be an *isolating neighborhood* for Λ . Let $W^{s/u}(\Lambda) = \bigcap_{n \geq 0} f^{(-/+)n}(\Omega)$ be respectively the stable and unstable sets of Λ . If Ω is small enough, $W^{s/u}$ have the structure of a lamination by complex disks, and it is proved in [RS1] that these laminations are transversely measured, thus giving rise to foliation currents (uniformly laminar currents) T^s and T^u satisfying invariance relations with respect to f , namely $\mathbf{1}_\Omega f^* T^s = \lambda T^s$, where $\log \lambda$ is the topological entropy of $f|_\Lambda$.

As $\Lambda \subset\subset \Omega$, $W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) \cap \partial\Omega = \emptyset$, hence for some N , $\overline{W_N^s}(\Lambda) \cap \overline{W_N^u}(\Lambda) \cap \partial\Omega = \emptyset$, where $W_N^s(\Lambda) = \bigcap_{0 \leq n \leq N} f^{-n}(\Omega)$ (for small enough Ω , presumably $N = 1$ will do). The hypotheses of proposition 1.1.1 are satisfied, replacing f by $g = f^N$, with V being a neighborhood of $W_N^u(\Lambda) \cap \partial\Omega$, and similarly for g^{-1} , with W some neighborhood of $W_N^s(\Lambda) \cap \partial\Omega$. So for any close enough perturbation of g , possibly non hyperbolic, the graph transform for currents may be applied; moreover the existence of the Ruelle-Sullivan currents shows that the spaces $\mathcal{C}(\Omega, V)$ and $\mathcal{C}(\Omega, W)$ are non empty and satisfy the convexity condition of theorem 1.1.7.

The philosophy behind this example is that in the complex setting, some (nonuniform) hyperbolicity may persist after perturbation, if some topological conditions are fulfilled, even if uniform hyperbolicity is lost. This is one of the motivations for our study of Hénon-like maps.

1.3. Topological entropy

In several variables holomorphic dynamics, topological entropy has so far most often been calculated using volume growth of iterated submanifolds. More specifically, Y. Yomdin's Theorem [Y] (see also [Gro]) gives a lower bound, and an argument by M. Gromov [Gro] is used to obtain the reverse inequality.

In the situation of horizontal like maps, we follow the same scheme, however, whereas Yomdin's Theorem still applies, with some slight adjustments, Gromov's argument does not seem to adapt so easily. We use a theorem of S. Newhouse [N1] instead, which relies heavily on Pesin Theory.

THEOREM 1.3.1 *Let f be a horizontal-like map of degree d in \mathbb{B} . The topological entropy of f is $\log d$.*

STEP 1. $h_{top}(f) \geq \log d$.

The only difficulty in adapting Yomdin's Theorem is that we do not deal with a globally defined dynamical system on a compact manifold. We use some arguments of the corresponding proof of J. Smillie [Sm] for Hénon maps. For references on topological entropy see e.g. the book by C. Robinson [Ro].

First, the computation of topological entropy only makes sense on $K^+ = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\mathbb{B}) = \bigcap_{n \geq 0} \mathbb{B}_{-n}$, where \mathbb{B}_{-n} is inductively defined to be the set of points in \mathbb{B} whose n first iterates remain in \mathbb{B} . We define the (n, ε) Bowen ball in X around x to be

$$B_n(x, \varepsilon) = \{y \in X, d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon, 0 \leq j \leq n\}$$

where d is the usual distance, and $M(n, \varepsilon, X)$ to be the minimal number of (n, ε) Bowen balls covering X (minimal cardinality of a (n, ε) spanning set in X). The topological entropy of $f|_{K^+}$ is

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M(n, \varepsilon, K^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M(n, \varepsilon, K),$$

since the nonwandering set of $f|_{K^+}$ is contained in K .

Smillie [Sm] proves that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M(n, \varepsilon, K^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M(n, \varepsilon, \mathbb{B}_{-n}). \quad (1.3)$$

Indeed, first note that the inequality \leq is clear, and let $\check{\mathbb{B}}$ be the compact topological space $\check{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}/\partial_v \mathbb{B}$ (i.e. we identify $\partial_v \mathbb{B}$ to a point p), endowed with the distance

$$\begin{aligned} \check{d}(\pi(x), \pi(y)) &= \min \{d(x, y), d(x, \partial_v \mathbb{B}) + d(y, \partial_v \mathbb{B})\} \\ \check{d}(\pi(x), p) &= d(x, \partial_v \mathbb{B}) \end{aligned}$$

where $\pi : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \check{\mathbb{B}}$ is the natural map, and $p = \pi(\partial_v \mathbb{B})$. We define $\check{f} : \check{\mathbb{B}} \rightarrow \check{\mathbb{B}}$ as

$$\begin{aligned}\check{f}(\pi(x)) &= \pi(f(x)) \text{ if } f(x) \in \mathbb{B} \\ \check{f}(\pi(x)) &= p \text{ if } f(x) \notin \mathbb{B}\end{aligned}$$

in particular $\check{f}(p) = p$. \check{f} is a continuous map, and with an obvious abuse of notation, $\check{f}|_{\pi(K^+)} = f|_{K^+}$. Furthermore, the distances d and \check{d} coincide in some neighborhood of K^+ so $h_{top}(f|_{K^+}) = h_{top}(\check{f}|_{\pi(K^+)})$, and the nonwandering set of \check{f} is $\pi(K^+) \cup \{p\}$ so

$$h_{top}(\check{f}) = \max(h_{top}(\check{f}|_{\pi(K^+)}), h_{top}(\check{f}|_{\{p\}})) = h_{top}(\check{f}|_{\pi(K^+)}) = h_{top}(f|_{K^+}).$$

On the other hand, since d and \check{d} coincide near K^+ , and π is 1-1 there,

$$h_{top}(\check{f}) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M(n, \varepsilon, \mathbb{B}_{-n})$$

establishing the claim.

Let $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$ be a slightly smaller bidisk, such that the corresponding maximal invariant set K remains unchanged. Of course we may replace \mathbb{B}_{-n} by \mathbb{B}'_{-n} in the foregoing discussion, with the advantage that points in \mathbb{B}'_{-n} are at positive distance from $\partial \mathbb{B}$. We prove

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M(n, \varepsilon, \mathbb{B}'_{-n}) \geq \log d.$$

The results of the preceding section show that the volume growth of a horizontal line L is $\log d$, that is

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Vol}(f^n(L \cap \mathbb{B}'_{-n})) = \log d.$$

Let $F(n, \varepsilon)$ be a (n, ε) spanning set in \mathbb{B}'_{-n} of minimal cardinality $M(n, \varepsilon, \mathbb{B}'_{-n})$, and $v^0(n, \varepsilon)$ be the maximal volume of $f^n(L \cap \mathbb{B}'_{-n} \cap B_n(x, \varepsilon))$ for $x \in F(n, \varepsilon)$, so that

$$\text{Vol}(f^n(L \cap \mathbb{B}'_{-n})) \leq M(n, \varepsilon, \mathbb{B}'_{-n}) v^0(n, \varepsilon).$$

The main Theorem of [Y] asserts that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log v^0(n, \varepsilon) = 0.$$

To check that it also holds in our setting, just remark that points in \mathbb{B}'_{-n} are at positive distance δ from $\partial \mathbb{B}$, and that there is a uniform bound M on the norm of the differential of f on \mathbb{B} , so that the proof of [Y] pp. 290-292 applies without modification.

STEP 2. $h_{top}(f) \leq \log d$.

We use Newhouse's Theorem, [N1], Theorem 2. A family \mathcal{A} of holomorphic disks $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ is *ample* over K if for some constant c the following is true :

- i. for $\gamma \in \mathcal{A}$, $\|\gamma'(0)\| \geq c^{-1}$;
- ii. for $\gamma \in \mathcal{A}$, $\|\gamma'\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq c$;
- iii. the set of tangent lines to γ at $\gamma(0)$, $\gamma \in \mathcal{A}$ is dense in $G(K)$, where $G(K)$ is the set of lines through points in K , endowed with the natural topology.

Let

$$\text{lov}(\mathcal{A}) = \sup_{\gamma \in \mathcal{A}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Vol}(f^n(\gamma \cap \mathbb{B}_{-n})),$$

Newhouse's Theorem¹ asserts that if \mathcal{A} is ample over K , then $h_{\text{top}}(f|_K) \leq \text{lov}(\mathcal{A})$. Of course, if \mathcal{A} is made up of restrictions of horizontally supported disks (not necessarily graphs) then $\text{lov}(\mathcal{A}) \leq \log d$. We prove there exists such an ample family.

Let $x = (x_1, x_2) \in K$, fix $a < d(K, \partial\mathbb{B})/2$, and $v = (v_1, v_2) \in T_x\mathbb{C}^2$, with $\|v\|$ small compared to $d(K, \partial\mathbb{B})$. We construct a disk through x , tangent to v at x , contained in a horizontally supported disk in \mathbb{B} . There exists a constant c (which has the same order of magnitude as $d(K, \partial\mathbb{B})$) such that if $|v_2| \leq c|v_1|$, the disk $t \mapsto (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2)$, restriction of a horizontally supported line, is convenient. If $|v_2| > c|v_1|$, we take the disk

$$\mathbb{D} \ni t \mapsto (at^2 + v_1t + x_1, v_2t + x_2) \in \mathbb{B}.$$

It is contained in the curve of equation

$$\frac{a}{v_2^2}(Y - x_2)^2 + \frac{v_1}{v_2}(Y - x_2) + x_1 = X$$

whose restriction to \mathbb{B} is horizontally supported if $\|v\|$ is chosen to be small enough.

¹We will sketch a proof of Newhouse's theorem in 1.5.2 below.

1.4. Mixing

In this section we study the ergodic properties of the measure $\mu = T^+ \wedge T^-$ for a Hénon-like map. As in the case of algebraic mappings, these are closely related to convergence properties of the sequences of currents $(\mathcal{L}^n T)_{n \geq 0}$. In the remaining part of this section, we fix a Hénon-like map f of degree d in \mathbb{B} , and denote by \mathcal{C}_1 the set of horizontal positive closed normalized (i.e. of slice mass 1) currents in \mathbb{B} .

The following is the main result of this section. Some crucial arguments (use of linear perturbations, L^p estimates) were suggested to me by Thierry Bousch.

THEOREM 1.4.1 *Let T be a horizontal positive closed normalized current, $T \in \mathcal{C}_1$, then the sequence of currents $(\mathcal{L}^n T)_n$ converges to the unique \mathcal{L} -invariant current $T^- \in \mathcal{C}_1$.*

The general scheme of the proof is to adapt the convexity arguments of Dinh-Sibony [DiS] to our context. We briefly recall their idea, in the classical polynomial-like setting [DH]. Let $h : U \rightarrow V$ be a polynomial-like map of degree k in the plane, $U \subset\subset V$. Then there exists a measure μ , which describes the asymptotic distribution of most preimages of points in V (the Lyubich measure). By duality, it suffices to establish the following : for φ a continuous function with compact support in V , the sequence of functions

$$\varphi_{-n} = \frac{1}{k^n} \sum_{f^n(y)=x} \varphi(y)$$

converges to some constant $c(\varphi)$. The idea of [DiS] is to prove it first for φ subharmonic in a neighborhood of U , using a compactness argument for sequences of subharmonic functions (the Hartogs lemma) and the Maximum principle (to prove cluster values are constant functions).

Dealing now with our Hénon-like maps, we have to produce meaningful sequences of subharmonic functions. Due to normalization problems, it seems difficult to work with potentials of currents in \mathcal{C}_1 so we follow a different way (see lemma 1.4.2 below). A good reference for properties of (pluri-) subharmonic functions is the book by Hörmander [Hö].

PROOF : We need to show that for any test (1,1)-form φ , the sequence $\langle \mathcal{L}^n T, \varphi \rangle$ converges to some limit independent of T . It suffices to take as φ a vertically supported p.s.h. form, that is such that $dd^c \varphi \geq 0$. Indeed, any test form is the difference of two vertical p.s.h. forms : we need only check that for every compact set K in \mathbb{B} there exists a vertical p.s.h φ , with $dd^c \varphi > 0$ near K . For this, let $x_0 = (z_0, w_0) \in \mathbb{B}$, let $\chi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ be a cutoff function, $\chi = 1$ near z_0 , and $\alpha(w)$ be a smooth subharmonic function in \mathbb{D} . Then

$$\varphi_0 = \chi(z)\alpha(w)idz \wedge d\bar{z}$$

is a vertical p.s.h. form ; replacing z by $z + \varepsilon w$ for ε small enough yields another such form φ_1 , and $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ is a vertical p.s.h. form, $dd^c \varphi > 0$ near x_0 .

By now we fix a vertically supported smooth (1,1) form φ , $dd^c\varphi \geq 0$. For $\theta \in \mathbb{D}$ let i_θ be the linear contraction

$$i_\theta : (z, w) \mapsto (z, \theta w),$$

and for $T \in \mathcal{C}_1$, let $T_\theta = (i_\theta)_*T \in \mathcal{C}_1$.

LEMMA 1.4.2 *Let $\Psi_T(\theta) = \langle T_\theta, \varphi \rangle$. Then Ψ_T is a continuous subharmonic function in \mathbb{D} , $\Psi_T(0) = \langle [w=0], \varphi \rangle$, and for $p > 1$, $\Delta\Psi_T$ is a L^p function, with*

$$\|\Delta\Psi_T\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C \|dd^c\varphi\|_{L^p(\mathbb{B})}, \quad (1.4)$$

C being a constant independent of T and φ .

PROOF OF THE LEMMA : We first assume T is smooth. We view T as a current in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ so that $T = dd^c v$, v a plurisubharmonic function in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, pluriharmonic for $|w| > 1 - \varepsilon$. Fix $\theta \neq 0$, $(z, w) \mapsto v(z, \frac{w}{\theta})$ is a potential of T_θ . Let $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{B})$ be a cutoff function, $\chi = 1$ near $D_{1-\varepsilon}^2 \supset \text{Supp}(T) \cap \text{Supp}(\varphi)$. For $\theta \neq 0$, we have

$$\Psi_T(\theta) = \langle T_\theta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{B}} T_\theta \wedge \chi\varphi = \int_{\mathbb{B}} v(z, \frac{w}{\theta}) dd^c(\chi\varphi).$$

We compute the Laplacian, in the θ variable, of the last expression, for $\theta \neq 0$

$$\Delta_\theta \Psi_T = \int_{\mathbb{B}} \frac{|w|^2}{|\theta|^4} (\Delta_w v)(z, \frac{w}{\theta}) dd^c(\chi\varphi),$$

moreover if $x \in \text{Supp} d\chi$, either $\varphi = 0$ near x or $|w| > 1 - \varepsilon$, thus v is pluriharmonic near $i_\theta^{-1}(x)$, so

$$\Delta_\theta \Psi_T = \int_{\mathbb{B}} \frac{|w|^2}{|\theta|^4} (\Delta_w v)(z, \frac{w}{\theta}) \chi dd^c\varphi \geq 0.$$

This means that Ψ_T is subharmonic in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. On the other hand, since $\theta \mapsto i_\theta^*\varphi$ is smooth, $\Psi_T(\theta) = \langle T, i_\theta^*\varphi \rangle$ is continuous (here we do not use the smoothness of T) thus globally subharmonic in \mathbb{D} . Remark that the modulus of continuity of Ψ_T depends on the derivatives of φ but not on $T \in \mathcal{C}_1$. For $\theta = 0$,

$$i_0^*\varphi = \varphi_{z,\bar{z}}(z, 0) idz \wedge d\bar{z}$$

and

$$\begin{aligned} \langle T, i_0^*\varphi \rangle &= \int_{\mathbb{B}} T \wedge \varphi_{z,\bar{z}}(z, 0) idz \wedge d\bar{z} = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \varphi_{z,\bar{z}}(z, 0) dm^z(\zeta) \right) idz \wedge d\bar{z} \\ &= \int_{\mathbb{D}} \varphi_{z,\bar{z}}(z, 0) idz \wedge d\bar{z} = \langle [w=0], \varphi \rangle \end{aligned}$$

where the second equality is the Slicing Formula [Fe], [Ra] (recall that for every z , m^z has mass 1).

To prove the L^p estimate we write

$$dd^c\varphi = \xi(z, w) \frac{i}{2\pi} dz \wedge d\bar{z} \wedge \frac{i}{2\pi} dw \wedge d\bar{w}$$

($\frac{i}{2\pi}dz \wedge d\bar{z}$ is the normalized Lebesgue measure λ in \mathbb{D}), and

$$\Delta_\theta \Psi_T = \int_{\mathbb{B}} \frac{|w|^2}{|\theta|^4} (\Delta_w v)(z, \frac{w}{\theta}) \chi \xi \, d\lambda(z) d\lambda(w) = \int_{\mathbb{B}} |w'|^2 (\Delta_w v)(z, w') \chi \xi(z, \theta w') d\lambda(z) d\lambda(w')$$

by the change of variables $w = \theta w'$ (the domain of integration should be $i_\theta^{-1}\mathbb{B}$, however $\Delta_w v$ has support in \mathbb{B}). Furthermore, since T is normalized, $\frac{1}{2}(\Delta_w v)(z, w) d\lambda(w)$ is a probability measure on $\{z\} \times \mathbb{D}$ so by Jensen's inequality

$$\left| \int_{\mathbb{B}} |w|^2 (\Delta_w v)(z, w) \chi \xi(z, \theta w) d\lambda(z) d\lambda(w) \right|^p \leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{B}} \left| |w|^2 \chi \xi(z, \theta w) \right|^p (\Delta_w v)(z, w) d\lambda(z) d\lambda(w);$$

we integrate with respect to the variable θ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |\Delta_\theta \Psi_T|^p d\lambda(\theta) &= 2^{p-1} \int_{\mathbb{B}} |w|^{2p} \left(\int_{\mathbb{D}} |\chi \xi(z, \theta w)|^p d\lambda(\theta) \right) \Delta_w v \, d\lambda(z) d\lambda(w) \\ &= 2^{p-1} \int_{\mathbb{B}} |w|^{2p-2} \left(\int_{D(0, |w|)} |\chi \xi(z, \theta')|^p d\lambda(\theta') \right) \Delta_w v \, d\lambda(z) d\lambda(w) \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{B}} |w|^{2p-2} \|\chi \xi\|_{L^p(\{z\} \times \mathbb{D})}^p \Delta_w v \, d\lambda(z) d\lambda(w); \end{aligned}$$

and $\int_{\{z\} \times \mathbb{D}} \frac{1}{2} |w|^{2p-2} \Delta_w v d\lambda(w) \leq 1$, so if the cutoff function χ is such that $\chi \leq 1$,

$$\int_{\mathbb{D}} |\Delta_\theta \Psi_T|^p d\lambda(\theta) \leq 2^p \|\xi\|_{L^p(\mathbb{B})}^p$$

which concludes the proof in the case T is smooth.

For general T , we use a regularization process $T_\varepsilon \rightarrow T$ and get that Ψ_T is subharmonic : we already know it is continuous and the family $\Psi_{T_\varepsilon}(\theta)$ converges pointwise as $\varepsilon \rightarrow 0$. Since the L^p bound on $\Delta \Psi_{T_\varepsilon}$ does not depend on T_ε , weak local compactness of L^p spaces shows that $\Delta \Psi_T$ is in L^p . \square

We continue with the proof of the theorem. For $n \geq 1$, let $\Psi_T^n(\theta) = \langle \mathcal{L}^n(T_\theta), \varphi \rangle$. The sequence $(\Psi_T^n(\theta))_n$ is a bounded sequence of continuous subharmonic functions, since the sequence of currents $(\mathcal{L}^n(T_\theta))_n$ has bounded mass (note that for $n \geq 1$ the currents $\mathcal{L}^n(T_\theta)$ have support in $\mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$). Let

$$\Psi^n(\theta) = \sup \{ \Psi_T^n(\theta), T \in \mathcal{C}_1 \}.$$

We claim that Ψ^n is a continuous radial subharmonic function in \mathbb{D} .

Indeed, $n \geq 1$ being fixed, the family $\{ \Psi_T^n(\theta), T \in \mathcal{C}_1 \}$ is a bounded family of subharmonic functions, so the upper semi continuous regularization $(\Psi^n)^*$ is subharmonic ; moreover it is clear that it only depends on $|\theta|$ since \mathcal{C}_1 is invariant under the rotations i_α , $|\alpha| = 1$ (in particular this proves that Ψ^n is continuous outside 0, as a convex function of $\log |z|$). For $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{D}$,

$$|\Psi_T^n(\theta_1) - \Psi_T^n(\theta_2)| = |\langle T, i_{\theta_1}^*(\mathcal{L}^n \varphi) - i_{\theta_2}^*(\mathcal{L}^n \varphi) \rangle| \leq C |\theta_1 - \theta_2|$$

where C depends on n and the derivatives of φ but not on $T \in \mathcal{C}_1$, so the family $\{\Psi_T^n(\theta), T \in \mathcal{C}_1\}$ is equicontinuous, establishing the claim.

Next, for $|\theta_0| < 1$ so close to 1 that $i_{\theta_0}(\mathbb{B}) \supset f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$, we have

$$\{\mathcal{L}T, T \in \mathcal{C}_1\} \subset \{(i_{\theta_0})_*T, T \in \mathcal{C}_1\}$$

so for $n \geq 0$

$$\Psi^{n+1}(1) \leq \Psi^n(\theta_0), \quad (1.5)$$

more generally for every $\theta \in \mathbb{D}$, $\Psi^{n+1}(\theta) \leq \Psi^n(\theta_0)$. This means that the sequence $(\Psi^n)_n$ decreases near $\partial\mathbb{D}$ to some $\Psi(\theta)$. By Hartogs' Lemma, some subsequence converges in L^1_{loc} to a subharmonic function in \mathbb{D} which we still denote by Ψ . By lemma 1.4.3 hereafter, the sequence $(\Psi^n)_n$ converges uniformly on compact sets to Ψ , and (1.5) implies $\Psi(1) \leq \Psi(\theta_0)$, so the Maximum Principle asserts then that Ψ is a constant $c(\varphi)$.

Let $T \in \mathcal{C}_1$ we have

$$\forall \theta \in \mathbb{D}, \Psi_T^n(\theta) \leq \Psi^n(\theta) \rightarrow c(\varphi) \text{ and } \Psi_T^n(0) = \Psi^n(0) = \langle \mathcal{L}^n[w=0], \varphi \rangle \rightarrow c(\varphi) \text{ also.}$$

Thus by equicontinuity, the Hartogs' Lemma and the Maximum Principle, $\Psi_T^n(\theta)$ converges uniformly on compact sets to $c(\varphi)$, which completes the proof of theorem 1.4.1. \square

LEMMA 1.4.3 *The families $\{\Psi_T^n, T \in \mathcal{C}_1, n \geq 0\}$ and $\{\Psi^n, n \geq 0\}$ are equicontinuous on compact subsets of \mathbb{D} .*

PROOF : it suffices to prove the first statement. We already know that for fixed $n \geq 1$, (Ψ_T^n) is equicontinuous with respect to T , and uniformly bounded as n, T vary. We use the L^p estimate (1.4) on the Laplacian and the following fact to prove $(\Psi_T^n)_n$ is equicontinuous.

FACT. *If (w_α) is a bounded family of subharmonic functions in \mathbb{D} , such that $\Delta w_\alpha \in L^p$ ($p > 1$), and $\|\Delta w_\alpha\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C$, then (w_α) is locally equicontinuous.*

So it only remains to bound the L^p norm of $\Delta\Psi_T^n$, for some $p > 1$. The estimate (1.4) of lemma 1.4.2 yields

$$\|\Delta\Psi_T^n\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C \|\mathcal{L}^n(dd^c\varphi)\|_{L^p(\mathbb{B})}.$$

Clearly, for $p = 1$

$$\|\mathcal{L}(dd^c\varphi)\|_{L^1(\mathbb{B})} = \left\| \frac{1}{d} \mathbf{1}_{\mathbb{B}} f^* dd^c\varphi \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \leq \frac{1}{d} \|dd^c\varphi\|_{L^1(\mathbb{B})},$$

this is because the action f^* , followed by restriction to \mathbb{B} do not increase the mass of measures ((2,2) forms). For $p > 1$, let

$$\alpha = \xi(z, w) \frac{i}{2\pi} dz \wedge d\bar{z} \wedge \frac{i}{2\pi} dw \wedge d\bar{w} = \xi \cdot \omega$$

be any (2,2) form. In coordinates, $f^*\alpha$ writes as $f^*\alpha = |\text{Jac } f|^2 (\xi \circ f)\omega$, where Jac is the Jacobian determinant. We infer

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}\alpha\|_{L^p(\mathbb{B})}^p &= \int_{\mathbb{B} \cap f^{-1}(\mathbb{B})} \frac{|\text{Jac } f|^{2p} |\xi \circ f|^p}{d^p} = \frac{1}{d^p} \int_{\mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})} |(\text{Jac } f) \circ f^{-1}|^{2p-2} |\xi|^p \\ &\leq \frac{1}{d^p} \int_{\mathbb{B}} |(\text{Jac } f) \circ f^{-1}|^{2p-2} |\xi|^p, \end{aligned}$$

where the second equality is the change of variables formula, and for p close enough to 1 (p depends on the Jacobian of f but not on α), the last integral is close to $\frac{1}{d^p} \|\alpha\|_{L^p(\mathbb{B})}^p$. \square

REMARK 1.4.4 We did not prove uniform convergence of $\langle \mathcal{L}^n T, \varphi \rangle$ with respect to T , for fixed φ . However, we have a weaker form of uniform convergence : φ being a fixed vertical p.s.h. form, there is a sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0$, such that for every $T \in \mathcal{C}_1$, $\text{Supp } T \subset \mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$

$$\langle \mathcal{L}^n T, \varphi \rangle \leq \langle T^-, \varphi \rangle + \varepsilon_n.$$

This follows from uniform convergence of Ψ^n on compacts in \mathbb{D} . It would be interesting to know whether uniform convergence indeed holds.

REMARK 1.4.5 Unlike in the case of Hénon maps, $T^{+/-}$ here need not be extremal currents in general : for a hyperbolic Hénon map, constructed by perturbing a hyperbolic polynomial in \mathbb{C} and rescaled so that it is Hénon-like in \mathbb{B} , so $K \subset \mathbb{B}$, as in [FS1], $K^+ \cap \mathbb{B}$ is a Cantor set of vertical lines. T^+ is then a uniformly laminar vertical current, by no means extremal.

REMARK 1.4.6 The proof needs injectivity only in the proof of lemma 1.4.3, when estimating the L^p norm of ${}^t \mathcal{L} \alpha$. If f is a horizontal like map such that $f : f^{-1}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} \cap f(\mathbb{B})$ is proper, so that its topological degree is defined, the estimate is multiplied by a factor d_{top} . So if $d_{top} < d$, the convergence theorem for pushing forward currents also holds.

The next step towards ergodicity of μ is to prove some convergence results for sequences of non closed currents. This approach was initiated by [BS3]. In our case, there are some minor additional assumptions due to the fact that, besides continuity of the potentials of our invariant currents, we have no information about the convergence of the sequences of potentials.

We will consider currents of the form

$$\psi S, \quad S \text{ a positive current in } \mathbb{B} \text{ and } \psi \text{ a } C^\infty \text{ function, with } \text{Supp } \psi \cap \text{Supp } dS \cap \mathbb{B} = \emptyset \quad (*)$$

Note in particular that if S is closed in \mathbb{B} , there is no compact support assumption on ψ . We say that a current $T = \psi S$ of the form (*) is *horizontal* (resp. *vertical*) if S is horizontally (resp. vertically) supported current.

We first slightly refine proposition 1.2.10, for Hénon-like maps.

PROPOSITION 1.4.7 *Let $T^h = \psi S^h$, $T^v = \phi S^v$ be respectively a horizontal and a vertical current of the form (*) and assume*

- i. either S^h has local continuous potential near $\text{Supp } \psi$;*
- ii. or S^h and S^v are closed in \mathbb{B} .*

then

$$\int \mathcal{L} T^h \wedge T^v = \int T^h \wedge {}^t \mathcal{L} T^v. \quad (1.6)$$

PROOF : If S^v is smooth, equation (1.6) is the definition of the graph transform operator \mathcal{L} . Moreover $\mathcal{L}(\psi S) = (\psi \circ f^{-1}) \mathcal{L} S$: indeed if $x \in \text{Supp } \mathcal{L} S$, then $x \in f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$ so f^{-1} is well defined near x , and the result follows by duality. Proposition 1.2.10 then implies (1.6) in the case *ii.*

For the case *i.*, note that using a partition of unity makes the result local near a point x of $\text{Supp } \mathcal{L} T^h \cap \text{Supp } T^v$. Since $\mathcal{L} T^h$ has continuous potential near x , (1.6) is stable under regularization of S^v , and the result follows from the smooth case. \square

PROPOSITION 1.4.8 *Let ψS be a horizontal current of the form (*). Assume further*

- i. either S has local continuous potential near $\text{Supp } \psi$;*
- ii. or S is closed in \mathbb{B} .*

Then the sequences of currents $\partial \mathcal{L}^n(\psi S)$ and $i\partial\bar{\partial} \mathcal{L}^n(\psi S)$ converge to zero in the mass norm on compact subsets of \mathbb{B} .

The proof is a now classical application of the Cauchy-Schwartz inequality [BS3], [Si1].

PROOF : We first check $\partial(\mathcal{L}(\psi S)) = \mathcal{L}(\partial(\psi S))$: by duality, this comes down to proving that $\partial({}^t \mathcal{L}\phi) = {}^t \mathcal{L}(\partial\phi)$ for a test form ϕ , which is obvious. By the assumption (*) on ψ and S , $\partial(\psi S) = \partial\psi \wedge S$. Let θ be a test form of bidegree (0,1), we have

$$\begin{aligned} \left| \int \partial \mathcal{L}^n(\psi S) \wedge \theta \right| &= \left| \int \mathcal{L}^n(\partial\psi \wedge S) \wedge \theta \right| = \left| \int \partial\psi \wedge S \wedge {}^t \mathcal{L}^n \theta \right| \\ &\leq \left| \int S \wedge i\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int S \wedge i {}^t \mathcal{L}^n \theta \wedge \bar{{}^t \mathcal{L}^n \theta} \right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{d^{n/2}} \left| \int S \wedge i\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int \mathcal{L}^n S \wedge i\theta \wedge \bar{\theta} \right|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

It remains to bound the mass of $\mathcal{L}^n S$ for $n \geq 0$. If S is closed this is obvious. The proof in the other case goes as follows : let x in $\text{Supp } \psi \cap \text{Supp } S$ and χ be a nonnegative test function, $\chi = 1$ near x , so that $\chi S = \chi dd^c u$, u a continuous plurisubharmonic function. Since χS is a positive horizontal current, its mass can be estimated using a normalized vertical smooth positive closed form ϕ the following way :

$$\int \mathcal{L}^n(\chi S) \wedge \phi = \int \chi dd^c u \wedge {}^t \mathcal{L}^n \phi = \int u dd^c \chi \wedge {}^t \mathcal{L}^n \phi$$

and the last term converges to $\int u dd^c \chi \wedge T^+$ as $u dd^c \chi$ has continuous coefficients. In particular the sequence $(\int \mathcal{L}^n(\chi S) \wedge \phi)$ is bounded.

Let θ be a test function. We have

$$\int i\partial\bar{\partial}(\mathcal{L}^n(\psi S))\theta = \int \theta \mathcal{L}^n(i\partial\bar{\partial}\psi \wedge S) = \int \mathbf{1}_{f^{-n}\mathbb{B} \cap \mathbb{B}} \frac{\theta \circ f^n}{d^n} i\partial\bar{\partial}\psi \wedge S,$$

so $i\partial\bar{\partial}(\mathcal{L}^n(\psi S))$ converges to zero in mass norm. \square

REMARK 1.4.9 For a general current ψS of the form (*), due to the form of theorem 1.4.1, we do not know whether $\mathcal{L}^n(\psi S)$ has locally bounded mass.

We state the second main convergence result for sequences of pushed forward currents. Though slightly weaker than the corresponding one for Hénon maps, it allows us to prove μ is mixing.

THEOREM 1.4.10 *Let ψS be a positive horizontal current of the form (*), such that S is closed, and has continuous potential. Then the sequence of currents $\mathcal{L}^n(\psi S)$ converges to*

$$\left(\int \psi S \wedge T^+ \right) T^-.$$

COROLLARY 1.4.11 *The measure $\mu = T^+ \wedge T^-$ is mixing.*

PROOF OF THE THEOREM : Let \mathcal{S} be the set of cluster values of the sequence $\mathcal{L}^n(\psi S)$; we want \mathcal{S} to be reduced to $\{cT^-\}$, $c = \int \psi S \wedge T^+$. If $T \in \mathcal{S}$, then T is a horizontal positive closed current by proposition 1.4.8, and for a normalized vertical closed positive form ϕ ,

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mathcal{L}^{n_i}(\psi S), \phi \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle (\psi S), {}^t \mathcal{L}^{n_i} \phi \rangle = \int \psi S \wedge T^+$$

since S has local continuous potential. Hence T has slice mass $c = \int \psi S \wedge T^+$.

Without loss of generality we may assume $\psi \geq 0$. \mathcal{S} has the following property :

$$\forall S_0 \in \mathcal{S}, \exists S_{-1} \in \mathcal{S}, \mathcal{L}S_{-1} = S_0;$$

this is obvious since if $S_0 = \lim \mathcal{L}^{n_i}(\psi S)$, we just extract a converging subsequence of $\mathcal{L}^{n_i-1}(\psi S)$. In particular there is a sequence of currents $S_{-j} \in \mathcal{S}$, such that $\mathcal{L}^j S_{-j} = T$. By remark 1.4.4, for every vertical (1,1) form φ such that $dd^c \varphi \geq 0$,

$$\langle T, \varphi \rangle \leq \langle cT^-, \varphi \rangle.$$

We prove the reverse inequality. Replacing ψ by $\|\psi\|_\infty - \psi = \psi_1$ yields as a set of cluster values

$$\mathcal{S}_1 = \{\|\psi\|_\infty T^- - S, S \in \mathcal{S}\}$$

since $\|\psi\|_\infty S$ is closed. Moreover, for every vertical p.s.h. φ ,

$$\langle \|\psi\|_\infty T^- - T, \varphi \rangle \leq \langle (\|\psi\|_\infty - c)T^-, \varphi \rangle,$$

that is, $\langle T, \varphi \rangle \geq \langle cT^-, \varphi \rangle$. □

Mixing of μ is now just a formal verification, using continuity of the various potentials involved ([BS3], [Si1]).

PROOF OF THE COROLLARY : for two continuous functions φ, ψ on $\text{Supp } \mu$ we have to prove asymptotic independence

$$\int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu \rightarrow \left(\int \varphi d\mu \right) \left(\int \psi d\mu \right).$$

We may assume φ, ψ are restrictions to $\text{Supp } \mu$ to test functions. We infer

$$\begin{aligned} \int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu &= \int {}^t \mathcal{L}^n(\varphi T^+) \wedge \psi T^- = \int \varphi T^+ \wedge \mathcal{L}^n(\psi T^-) = \int \varphi dd^c G^+ \wedge \mathcal{L}^n(\psi T^-) \\ &= \int G^+ dd^c \varphi \wedge \mathcal{L}^n(\psi T^-) + \int G^+ \varphi dd^c(\mathcal{L}^n(\psi T^-)) + 2 \int G^+ d\varphi \wedge d^c(\mathcal{L}^n(\psi T^-)), \end{aligned}$$

where the two last terms converge to zero by proposition 1.4.8 and the first to $(\int \psi T^+ \wedge T^-) \int G^+ dd^c \varphi \wedge T^- = (\int \psi d\mu)(\int \varphi d\mu)$. □

We close this section by a result which will be useful to us in the fine study of μ .

PROPOSITION 1.4.12 *Let ψS be a current of the form (*), such that S has local continuous potential near $\text{Supp}(\psi)$. Then*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{L}^k(\psi S) \rightarrow \left(\int \psi S \wedge T^+ \right) T^-.$$

PROOF : as in the preceding theorem the cluster values of $\mathcal{L}^n(\psi S)$ are closed (proposition 1.4.8), of slice mass $(\int \psi S \wedge T^+)$. Since the currents $\mathcal{L}^n(\psi S)$ have locally bounded mass, the Cesaro process yields \mathcal{L} invariant currents, and we conclude by uniqueness of the invariant current T^- . \square

1.5. Entropy and product structure of μ

In this section we use the preceding convergence theorems for sequences of currents to derive information on the structure of μ . The results obtained here parallel the ones obtained in [BLS] and [Ca] in the dynamics of polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2 and K3 surfaces respectively. We rely heavily on [BLS], insisting only on the modifications needed in the proofs. We follow however a slightly different way, in order to take advantage of the laminarity of the invariant currents.

In the following, f is a Hénon-like map of degree d . We make some use of Pesin's theory of nonuniformly hyperbolic dynamical systems ; a general account is to be found in the appendix by A. Katok and L. Mendoza of the book [KH], [BLS] contains a presentation adapted to our context. Note that in general the dynamical system under consideration is assumed to be everywhere defined on a manifold, but what is only needed is it to be defined in some neighborhood of the invariant compact set under study (see e.g. the book [KS]).

For M an open submanifold, and T a current with continuous potential we use the notation $T|_M$ for the restriction of T to M , that is the wedge product $T \wedge [M]$. The main new result is the following proposition.

PROPOSITION 1.5.1 *Let ν be an ergodic probability measure, such that $h_\nu(f) > \frac{\log d}{2}$. Then for ν -a.e. point x , $T^+|_{W_{loc}^u(x)}$ has positive mass.*

PROOF : Since ν has positive entropy, it has a positive Lyapounov exponent χ^+ by the Ruelle inequality, thus also a negative one χ^- because the maps we consider are automorphisms, and these are the only exponents since the ambient space is (complex) 2-dimensional, so ν is hyperbolic. In particular the Pesin local unstable manifolds are well defined at a.e. x . The set

$$\left\{ x, \int T^+ \wedge [W_{loc}^u(x)] > 0 \right\}$$

is f invariant, so by ergodicity it suffices to prove it has positive ν -measure.

Recall that the Pesin-Oselelets theorem provides us, for each fixed positive ε , with "Lyapounov charts" $\phi_x(B(0, r(x)))$ at a.e. x , with ε slowly varying distortion and size $r(x)$, on which f acts, up to a C^1 error ε , like a diagonal matrix of entries e^{χ^+} and e^{χ^-} . The respective eigendirections are called "unstable" and "stable", and the local unstable (resp. stable) manifolds are graphs over the unstable (resp. stable) direction in Lyapounov charts. Moreover, for every $\eta > 0$, there exists a compact set Λ_η , $\nu(\Lambda_\eta) \geq 1 - \eta$, such that the charts vary continuously on Λ_η ; in particular their size is bounded from below there, as well as the angle between the stable and unstable direction. Λ_η can be covered by finitely many Lyapounov charts of positive measure. In the next lemma, we take $\Lambda := \Lambda_{1/2}$.

The following result is implicit in [N1], where it is proved for measures of almost maximal entropy, but it holds for any hyperbolic measure (see also [Co] for related statements). We sketch a proof for completeness. Recall that \mathbb{B}_{-n} is the set of points in \mathbb{B} whose n first iterates remain in \mathbb{B} .

LEMMA 1.5.2 *Let $\varepsilon > 0$ and Q be a Lyapounov chart, as in the discussion above, and let Δ be a disk in Q , transverse to the stable direction. Then there exists a constant C (independent of ε) such that*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Vol}(f^n(\Delta \cap \mathbb{B}_{-n})) \geq h_\nu(f) - C\varepsilon.$$

Herebelow, by abuse of notation, we replace $f^n(\Delta \cap \mathbb{B}_{-n})$ by $f^n(\Delta)$, which has no importance, since we only work in Lyapounov charts.

PROOF : it is a theorem of Katok [K] that measure theoretic entropy can be computed using (n, ε_0) spanning sets. More precisely, let $N(\varepsilon_0, n)$ denote the minimal cardinality of a set of (n, ε_0) Bowen balls $B_n(x_j, \varepsilon_0)$ in Q , such that $\cup_j B_n(x_j, \varepsilon_0)$ has measure $> \nu(Q)/2$. Then

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\varepsilon_0, n) = h_\nu(f).$$

Fix $\varepsilon_0 > 0$ and let $F(\varepsilon_0, n)$ be a maximal (n, ε_0) separated set in $Q \cap \Lambda$, by definition

$$\bigcup_{x_j \in F(\varepsilon_0, n)} B_n(x_j, \varepsilon_0) \supset Q \cap \Lambda$$

so $\#F(\varepsilon_0, n) \geq N(\varepsilon_0, n)$.

Let Δ be a disk in Q , such that $\Delta \cap W_{loc}^s(y)$ is a single point $\Delta(y)$, for $y \in \Lambda \cap Q$. Recall that the size of the Lyapounov charts satisfies $r(x) \geq r$ on Λ . By projection along the stable direction in Q , there exists a constant σ , uniform in $y \in Q \cap \Lambda$ such that Δ contains a graph $W(y)$ over a disk in $W_{loc}^u(y)$, centered at y , and of size $\varepsilon_0 \sigma r(y)$, with graphing function g_y , $W(y) = g_y(\varepsilon_0 \sigma r D^u(y))$.

For $y \in F(\varepsilon_0, n)$, let

$$B_n(y) = \bigcap_{k=0}^n f^{-k} \left(\phi_{f^k(y)} B(0, r(f^k(y))) \right),$$

which is an approximation of $W^s(y)$, and

$$W_n(y) = B_n(y) \cap g_y(\varepsilon_0 \sigma r e^{-C\varepsilon n} D^u(y))$$

where C denotes a constant independent of $n, \varepsilon, y, \varepsilon_0$, determined by the Pesin Theorem, which may change from line to line. $W_n(y)$ is a piece of Δ , and by the overflowing property of unstable disks under forward iteration, $f^n(W_n(y))$ contains a graph over the unstable direction at $f^n(y)$, of size $\geq K(\varepsilon_0, \sigma, r)e^{-C\varepsilon n}$, thus $\text{Vol}(f^n W_n(y)) \geq K(\varepsilon_0, \sigma, r)e^{-C\varepsilon n}$. If we can prove that the disks $W_n(y) \subset \Delta$, $y \in F(\varepsilon_0, n)$ are disjoint, this yields

$$\text{Vol}(f^n(\Delta)) \geq \sum_{y \in F(\varepsilon_0, n)} \text{vol}(f^n W_n(y)) \geq K(\varepsilon_0, \sigma, r) \cdot \#F(\varepsilon_0, n) e^{-C\varepsilon n},$$

which is the claim of the lemma.

We prove that for $y, y' \in F(\varepsilon_0, n)$, $f^k(W_n(y)) \cap f^k(W_n(y')) = \emptyset$ for some k . Note that by construction, the iterates $f^k(W_n(y))$ remain close to $f^k(y)$, and since $F(\varepsilon_0, n)$ is an (ε_0, n) separated set, it suffices to show that the diameters $\text{diam}(f^k(W_n(y)))$ do not exceed, say, $\varepsilon_0/10$. This is done by Newhouse (on p.296) for $k \leq n - k_1$, k_1 independent of n (for k close to n , the diameter of $f^k(W_n(y))$ may be comparable to ε_0) by an argument involving the negative

Lyapounov exponent also. We can pick $F'(\varepsilon_0, n) \subset F(\varepsilon_0, n)$, with $\#F'(\varepsilon_0, n) \geq C^{-1}\#F(\varepsilon_0, n)$ so that if $y, y' \in F'(\varepsilon_0, n)$, $f^j(y)$ and $f^j(y')$ are ε_0 separated, for $j \leq n - k_1$. This concludes the proof of the lemma. \square

We continue with the proof of prop. 1.5.1. We are left with a set $Q \cap \Lambda$ of positive measure such that if $y \in Q \cap \Lambda$, the volume of $f^n(W_{loc}^u(y))$ has exponential growth $\geq \lambda^n$, where

$$\frac{\log d}{2} < \log \lambda < h_\nu(f).$$

Let $S = [W_{loc}^u(y)]$ for such a y , and let ψ be a test function, with $\text{Supp } \psi \cap \text{Supp } dS = \emptyset$. We denote by $\mathcal{L}_\#$ the non normalized graph transform operator, $\mathcal{L}_\# = d\mathcal{L} = \mathbf{1}_{\mathbb{B}}f_*$, and consider the sequence of currents

$$\frac{1}{m_n} \mathcal{L}_\#^n(\psi S), \text{ where } m_n = \mathbf{M}(\mathcal{L}_\#^n(\psi S)) \geq \lambda^n.$$

We prove that $\partial(\frac{1}{m_n} \mathcal{L}_\#^n(\psi S))$ converges to zero in mass norm. Let θ be a (0,1)-form, then, as in proposition 1.4.8,

$$\left| \int \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n} \wedge \partial\theta \right| \leq \frac{1}{\sqrt{m_n}} \left| \int S \wedge i\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int \frac{\mathcal{L}_\#^n S}{m_n} \wedge i\theta \wedge \bar{\theta} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

We cannot relate *a priori* the mass of $\mathcal{L}_\#^n S$ to that of $\mathcal{L}_\#^n(\psi S)$, furthermore (see remark 1.4.9), the results of the preceding section do not give any bound on the mass of $\mathcal{L}^n S$. On the other hand we claim that for every $d' > d$, $\mathbf{M}(\mathcal{L}_\#^n S / (d')^n) \rightarrow 0$. Indeed, suppose not, this means that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(d')^n} \text{Vol}(f^n(W_{loc}^u(y))) > 0$$

so by Yomdin's Theorem $h_{top}(f) \geq \log d'$ which contradicts theorem 1.3.1.

Let d' , such that $\lambda^2 > d' > d$, we get

$$\left| \int \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n} \wedge \partial\theta \right| \leq \frac{(d')^{n/2}}{m_n} \left| \int S \wedge i\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int \frac{\mathcal{L}_\#^n S}{(d')^n} \wedge i\theta \wedge \bar{\theta} \right|^{\frac{1}{2}}$$

which converges to zero since $m_n \geq \lambda^n$. One checks easily that $\frac{1}{m_n}(i\partial\bar{\partial}\mathcal{L}_\#^n(\psi S)) \rightarrow 0$ also. Let T be a cluster value of the sequence $(\frac{1}{m_n}\mathcal{L}_\#^n(\psi S))$, T is a horizontal closed current of mass 1, in particular $\int T \wedge T^+ > 0$, thus for n large enough,

$$\int T^+ \wedge \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n} > 0.$$

Indeed let G^+ be a potential of T^+ , and φ be a test function, $\varphi = 1$ near K , we infer

$$\int \varphi dd^c G^+ \wedge \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n} = \int G^+ dd^c \varphi \wedge \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n} + \int G^+ \varphi \wedge dd^c \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n} + 2 \int G^+ d\varphi \wedge d^c \frac{\mathcal{L}_\#^n(\psi S)}{m_n},$$

and since G^+ is continuous, the last two terms tend to zero while the first converges (after suitable extraction) to $\int G^+ dd^c \varphi \wedge T = \int T \wedge T^+ > 0$. We conclude that $\int T^+ \wedge \psi S > 0$. \square

The next two results make the interplay between the invariant currents $T^{+/-}$ and Pesin Theory more precise. For references on laminar currents see the next chapters or [BLS], [Ca]. The next proposition is a special case of theorem 5.1.4 nevertheless we provide here a proof.

PROPOSITION 1.5.3 *The currents T^+ and T^- are laminar.*

PROOF : it suffices to restrict to some smaller bidisk $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$. Let L be a horizontal line and $C_n = f^n(L \cap \mathbb{B}_{-n})$; (C_n) is a sequence of smooth curves satisfying

$$\frac{1}{d^n}[C_n] \rightharpoonup T^-.$$

To get laminarity of T^- it suffices to prove, in the spirit of theorem 3.1, and [BS5], that the number $\#tg(C_n)$ of vertical tangencies of C_n is $O(d^n)$, as well as the number of tangencies with a slightly perturbed vertical direction.

By the Maximum Principle each connected component of $L \cap \mathbb{B}_{-n}$ is simply connected; so $\pi_1 \circ f^n|_{L \cap \mathbb{B}_{-n}}$ is a branched cover of degree d^n of some simply connected open subset of the unit disk onto the unit disk. The Riemann Hurwitz formula then reads

$$\chi(L \cap \mathbb{B}_{-n}) = d^n \chi(\mathbb{D}) - \#tg(C_n),$$

and simple connectivity implies that $\chi(L \cap \mathbb{B}_{-n}) \geq 0$, thus $\#tg(C_n) \leq d^n \chi(\mathbb{D}) \leq d^n$.

Since f is also Hénon-like in perturbed bidisks \mathbb{B} , with $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{B}$, we get the same control for projections close to be vertical. \square

The major step towards a precise understanding of the structure of the invariant currents is the following holonomy invariance Theorem of [BLS]. We state it in a general form- the assumption $h_\nu(f) > (\log d)/2$ is needed because the result of proposition 1.5.1 is required in the proof.

Before we state the theorem, we need to recall the formalism of Pesin boxes, used in [BLS]. A *Pesin box* for ν is a compact set P of positive ν -measure, together with a neighborhood \mathcal{N} of P , biholomorphic to a bidisk, such that

- for every $x \in P$, $W_{loc}^s(x) \cap \mathcal{N}$ (resp. $W_{loc}^u(x) \cap \mathcal{N}$) is a horizontal (resp. vertical) graph in $\mathcal{N} \simeq \mathbb{B}$. We denote them respectively by $W_{\mathcal{N}}^s(x)$ and $W_{\mathcal{N}}^u(x)$;
- for all $x, y \in P$, the unique intersection point between $W_{\mathcal{N}}^s(x) \cap W_{\mathcal{N}}^u(y)$ is in P .

We also use the notation

$$\mathcal{L}^{u/s}(P) = \bigcup_{x \in P} W_{\mathcal{N}}^{u/s}(x);$$

$\mathcal{L}^u(P)$ is (the support of) a lamination by horizontal graphs in \mathcal{N} (similarly for $\mathcal{L}^s(P)$), and $P = \mathcal{L}^u(P) \cap \mathcal{L}^s(P)$. It is easily seen that if $P_x^s := \mathcal{L}^u(P) \cap W_{\mathcal{N}}^s(x)$ (resp. $P_x^u := \mathcal{L}^s(P) \cap W_{\mathcal{N}}^u(x)$) then for every x , P_x^s (resp. P_x^u) is homeomorphic to a fixed P^s (P^u), and $P \simeq P^s \times P^u$. The Pesin regular set can be covered by an at most countable family of Pesin boxes.

THEOREM 1.5.4 ([BLS]) *Let ν be an ergodic measure, such that $h_\nu(f) > \frac{\log d}{2}$. Let P be a Pesin box for ν , and $\mathcal{L}^s(P)$ be the stable lamination in \mathcal{N} . If D_1, D_2 are disks transverse to $\mathcal{L}^s(P)$, then the holonomy map $\tau(D_1, D_2, P^s)$ along $\mathcal{L}^s(P)$ preserves the slice measures of T^+ , that is,*

$$\tau(D_1, D_2, \mathcal{L}^s(P))_*(T^+|_{D_1})|_{\mathcal{L}^s(P)} = (T^+|_{D_2})|_{\mathcal{L}^s(P)}.$$

As a corollary of this theorem, the laminar structures of T^+ and T^- are subordinate to the stable/unstable partition in Pesin boxes (see [BLS] section 8 for details).

THEOREM 1.5.5 *The measure $\mu = T^+ \wedge T^-$ is the unique measure of maximal entropy $\log d$. Moreover μ has local product structure.*

A corollary of the theorem is that μ is a Bernoulli measure. The first step is [BLS] Proposition 3.2, which applies verbatim to our setting, using proposition 1.5.1.

PROPOSITION 1.5.6 *If ν is a measure of entropy $\log d$, then for ν a.e. x , the class of the conditional measure $\nu(\cdot|W_{loc}^u(x))$ (resp. $\nu(\cdot|W_{loc}^s(x))$) is induced by T^+ (resp. T^-).*

PROOF OF THEOREM 1.5.5 : a theorem of Newhouse [N2] implies the existence of a measure ν of maximal entropy, we may choose ν to be ergodic and of mass 1. Once again, it is stated for endomorphisms of compact manifolds but it holds in our situation, since its tools are ergodic- and Pesin-theoretic. The preceding proposition, together with proposition 1.5.1 tell us that for ν a.e. x ,

$$\nu_x^u = \nu(\cdot|W_{loc}^u(x)) = \frac{T^+ \wedge [W_{loc}^u(x)]}{\|T^+ \wedge [W_{loc}^u(x)]\|} = \frac{1}{\rho(x)} T^+ \wedge [W_{loc}^u(x)],$$

where $\rho(x) > 0$. Moreover the Birkhoff ergodic Theorem plus dominated convergence imply that for a.e. x

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)_* (\nu_x^u) \rightharpoonup \nu. \quad (1.7)$$

We want to use proposition 1.4.12 and $\nu_x^u = \frac{1}{\rho(x)} T^+ \wedge [W_{loc}^u(x)]$ to deduce from (1.7) that $\mu = \nu$. However, proposition 1.4.12 requires continuous potentials, so we will diffuse the current $[W_{loc}^u(x)]$ in the unstable lamination.

Indeed, let $P \subset \mathcal{N}$ be a Pesin box. The unstable current induces a transversal measure in $\mathcal{L}^u(P)$ by the preceding theorem. Given a transversal $W_{\mathcal{N}}^s(z)$ for some z , let ν_z^s be the (normalized) measure induced by T^- . By the preceding proposition 1.5.6, for ν -a.e. z , ν_z^s equals the conditional measure $\nu(\cdot|W_{\mathcal{N}}^s(z))$, and moreover $\nu_z^s(P \cap W_{\mathcal{N}}^s(z)) > 0$ since P has positive measure. Without loss of generality, we still denote by ν_z^s the restriction to $P \cap W_{\mathcal{N}}^s(z)$.

For $x \in \text{Supp } \nu_z^s$, let $\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)$ be the leaf of $\mathcal{L}^u(P)$ through x , and consider the uniformly laminar current

$$S = \int_{W_{\mathcal{N}}^s(z)} [\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)] d\nu_z^s(x).$$

By holonomy invariance of the induced measures, $S \leq \rho^s T^-$ (ρ^s is some positive normalization constant), so by [BLS] Lemma 8.2, S has continuous potential in \mathcal{N} .

For every $x \in \text{Supp } \nu_z^s$, $\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)$ is the unstable manifold of some point $p(x) \in P$. So the conditional measure $\nu_{p(x)}^u$ is well defined on $\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)$. Consider the product measure $\tilde{\nu}_z$ defined by

$$\psi \mapsto \tilde{\nu}_z(\psi) = \int_{W_{\mathcal{N}}^s(z)} \left(\int_{\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)} \psi(y) d\nu_{p(x)}^u(y) \right) d\nu_z^s(x).$$

As before for ν a.e. z ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)_* (\tilde{\nu}_z) \rightharpoonup \nu. \quad (1.8)$$

Moreover $\tilde{\nu}_z$ may be expressed as a wedge product (see chapter 4 for details)

$$\tilde{\nu}_z = \int_{W_{\mathcal{N}}^s(z)} \left(\frac{1}{\rho(x)} T^+ \wedge [\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)] \right) d\nu_z^s(x) = T^+ \wedge \left(\int_{W_{\mathcal{N}}^s(z)} \frac{1}{\rho(x)} [\Gamma_{\mathcal{N}}^u(x)] d\nu_z^s(x) \right) = T^+ \wedge \tilde{S}.$$

Slightly reducing P if necessary, ρ is bounded below and we get $\tilde{S} \leq cT^-$, so \tilde{S} has continuous potential as before, and proposition 1.4.12 applies. Thus for any ψ , such that $\text{Supp } \psi \cap \text{Supp } d\tilde{S} = \emptyset$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k(\psi \tilde{S}) \rightarrow \left(\int \psi \tilde{S} \wedge T^+ \right) T^-,$$

so, using continuous potentials as before,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^n)_*(T^+ \wedge (\psi \tilde{S})) \rightarrow \tilde{\nu}_z(\psi) T^+ \wedge T^- = \tilde{\nu}_z(\psi) \mu.$$

This, together with (1.8), implies that μ and ν are mutually non singular, hence equal.

The product structure of μ follows from proposition 1.5.6 and theorem 1.5.4. \square

General Pesin theoretic arguments allow to derive equidistribution of saddle orbits from the structure of μ (e.g. [BLS2]). The only extra need in our context is a control on the number of periodic points.

PROPOSITION 1.5.7 *Let f be a Hénon-like map of degree d . The number of fixed points of f^n , counted with multiplicity, is d^n .*

PROOF : we give here an argument analogous to the Lefschetz Fixed Point formula. It suffices to prove that two Hénon-like maps of degree d have the same number of periodic points of any period n , since we already know this number for Hénon maps.

Fix first $n = 1$, and let f_0, f_1 be Hénon-like maps in \mathbb{B} . Fixed points of f_i are intersection points of the graph $\Gamma_{f_i} \subset \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ with the diagonal Δ . Slightly perturbing the f_i by an affine homotopy make these fixed points simple (of multiplicity 1) without affecting their total number (with multiplicity).

We have

$$\overline{\Gamma}_{f_i} \cap \partial(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \subset (\mathbb{B} \times \partial_v \mathbb{B}) \cup (\partial_h \mathbb{B} \times (\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B})),$$

whereas

$$\overline{\Delta} \cap \partial(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \subset (\partial_v \mathbb{B} \times \partial_v \mathbb{B}) \cup (\partial_h \mathbb{B} \times \partial_h \mathbb{B});$$

thus the intersection $\Gamma_{f_i} \cap \Delta$ is compactly supported in \mathbb{B}^2 . If we are able to show that $\overline{\Gamma}_{f_0}$ and $\overline{\Gamma}_{f_1}$ are homologous in $\overline{\mathbb{B}^2} \text{ mod. } (\mathbb{B} \times \partial_v \mathbb{B}) \cup (\partial_h \mathbb{B} \times (\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}))$, meaning that in \mathbb{B}^2 , $\Gamma_{f_0} - \Gamma_{f_1} = dU$, with U a 5-chain such that

$$\overline{\text{Supp}(U)} \cap \partial(\mathbb{B}^2) \subset (\mathbb{B} \times \partial_v \mathbb{B}) \cup (\partial_h \mathbb{B} \times (\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B})), \quad (1.9)$$

we get the desired result because the intersection number between a cycle and a boundary is 0.

We prove $\bar{\Gamma}_{f_0}$ and $\bar{\Gamma}_{f_1}$ are homologous mod. $(\mathbb{B} \times \partial_v \mathbb{B}) \cup (\partial_h \mathbb{B} \times (\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}))$. If $L = \mathbb{D} \times \{w\}$ is a horizontal line in \mathbb{B} , $f_0(L \cap \mathbb{B}_{-1})$ and $f_1(L \cap \mathbb{B}_{-1})$ have the same class in $H_c^2(\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B})$, so there is a 3-chain U_L , with support in some $\mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$ such that

$$f_0(L \cap \mathbb{B}_{-1}) - f_1(L \cap \mathbb{B}_{-1}) = dU_L.$$

U_L may be chosen to depend smoothly on L , thus, as L ranges over the set of horizontal lines in $\bar{\mathbb{B}}$, $\cup_L(L, U_L)$ describes a 5-dimensional chain U in $\overline{\mathbb{B} \times \mathbb{B}}$, with $dU = \Gamma_{f_0} - \Gamma_{f_1}$, and satisfying the desired assumption (1.9) on the support.

For general n , we do the same operation with $\Gamma_{f^n} := \{(x, f^n(x)), x \in \mathbb{B}_{-n}\}$. We have to stress that the map f^n is not a Hénon-like map since it needs not be defined in \mathbb{B} . However, periodic points lie in K and f^n is defined in a neighborhood of K so that periodic points are intersection points of Γ_{f^n} (as defined above) and Δ , and we can use the same homological reasoning. \square

REMARK 1.5.8 The homological construction made here by hand is in accordance with the principle of Lefschetz fixed point theory : the action of f on homology determines the homology class of Γ_f .

Let Fix_n be the set of fixed points of f^n , Per_n be the set of periodic points of exact period n , and $HPer_n$ the set of hyperbolic periodic points of period n . Of course $HPer_n \subset Per_n \subset Fix_n$.

THEOREM 1.5.9 ([BLS2]) *Let P_n be any of Fix_n , Per_n , or $HPer_n$. Then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \sum_{p \in P_n} \delta_p = \mu.$$

Moreover the positive Lyapounov exponent $\chi^+(\mu)$ of μ can be estimated by averaging at saddle points, that is,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \sum_{p \in HPer_n} \chi^+(p) = \chi^+(\mu).$$

A corollary of this theorem is the plurisubharmonic dependence of Lyapounov exponents under parameters.

1.6. Some transcendental examples

A way to produce examples of Hénon-like maps is to perturb one variable (generalized) polynomial-like maps. Indeed let $h : U \rightarrow V$ be a polynomial-like map of degree d , with $\overline{U} \simeq \overline{\mathbb{D}}$, $U \subset D(0, M)$, $U \subset\subset V$; we also assume h is defined in a neighborhood of \overline{U} . We let f be defined in $U \times D(0, M)$ (which is biholomorphic to the bidisk) by

$$(z, w) \mapsto (aw + h(z), az).$$

Then if $|a| < \min\{1, d(\partial U, \partial V)/M\}$, f is Hénon-like in $U \times D(0, M)$. In fact this is also true (with suitably chosen a) if h only satisfies $h(\partial U) \cap U = \emptyset$ and $h(U) \supset U$. We will call such a map *generalized polynomial-like* (GPL map) (note that this is not the usual definition [LM1] of GPL maps; with the standard definition, only $h : h^{-1}(U) \cap U \rightarrow U$ is GPL). The degree of a GPL map is the degree of $h : h^{-1}(U) \cap U \rightarrow U$.

Many transcendental maps in \mathbb{C} exhibit polynomial-like dynamics in some domains. An interesting example is the following : let $0 < \lambda < 1/e$ and consider the map $E_\lambda : z \mapsto \lambda e^z$. E_λ maps the open rectangle

$$R_{c,N} := \{z, 1 < \Re(z) < c, -(2N+1)\pi < \Im(z) < (2N+1)\pi\}$$

onto the annulus $A(0, \lambda e, \lambda e^c)$ (the horizontal sides of the rectangle map to \mathbb{R}^-). So, if c is so large that $R_{c,N} \subset\subset A(0, \lambda e, \lambda e^c)$, E_λ is a GPL map in $R_{c,N}$. We deduce that for $|a|$ small enough, the map

$$(z, w) \mapsto (aw + \lambda e^z, az)$$

is Hénon-like in $R_{c,N} \times \mathbb{D}$, of degree $2N+1$. In particular it has entropy $\geq \log(2N+1)$.

More generally, concerning the entropy of transcendental maps such as

$$f : (z, w) \mapsto (aw + h(z), az),$$

we claim that for $|a|$ small enough, $h_{top}(f) > 0$, i.e. there exists some invariant compact set K such that $h_{top}(f|_K) > 0$. Indeed, it is a consequence of the Ahlfors Five Islands Theorem that for any entire transcendental map h in \mathbb{C} , there exists N , a disk D in \mathbb{C} , and U_1, U_2 , with $U_i \subset\subset D$ such that $h^N : U_i \rightarrow D$ is conformal (see [Be] proposition B.3). It is unclear whether one can choose D with $h^N(\partial D) \cap D = \emptyset$ so that $h^N|_D$ is GPL, so we cannot directly construct degree 2 Hénon-like maps. However, for $|a|$ small enough, and $i, j \in \{1, 2\}$,

$$f^N : U_i \times \mathbb{D} \mapsto U_j \times \mathbb{D}$$

is a degree 1 crossed map (we use crossed maps because we did not allow in our definition of Hénon-like maps, the source and target bidisks to be different; of course, the definition is easy to adapt to this case). Following the techniques of [HO] and [FS1], one proves that for any sequence $(i_j) \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, the sequence

$$\{z \in U_{i_0} \times \mathbb{D}, f^{j_N}(z) \in U_{i_j} \times \mathbb{D}\}$$

converges to some vertical disk in $U_{i_0} \times \mathbb{D}$. We thus get a $(f^N)^*$ invariant dyadic Cantor set of vertical disks, and with the same method, a $(f^N)_*$ invariant Cantor set of horizontal disks. An easy symbolic dynamics argument shows that the dynamics on the intersection of these two transversal Cantor sets of lines is conjugate to the full shift on 2 symbols, so that $h_{top}(f^N) \geq \log 2$. This proves our claim. A consequence is that such maps have infinitely many saddle points [K].

It is possible to construct transcendental maps with infinite entropy (there exists a sequence of invariant compact sets K_n such that $h_{top}(f|_{K_n}) \rightarrow \infty$) in the following way. Fix $|a| < 1$ and let p_1 be a polynomial of degree $d_1 > 1$. The Hénon map

$$f_1 : (z, w) \mapsto (aw + p_1(z), az)$$

is Hénon-like in some bidisk $D(0, R_1)^2$, as well as any perturbation f such that

$$\|f - f_1\|_{L^\infty(D(0, R_1)^2)} < \varepsilon.$$

Let p_2 be a polynomial of degree $d_2 > d_1$, with $|p_2| < \varepsilon/2$ on $D(0, R_1)$,

$$f_2 : (z, w) \mapsto (aw + p_1(z) + p_2(z), az)$$

is Hénon like in $D(0, R_1)^2$ of degree d_1 and in some $D(0, R_2)^2$ of degree d_2 . Iterating this process leads to a map f_∞ ,

$$f_\infty(z, w) = \left(aw + \sum_{i=1}^{\infty} p_i(z), az \right),$$

with the following properties : f_∞ has infinite entropy, for every $\lambda > 0$ the sequence $\frac{1}{\lambda^n}(f_\infty)_*[w = 0]$ tends to infinity on compact sets, and for n large enough, the number of saddle points of f_∞ is greater than λ^n .

Chapitre 2

Courants laminaires

L'objet de ce chapitre est de présenter et mettre en concurrence diverses notions de laminarité pour les $(1,1)$ courants positifs fermés en dimension deux, le but étant de dégager la “bonne” définition. Les deux premières sections sont consacrées à des notions de *laminarité uniforme*, correspondant, en dynamique, à des situations très particulières –hyperbolicité (quasi) *uniforme*. Nous introduisons d'abord (section 2.1) les courants uniformément laminaires qui sont les cycles feuilletés sur une lamination plongée et munie d'une mesure transverse, puis (section 2.2) introduisons une classe de courants uniformément laminaires à *plis* dont nous montrons qu'elle est la clôture de la précédente pour une topologie naturelle. Ces derniers courants apparaissent naturellement en dynamique des automorphismes polynomiaux *quasi expansifs* [BS8].

La troisième section traite des *courants laminaires* généraux, pour lesquels nous dressons une liste de propriétés utiles. Une série d'exemples montre que la définition est trop générale pour espérer une “théorie géométrique” de ces courants (structure locale, produit d'intersection...).

Nous tenterons dans les chapitres suivants de mettre en évidence des classes de courants laminaires se prêtant mieux à ce type de questions.

2.1. Courants uniformément laminaires.

La première notion à définir est celle de courant uniformément laminaire ou ce qui revient au même, de cycle feuilleté, au sens de Sullivan [Sul], [RS1] sur une lamination plongée et munie d'une mesure transverse invariante. La définition et la terminologie¹ sont celles de Bedford, Lyubich, Smillie [BLS] (et aussi Cantat [Ca]); en particulier il est implicite dans toute la suite que la variété ambiante est de dimension 2. Quelques remarques font d'ores et déjà référence aux courants laminaires et pourront être omises en première lecture.

Les courants uniformément laminaires serviront de base pour la définition à venir des courants laminaires. Dans les applications en dynamique des applications injectives (automorphismes polynomiaux, applications d'allure Hénon), ils apparaissent en présence d'hyperbolicité uniforme -le cas des automorphismes polynomiaux est traité en détail dans [BS1].

DÉFINITION 2.1.1 *T est un courant uniformément laminaire (UL) si pour tout $x \in \text{Supp}(T)$, il existe des ouverts $V \supset U \ni x$, où V est biholomorphe au bidisque \mathbb{D}^2 et dans la carte correspondante de V , $T|_U$ est l'intégrale directe d'une famille de courants d'intégration sur des graphes disjoints dans \mathbb{D}^2 , i.e.*

il existe une mesure finie μ sur $\{0\} \times \mathbb{D}$ et une famille mesurable de fonctions holomorphes $f_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, telles que $f_a(0) = a$, les graphes Γ_{f_a} et Γ_{f_b} sont disjoints si $a \neq b$, et

$$T|_U = \int_{\{0\} \times \mathbb{D}} [\Gamma_{f_a} \cap U] d\mu(a). \quad (2.1)$$

Remarquer qu'un courant uniformément laminaire est toujours fermé. Si le besoin s'en fait sentir, on appellera *courant uniformément laminaire élémentaire* un courant formé de graphes dans un bidisque (i.e. de la forme (2.1)). La proposition suivante résume un certain nombre de faits classiques et utiles sur les courants uniformément laminaires élémentaires.

PROPOSITION 2.1.2 *Soit T un courant uniformément laminaire élémentaire dans le bidisque, $T = \int_{\mathcal{A}} [\Gamma_{f_a}] d\mu(a)$ comme ci dessus, où μ est une mesure de probabilité, et \mathcal{A} est un borélien de $\{0\} \times \mathbb{D}$ de μ -mesure totale. Alors*

- i. *On peut étendre $\{\Gamma_{f_a}\}$ en une famille fermée de graphes disjoints.*
- ii. *Si τ_0 et τ_1 sont des graphes verticaux (transversales holomorphes globales) alors l'application d'holonomie $\pi_{\mathcal{L}, \tau_0, \tau_1} : \tau_0 \cap \text{Supp}(T) \rightarrow \tau_1 \cap \text{Supp}(T)$ est quasi conforme (et donc α -Hölderienne pour tout $\alpha < 1$). En particulier la famille de graphes Γ_{f_a} admet une structure de lamination plongée $\mathcal{L}(T)$.*
- iii. *La mesure $(\pi_{\mathcal{L}, \{0\} \times \mathbb{D}, \tau})_* \mu$ induite par μ sur toute transversale holomorphe globale τ est égale à $T \wedge [\tau]$.*

¹La terminologie diffère très légèrement de celle de [BLS] qui appellent *localement* uniformément laminaires ces courants.

Remarquer que lorsqu'on prolonge la famille de graphes $\{\Gamma_{f_a}\}$ à sa fermeture, le courant lui-même est inchangé puisque la mesure transverse est portée par \mathcal{A} . On voit grâce à cette proposition que le support d'un courant uniformément laminaire est naturellement muni d'une structure de lamination plongée, que l'on notera $\mathcal{L}(T)$. La proposition 2.1.4 montre que cette structure est unique.

PREUVE : pour le premier point il suffit de remarquer que la famille des graphes est normale (au sens de Montel) et d'utiliser le lemme d'Hurwitz. Ensuite si on considère deux graphes verticaux comme au point *ii.*, ils sont isotopes en tant que graphes verticaux, et isomorphes au disque unité, i.e. τ_0 et τ_1 sont membres d'une famille holomorphe de graphes (isotopie affine) $\tau_s \xrightarrow{\varphi_s} \mathbb{D}$. Par ailleurs un graphe vertical τ et un graphe horizontal Γ_f s'intersectent exactement en un point ce qui permet de définir l'holonomie $\pi_{\mathcal{L}, \tau_0, \tau_1}$ sans ambiguïté. La trace $\bigcup_a \varphi_s(\Gamma_{f_a} \cap \tau_s) \subset \mathbb{D}$ lorsque s varie est alors un mouvement holomorphe et le deuxième point est alors le Λ -lemma de Mañe-Sad-Sullivan [MSS].

Il est possible de donner une preuve directe de la continuité Hölder de l'holonomie de la façon suivante [BS5] : si a et b sont deux paramètres distincts et $\phi_\bullet(s) = \varphi_s(\Gamma_\bullet \cap \tau_s)$ où \bullet vaut a ou b , alors la fonction

$$h : s \mapsto -\log |\phi_a(s) - \phi_b(s)|$$

est harmonique et positive. Le résultat est alors une conséquence directe du principe de Harnack : $h(1)/h(0) \leq C$ où C ne dépend pas de a et b .

Pour *iii.*, on a vu au chapitre 1 que si S est un courant horizontal positif fermé, la masse des sections de S par un graphe vertical est une constante. Etant donnée une transversale τ_0 , et une fonction continue ϕ sur τ_0 , on peut étendre ϕ à la lamination en une fonction $\tilde{\phi}$ constante le long des feuilles. $\tilde{\phi}T$ est alors fermé, et si τ_1 est une autre transversale on a

$$\int (\tilde{\phi}T) \wedge [\tau_0] = \int (\tilde{\phi}T) \wedge [\tau_1]$$

qui se reformule en

$$\int_{\tau_0} \phi(T \wedge [\tau_0]) = \int_{\tau_1} ((\pi_{\mathcal{L}, \tau_0, \tau_1})_* \phi)(T \wedge [\tau_1]),$$

c'est à dire que $T \wedge [\tau]$ est invariante par holonomie. Par ailleurs il est clair que $T \wedge [z=0] = \mu$. \square

Une conséquence de *ii.*, issue de la théorie des mouvements holomorphes [Do], et dont nous nous servirons entre autres au paragraphe 4.5 est que l'on peut prolonger la lamination à un voisinage de $\text{Supp}(T)$.

Le fait suivant est élémentaire mais très utile, nous en faisons donc une proposition séparée. Le lecteur en trouvera une preuve dans [BLS] lemme 6.4. L'expression " C^0 proche" dans l'énoncé mérite un éclaircissement : on ne demande pas seulement la proximité en distance de Hausdorff (topologie sur l'espace des sous ensembles analytiques), il faut aussi que les variétés V, V' aient des paramétrisations locales proches en norme uniforme.

PROPOSITION 2.1.3 *Soient V et W deux courbes lisses dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$, tangentes à l'ordre k en x . Si V' est une courbe suffisamment C^0 proche de V et distincte de V , alors V' intersecte W transversalement en exactement k points près de x .*

Les courants positifs sont *représentables par intégration*, ce qui signifie qu'il existe une mesure positive $\|T\|$, la mesure trace du courant, et un champ mesurable de (1,1) vecteurs normés $t(x)$ sur le support du courant T , tels que l'action de T sur une forme de bidegré (1,1) ϕ (champ de (1,1) covecteurs) soit donnée par

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\text{Supp}(T)} \langle t(x), \phi(x) \rangle d\|T\|(x), \quad (2.2)$$

où $\langle t(x), \phi(x) \rangle$ est l'accouplement naturel entre (1,1) vecteurs et (1,1) covecteurs. On dira que (2.2) est la décomposition polaire ² du courant T . Dans le cas des courants positifs, la mesure trace est donnée par une formule simple : $\|T\| = T \wedge \omega$ où ω est la forme de Kähler ambiante -la mesure trace dépend de la métrique : c'est naturel puisque la normalisation des (1,1) vecteurs en dépend aussi.

Dans le cas d'un courant uniformément laminaire, le champ $t(x)$ est $\|T\|$ presque partout le (1,1) vecteur définissant la droite complexe tangente à la feuille de $\mathcal{L}(T)$ passant par x . En particulier c'est un (1,1) vecteur *simple*, i.e. de la forme $u \wedge \bar{u}$. De façon équivalente, un (1,1) vecteur est simple si son orthogonal pour le couplage $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non trivial (il existe un (1,1) covecteur ϕ tel que $\langle u, \phi \rangle = 0$). La mesure trace est donnée par l'intégrale directe des mesures trace sur les feuilles :

$$\left\| \int [\Gamma_a] d\mu(a) \right\| = \int \omega|_{\Gamma_a} d\mu(a).$$

Tout ceci reste vrai dans le cas des courants laminaires (voir la représentation (2.6)).

La proposition suivante est très utile pour comprendre la relation entre l'ordre sur les courants positifs et la laminarité. Rappelons que $S \leq T$ ssi $T - S$ est un courant positif.

PROPOSITION 2.1.4 *Soient T_1 et T_2 des courants uniformément laminaires satisfaisant $T_1 \leq T_2$. Alors la lamination $\mathcal{L}(T_1)$ est subordonnée à $\mathcal{L}(T_2)$, i.e. toute feuille de $\mathcal{L}(T_1)$ est une feuille de $\mathcal{L}(T_2)$; de plus les mesures transverses induites sur une transversale satisfont $\mu_1 \leq \mu_2$.*

PREUVE : de $T_1 \leq T_2$ on déduit d'abord $\|T_1\| \leq \|T_2\|$ par la formule $\|T\| = T \wedge \omega$. Soit $T_2 = T_1 + T'_1$, par le théorème de Radon Nikodym on peut écrire $\|T_1\| = f_1 \|T_2\|$ où $0 \leq f_1 \leq 1$ $\|T_2\|$ presque partout, et de même pour T'_1 . D'où

$$\int \langle t_2(x), \cdot \rangle d\|T_2\| = \int \langle t_1(x), \cdot \rangle f_1 d\|T_2\| + \int \langle t'_1(x), \cdot \rangle f'_1 d\|T_2\| = \int \langle f_1 t_1(x) + f'_1 t'_1(x), \cdot \rangle d\|T_2\|,$$

le vecteur $t_2(x)$ étant positif et simple il s'ensuit que $t_1(x)$ et $t'_1(x)$ sont colinéaires à $t_2(x)$ p.p. : en effet si ϕ est un (1,1) covecteur positif orthogonal à t_2 , on a

$$0 \leq f_1 \langle t_1, \phi \rangle + f'_1 \langle t'_1, \phi \rangle = \langle t_2, \phi \rangle = 0.$$

Les courants T_1 et T_2 étant uniformément laminaires on en déduit que T_1 presque partout la feuille $L_1(x)$ de $\mathcal{L}(T_1)$ passant par x est tangente à $L_2(x)$. Alors en fait T_1 presque partout $L_1(x) = L_2(x)$: si ce n'était pas le cas, les deux feuilles étant presque sûrement tangentes, la proposition précédente fournirait beaucoup d'intersections transverses, ce qui est impossible (voir [BLS] lemme 6.5. pour plus de détails). \square

²Le lecteur pourra trouver une preuve accessible de l'existence de la décomposition polaire dans [Sim].

L'hypothèse “ T_1 uniformément laminaire” peut être remplacée par “ T_1 laminaire” : on obtient alors que les disques de T_1 sont subordonnés à la lamination $\mathcal{L}(T_2)$. Le lecteur pourrait s'étonner de l'hypothèse de laminarité faite sur T_1 ; en effet il est vraisemblable que le bon énoncé serait “si $T_1 \leq T_2$, T_1 est fermé et T_2 est uniformément laminaire alors T_1 est uniformément laminaire” et donc subordonné à T_2 . Nous ne savons démontrer cet énoncé que dans un cas particulier, que nous ajoutons ici. Le point délicat réside exclusivement dans le manque de régularité de l'holonomie, un fait déjà remarqué par Sullivan ([Sul], note p.236).

PROPOSITION 2.1.5 *Supposons $T_1 \leq T_2$ où T_1 est un courant positif fermé et T_2 est un courant uniformément laminaire élémentaire dans le bidisque \mathbb{B} , $T_2 = \int [\Gamma_a] d\mu(a)$. Soit π_z l'application d'holonomie $\{0\} \times \mathbb{D} \rightarrow \{z\} \times \mathbb{D}$, définie sur le support de T_2 . On suppose que les dérivées de $(z, w) \mapsto \pi_z^{-1}(w)$ sont fortement dans $L^2(T_2)$. Alors T_1 est uniformément laminaire (et subordonné à T_2).*

Quelques commentaires sont nécessaires : “fortement dans $L^2(T_2)$ ” signifie ici que si u désigne la fonction (continue) à valeurs complexes $(z, w) \mapsto \pi_z^{-1}(w)$ alors $d(uT_2) = \tau \wedge T_2$, où τ est dans $L^2(\|T_2\|)$ et de plus il existe une suite de fonctions lisses $u_n \rightarrow u$ telles que $du_n \rightarrow \tau$ dans $L^2(\|T_2\|)$. Cette condition apparaît³ sous une forme très légèrement différente dans [BeS]. En particulier le résultat est valable quand l'holonomie est de classe C^1 , un cas traité par Sullivan [Sul] et plus généralement par Demailly [De1]. Il est à signaler que nous ne connaissons pas de preuve sous l'hypothèse “ T_1 laminaire” : ceci met l'accent sur la difficulté du concept de prolongement analytique des disques d'un courant laminaire, que nous retrouverons plus loin (voir en particulier la section 5.2).

PREUVE : on peut prolonger la lamination $\mathcal{L}(T_2)$ à un voisinage de $\text{Supp}(T_2)$. Supposons dans un premier temps que l'application d'holonomie soit lisse de classe C^1 . Soit χ une fonction test positive de $\{0\} \times \mathbb{D}$ et soit $\tilde{\chi}$ la fonction obtenue par extension constante de χ le long des feuilles de $\mathcal{L}(T_2)$, c'est à dire $\tilde{\chi}(z, w) = \chi(\pi_z^{-1}(w))$, qui est de classe C^1 .

FAIT : le courant $\tilde{\chi}T_1$ est fermé.

En effet $\tilde{\chi}T_2$ est fermé car T_2 est uniformément laminaire. Il suffit de montrer que $\partial(\tilde{\chi}T_1) = 0$. Soit ϕ une $(0,1)$ forme test, on a

$$|\langle \partial(\tilde{\chi}T_1), \phi \rangle| = |\langle \partial\tilde{\chi} \wedge T_1, \phi \rangle| = |\langle T_1, \partial\tilde{\chi} \wedge \phi \rangle| \leq \langle T_1, i\partial\tilde{\chi} \wedge \overline{\partial\tilde{\chi}} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle T_1, i\phi \wedge \overline{\phi} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

et

$$0 \leq \langle T_1, i\partial\tilde{\chi} \wedge \overline{\partial\tilde{\chi}} \rangle \leq \langle T_2, i\partial\tilde{\chi} \wedge \overline{\partial\tilde{\chi}} \rangle = 0,$$

ce qui démontre notre assertion.

On en déduit que le courant T_1 est uniformément laminaire. En effet par le théorème de représentation de Choquet, il suffit de montrer que le courant T_1 appartient au cône convexe fermé engendré par la famille de courants d'intégration $[\Gamma_a]$. Supposons que ce soit faux : par le théorème de Hahn-Banach il existe une forme test ϕ telle que $\langle T_1, \phi \rangle \leq 0$ et $\langle [\Gamma_a], \phi \rangle > 0$ pour tout a .

En utilisant une partition de l'unité, on peut écrire $\chi = \sum \theta_i$ dans $\{0\} \times \mathbb{D}$ où les fonctions θ_i sont positives, et chacune à support dans une boule de rayon ε . On étend les θ_i à la

³Remarquer que dans cet article les auteurs soulignent que cette condition est une condition d'intégrabilité (au sens du théorème de Frobenius).

lamination en les rendant constantes le long des feuilles, et on a la relation

$$\langle \sum \tilde{\theta}_i T_1, \phi \rangle \leq 0.$$

En particulier pour un certain i , $\langle \tilde{\theta}_i T_1, \phi \rangle \leq 0$. On renormalise $\tilde{\theta}_i T_1$ de façon à ce que la masse de ses sections soit 1, et on réitère le processus avec respectivement $\tilde{\theta}_i T_1$ et $\varepsilon/2$ à la place de $\tilde{\chi} T_1$ et ε . On obtient ainsi une suite de courants positifs fermés horizontaux normalisés, dont le support converge (quitte à extraire) vers une courbe Γ_a : la limite au sens des courants est donc $[\Gamma_a]$ et $\langle [\Gamma_a], \phi \rangle \leq 0$ ce qui est contradictoire. Ceci achève le cas d'holonomie lisse.

Dans le cas général, remarquer que c'est au niveau de l'équation (2.3) qu'intervient la régularité des données, et que la définition de "fortement L^2 " a été choisie de façon à ce que celle ci reste vraie dans ce cadre. \square

2.2. Courants uniformément laminaires à plis.

Nous présentons dans cette section une classe plus vaste de courants uniformément laminaires, dont on peut complètement décrire la structure locale et dont on verra au chapitre 4 qu'ils ont les mêmes propriétés d'intersection géométrique que ces derniers. Cette classe est la clôture de celle des courants uniformément laminaires sous l'hypothèse naturelle de la majoration locale du volume des feuilles. Par ailleurs – nous ne développerons pas ce point de vue par la suite, voir cependant la remarque 4.4.7 – ils apparaissent naturellement dans la construction de courants laminaires (voir le chapitre suivant) à partir de courbes approximantes : plutôt que de chercher à construire les disques comme graphes, on garde les composantes de volume borné dans une subdivision.

Une autre motivation pour cette section est de nature dynamique : Bedford et Smillie introduisent dans [BS8] une forme faible d'hyperbolicité (quasi expansion) pour les automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Si f est quasi expansive, la famille des variétés instables locales (au sens de Pesin) est ce que nous appelons une *lamination à plis* (*folded lamination*) d'après [BS8] Prop. 2.9 (la réciproque est presque vraie [BS8] Th. 3.4). Bedford et Smillie introduisent aussi une “multiplicité locale” que nous développons ici dans un cadre général. Nous ne savons pas si le courant instable T^- d'un automorphisme quasi expansif est un courant uniformément laminaire à plis, même dans le cas où $J = J^*$ (p.ex. applications réelles d'entropie maximale). Un tel résultat serait un renseignement intéressant sur le comportement global des variétés instables de Pesin dans ce cadre.

Familles d'ensembles analytiques de volume borné. On fixe dans ce paragraphe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ et une constante $C > 0$. La topologie sur l'ensemble des sous ensembles analytiques est celle de Hausdorff sur les compacts, autrement dit deux ensembles analytiques sont proches dans un certain compact si chacun y est inclus dans un ε -voisinage de l'autre.

DÉFINITION 2.2.1 *Une lamination à plis de Ω , de paramètre C est une famille \mathcal{L} fermée de courbes (éventuellement singulières) de Ω , connexes, disjointes et de volume majoré par C .*

Remarquons d'abord que l'hypothèse “fermée” est superflue. Si on a une telle famille \mathcal{L} , éventuellement non fermée, soit

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{\text{composantes connexes des valeurs d'adhérence de } \mathcal{L}\}$$

où les valeurs d'adhérence sont prises au sens de la topologie de Hausdorff et existent grâce au théorème de Bishop ([Bi],[Ch]). Alors $\bar{\mathcal{L}}$ est une lamination à plis : le seul point à vérifier est la disjonction des courbes de $\bar{\mathcal{L}}$.

En effet supposons dans un premier temps que V_1 et V_2 sont des courbes de $\bar{\mathcal{L}}$ telles que tout $x \in V_1 \cap V_2$ est isolé dans $V_1 \cap V_2$. Alors $i_x(V_1, V_2) > 0$ où i_x est la multiplicité d'intersection en x . Soient des suites V_j^n de courbes de \mathcal{L} telles que pour $j = 1, 2$ on ait

$V_j^n \rightarrow V_j$ près de x au sens de Hausdorff (globalement les valeurs d'adhérence de V_j^n peuvent avoir plusieurs composantes connexes). Par stabilité du produit d'intersection [Ch], V_1^n et V_2^n doivent avoir des points communs près de x , ce qui est contradictoire.

Si maintenant x n'est pas isolé dans $V_1 \cap V_2$, V_1 et V_2 ont des composantes irréductibles communes. Ecrivons les décompositions en composantes irréductibles :

$$V_1 = V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(i)} \cup V_1^{(i+1)} \cup \dots \cup V_1^{(k)} \text{ et } V_2 = V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(i)} \cup V_2^{(i+1)} \cup \dots \cup V_2^{(l)}$$

où les composantes sont distinctes à partir de la $(i+1)$ ème, et l'ordre est choisi de telle sorte que deux composantes numérotées successivement s'intersectent. Soit $x \in V^{(i)} \cap V_1^{(i+1)}$, alors $i_x(V_1^{(i+1)}, V_2) > 0$ et on peut répéter l'argument précédent.

Nous allons détailler la structure locale des laminations à plis. L'exemple suivant justifie la terminologie, et montre en particulier que l'on ne peut pas espérer obtenir une structure de lamination (au moins pour la topologie induite par \mathbb{C}^2).

EXEMPLE 2.2.2 On se place dans le bidisque unité $\mathbb{B} = \{(z, w), |z|, |w| < 1\}$ de \mathbb{C}^2 , et on considère la courbe d'équation

$$(\mathcal{C}(z_0, w_0, \varepsilon)) \quad z - z_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}(w - w_0)^2.$$

Pour $z_0 \in \mathbb{D}$, c'est une courbe lisse à support dans $\mathbb{D} \times D(w_0, 2\varepsilon)$, et la projection de $\mathcal{C}(z_0, w_0, \varepsilon)$ sur la première coordonnée est un revêtement ramifié de degré 2. Par ailleurs, w_0 et ε étant fixés la famille des $\mathcal{C}(z_0, w_0, \varepsilon)$ forme une lamination dans \mathbb{B} lorsque $z_0 \in \mathbb{D}$ varie. Soient maintenant des suites $(w_n)_{n \geq 0}$, $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ telles que $\varepsilon_n \rightarrow 0$, les $D(w_n, 2\varepsilon_n)$ soient des disques disjoints de $D(0, 1/2)$, et la suite (w_n) admette tous les points de $\partial D(0, 1/2)$ comme valeurs d'adhérence. Alors

$$\left(\bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathcal{C}(z_0, w_n, \varepsilon_n) \right) \cup \left(\bigcup_{w \in \partial D(0, 1/2)} \mathbb{D} \times \{w\} \right)$$

est une lamination à plis de \mathbb{B} , qui n'est jamais une lamination au voisinage d'un point de $\cup_{w \in \partial D(0, 1/2)} \mathbb{D} \times \{w\}$. En effet la courbe $\mathcal{C}(z_0, w_n, \varepsilon_n)$ admet une tangente verticale au point (z_0, w_n) , donc si $|w_0| = 1/2$ et la courbe $\mathcal{C}(z_0, w_n, \varepsilon_n)$ n'est jamais un graphe au dessus de $\mathbb{D} \times \{w_0\}$ au voisinage de (z_0, w_0) . \square

Par la suite on notera $\text{Supp}(\mathcal{L})$ le support de la lamination à plis dans Ω , et si $x \in \text{Supp}(\mathcal{L})$, $V(x)$ est la courbe de \mathcal{L} passant par x et $V_{\Omega'}(x)$ est la composante connexe de $V(x) \cap \Omega'$ contenant x . On fixe un ouvert $\Omega' \subset \subset \Omega$. On utilisera à plusieurs reprises le fait suivant, corollaire de la minoration classique de P. Lelong du volume d'un sous ensemble analytique de la boule unité de \mathbb{C}^2 passant par 0 :

FAIT : il existe une constante $C_{\Omega'}$ telle que si V est un sous ensemble analytique de Ω , $V \cap \Omega' \neq \emptyset$, alors $\text{Vol}(V) \geq C_{\Omega'}$.

La proposition suivante est une conséquence, comme précédemment, de la disjonction des feuilles de \mathcal{L} . d_H désigne la distance de Hausdorff.

PROPOSITION 2.2.3 Soient $x \in \text{Supp}(\mathcal{L}) \cap \Omega'$, et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage U de x , et $r > 0$ tels que pour tout $y \in B(x, r)$, $d_H(V(x) \cap U, V(y) \cap U) < \varepsilon$. Plus précisément, on a la même conclusion si $V_1(y)$ est une composante irréductible de $V(y)$ contenant y .

Soit $V(x) = V^{(1)}(x) \cup \dots \cup V^{(k)}(x)$ la décomposition de $V(x)$ en composantes irréductibles dans Ω' , qui est finie puisque le volume de chacune des composantes irréductibles est minoré. Au sens des courants dans Ω' on a

$$[V(x_n)] \rightarrow \sum m^i [V^{(i)}(x)]. \quad (2.4)$$

Par définition, m^i est la multiplicité de la composante $V^{(i)}(x)$ pour la convergence $x_n \rightarrow x$. Géométriquement, près de tout point lisse de $V^{(i)}(x)$, $V(x_n)$ est un revêtement ramifié de degré m_i pour n assez grand.

EXEMPLE : $[z^2 w = \lambda] \rightarrow 2[z = 0] + [w = 0]$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

DÉFINITION 2.2.4 Soit $x \in \Omega'$. La multiplicité de la composante $V^{(i)}(x)$ relativement à \mathcal{L} dans Ω' est le supremum des entiers m^i , définis comme en (2.4) ci-dessus, pour toutes les suites (x_n) convergeant vers x .

Par la suite on notera $m_{\mathcal{L}}(V^{(i)}(x))$ (ou $m(V^{(i)}(x))$ si ce n'est pas ambigu) la multiplicité. Si x n'est pas à l'intersection de plusieurs composantes irréductibles de $V(x)$ on parlera de multiplicité de $V(x)$ dans \mathcal{L} au point x .

PROPOSITION 2.2.5 La multiplicité est bornée dans Ω' .

En effet comme le volume de toutes les composantes irréductibles est minoré par $C_{\Omega'}$, la multiplicité est majorée par $C/C_{\Omega'}$.

PROPOSITION 2.2.6 Soit $x \in \text{Supp}(\mathcal{L}) \cap \Omega'$. Il existe un voisinage U de x biholomorphe au bidisque \mathbb{B} , et $r > 0$ tels que pour tout $y \in B(x, r)$, $V(y)$ soit un revêtement ramifié de degré $\leq d$ sur la première coordonnée dans \mathbb{B} .

PREUVE : le théorème de structure locale des ensembles analytiques (théorème de préparation de Weierstraß), appliqué à $V(x)$ dit que $V(x)$ est une courbe horizontale (revêtement ramifié) dans un certain bidisque autour de x , et si y est suffisamment proche de x , ce sera le cas pour $V(y)$ car les deux courbes sont proches en distance de Hausdorff. Il reste à appliquer la proposition 2.2.5. \square

PROPOSITION 2.2.7 La trace \mathcal{U}_1 de l'ensemble des composantes irréductibles de multiplicité 1 est un ouvert dense de $\text{Supp}(\mathcal{L})$. De plus si x est un point lisse de $V(x)$ et $V(x)$ est de multiplicité 1 en x , alors \mathcal{L} est une lamination près de x . A l'opposée, pour tout k , la trace de l'ensemble des composantes de multiplicité au moins k est un fermé de \mathcal{L} .

PREUVE : on commence par la dernière assertion. Il suffit de se placer dans Ω' . Supposons que (x_n) est une suite de points tendant vers x et telle que $V(x_n)$ ait en x_n une composante irréductible $V'(x_n)$ de multiplicité $\geq k$ dans \mathcal{L} . On a vu que $V'(x_n) \rightarrow V(x)$. Soit pour tout n une suite $W_{n,j}$ tendant vers $V(x_n)$ quand $j \rightarrow \infty$, où la convergence est de multiplicité $\geq k$ sur $V'(x_n)$, i.e. au sens des courants on a $[W_{n,j}] \rightarrow k[V'(x_n)] + [D_n]$ où D_n est un certain diviseur. Par un procédé diagonal on construit une sous suite de $W_{n,n}$ convergeant au sens

des courants vers $k[V(x)] + [D]$: les composantes irréductibles en x sont bien de multiplicité au moins k .

L'ensemble des composantes de multiplicité 1 est donc ouvert. On vérifie qu'il est dense : si V' est une composante irréductible quelconque d'une feuille V de \mathcal{L} , soit V_n une suite de feuilles convergeant vers V avec multiplicité maximale $m(V')$ sur V' . Si les V_n n'étaient pas de multiplicité 1 pour n assez grand, en appliquant le raisonnement ci-dessus on construirait une suite de composantes tendant vers V' avec multiplicité $> m(V')$, ce qui est impossible.

Enfin, si x et y sont proches, $V(x)$ et $V(y)$ sont proches en distance de Hausdorff, et donc si x est un point lisse de V et V est de multiplicité 1 en x , $V(y)$ est localement un graphe au dessus de V , et \mathcal{L} est une lamination près de x . \square

Cette proposition donne des renseignements précis sur la structure de \mathcal{L} : l'ensemble des points singuliers des feuilles est un fermé d'intérieur vide dans \mathcal{U}_1 , puisque son complémentaire est une lamination ouverte dans \mathcal{U}_1 . De même l'ensemble des feuilles réductibles est discret dans \mathcal{U}_1 : si une feuille est limite de feuilles réductibles, chaque feuille contribue à la multiplicité. La conjonction de ces deux résultats dit que \mathcal{U}_1 est laminé sur un ouvert dense (i.e. hors des points singuliers des feuilles).

REMARQUE 2.2.8 Nous ne savons pas s'il peut y avoir dans \mathcal{U}_1 une quantité non dénombrable de feuilles singulières. Plus précisément nous conjecturons que l'ensemble des courbes singulières est discret dans \mathcal{U}_1 .

On peut par ailleurs itérer la proposition : $\mathcal{L}_2 := \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}_1$ est une lamination à plis, et on peut construire dans \mathcal{L}_2 l'ouvert dense \mathcal{U}_2 des feuilles de multiplicité 1 dans \mathcal{L}_2 (ces feuilles sont de multiplicité au moins 2 dans \mathcal{L}) qui est "laminé en courbes singulières" comme précédemment. Dans Ω' , comme la multiplicité est bornée, le processus aboutit et \mathcal{L} admet donc dans Ω' une structure stratifiée $\mathcal{L} = \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_k$ en feuilles de multiplicité strictement croissante (dans \mathcal{L}), chacun des \mathcal{U}_q étant un ouvert dense de $\mathcal{U}_q \cup \dots \cup \mathcal{U}_k$, qui est un ensemble fermé.

THÉORÈME 2.2.9 *Il existe dans Ω' une stratification finie de \mathcal{L} en $\mathcal{L} = \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_k$ où pour tout q , \mathcal{U}_q est un ouvert dense de la lamination à plis $\mathcal{L}_q = \mathcal{U}_q \cup \dots \cup \mathcal{U}_k$. De plus si $V \subset \mathcal{U}_q$ est une feuille de \mathcal{L} , $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}_q}$ est une lamination au voisinage de tout point lisse de V .*

Cette stratification apparaît naturellement dans l'exemple 2.2.2, en courbes de degré 2 et de degré 1, ainsi que dans [BS8], §5. Une remarque pour conclure : si toutes les feuilles sont lisses (c'est le cas par exemple dans l'exemple 2.2.2), et que l'on raffine la topologie induite de \mathbb{C}^2 sur \mathcal{L} de façon à séparer les \mathcal{U}_q , la lamination à plis aura une structure de (vraie) lamination pour la nouvelle topologie. Nous étudierons un procédé analogue pour construire des laminations subordonnées à des courants laminaires au chapitre 5.

Courants uniformément laminaires à plis.

DÉFINITION 2.2.10 *T est un courant uniformément laminaire à plis si pour tout $x \in \text{Supp}(T)$ il y a un voisinage $\mathcal{N}(x)$ de x , une constante C , et une lamination à plis \mathcal{L} de paramètre C de $\mathcal{N}(x)$, telle que*

$$T|_{\mathcal{N}(x)} \in \overline{\text{Conv}(\mathcal{L})},$$

où $\text{Conv}(\mathcal{L})$ est le cône convexe engendré par \mathcal{L} .

Le cas des courants uniformément laminaires correspond à celui où \mathcal{L} est une lamination. En effet il résulte du théorème de représentation intégrale de Choquet que localement

$$T|_{\mathcal{N}(x)} = \int [V] d\mu(V)$$

où μ est une mesure finie sur \mathcal{L} . Ω étant un ouvert de \mathbb{C}^2 , on note

$$ULP_C(\Omega) = \left\{ T, \exists \mathcal{L} \text{ lamination à plis de paramètre } C \text{ dans } \Omega \text{ t.q. } T \in \overline{\text{Conv}(\mathcal{L})} \right\}.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer que ULP_C est fermé et que les courants uniformément laminaires y sont denses (on dira d'un courant uniformément laminaire appartenant à ULP_C qu'il est *de paramètre* C).

THÉORÈME 2.2.11 *$ULP_C(\Omega)$ est fermé.*

PREUVE : on considère une suite de courants (T_n) de ULP_C , $T_n \in \overline{\text{Conv}(\mathcal{L}_n)}$, $T_n \rightarrow T$. Fixons $\Omega' \subset \subset \Omega$. Par un argument d'exhaustion, il suffit de montrer que $T \in ULP_C(\Omega')$.

La première étape est de construire une lamination à plis \mathcal{L} , "limite" des \mathcal{L}_n . L'idée naturelle est la suivante : on considère une suite (x_p) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence contient $\text{Supp}(T)$, et la feuille $V_n(x_p)$ de \mathcal{L}_n passant par x_p ; par un procédé diagonal on fait converger tous les $V_n(x_p)$ quand $n \rightarrow \infty$ et la disjonction des feuilles persiste à la limite. L'argument que nous utiliserons est sensiblement le même, le point est qu'il faut choisir la suite (x_p) convenablement : il est nécessaire de considérer toutes les valeurs d'adhérence possibles de $\text{Supp}(\mathcal{L}_n)$.

Soit $T_n^1 \leq T_n$ le courant formé de toutes les feuilles de T_n intersectant $\overline{\Omega'}$, on a $T_n|_{\Omega'} = T_n^1|_{\Omega'}$, donc quitte à extraire on peut supposer que $T_n^1 \rightarrow T^1$, et $T_1|_{\Omega'} = T|_{\Omega'}$. Par la suite on s'intéressera uniquement à T_n^1 , et sans perte de généralité on renomme T_n^1 (resp. T_1) en T_n (resp. T), \mathcal{L}_n^1 en \mathcal{L}_n (i.e. on suppose que toutes les feuilles coupent Ω').

Soit X_0 l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\text{Supp}(\mathcal{L}_n)$, $X_0 \supset \text{Supp}(T)$, soit $x_0 \in X_0$, et considérons une suite $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \text{Supp}(\mathcal{L}_n)$. On fait une première extraction $\varphi_0(n)$ de façon à ce que $V_{\varphi_0(n)}(x_{\varphi_0(n)}) \rightarrow V_0 \ni x_0$ (théorème de Bishop). On considère X_1 l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\text{Supp}(\mathcal{L}_{\varphi_0(n)})$, $X_1 \supset \text{Supp}(T)$, $X_1 \ni x_0$. Soit r_1 le supremum des rayons r d'une boule centrée en $y \in X_1 \cap \Omega'$, et évitant x_0 , et choisissons $x_1 \in X_1$, tel que $x_0 \notin B(x_1, \frac{r_1}{2})$. On fait une extraction $\varphi_1(n)$ de $\varphi_0(n)$ telle qu'il y ait une suite $V_{\varphi_1(n)}$, subordonnée à $\mathcal{L}_{\varphi_1(n)}$, convergeant vers $V_1 \ni x_1$.

Ainsi de suite on construit une suite de fermés emboîtés $X_p \supset \text{Supp}(T)$, une suite de points (x_p) , telle que $\{x_0, \dots, x_p\} \subset X_p \cap \Omega'$, une suite de rayons r_p (r_{p+1} est le supremum des rayons r d'une boule centrée en $y \in X_p \cap \Omega'$ évitant $\{x_0, \dots, x_p\}$), une suite d'extractions successives $\varphi_p(n)$, et une suite de courbes $V_{\varphi_p(n)}$ subordonnée à $\mathcal{L}_{\varphi_p(n)}$, $V_{\varphi_p(n)} \rightarrow V_p \ni x_p$. De plus X_p est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\text{Supp}(\mathcal{L}_{\varphi_{p-1}(n)})$.

Soit X l'intersection des X_p , X contient $\text{Supp}(T)$. Remarquons d'abord que (x_p) est dense dans $X \cap \Omega'$. En effet, premièrement $r_p \rightarrow 0$, sinon on pourrait construire une infinité de boules disjointes de $X \cap \Omega'$ de rayon minoré, et ensuite s'il existait $y \in X \cap \Omega'$ tel que $B(y, r)$ évite $\{x_p\}$, on aurait $r < r_p$ pour tout p ce qui est impossible. Par ailleurs par construction les courbes V_p sont disjointes ou égales, puisqu'on a pris garde de faire des extractions successives. La clôture de $\{V_p, p \geq 0\}$ est donc une lamination à plis \mathcal{L} .

Nous montrons dans un deuxième temps que $T \in \overline{\text{Conv}(\mathcal{L})}$. Supposons le contraire. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme test ϕ telle que $\langle T, \phi \rangle \leq 0$ et $\langle [V], \phi \rangle > 0$ pour tout $V \in \mathcal{L}$. Soit $\varphi(n)$ une extraction diagonale des $\varphi_p(n)$; on a $\langle T_{\varphi(n)}, \phi \rangle \leq 0$ pour tout n assez grand, donc il existe $V_{\varphi(n)} \in \mathcal{L}_{\varphi(n)}$, avec $\langle [V_{\varphi(n)}], \phi \rangle \leq 0$. Quitte à extraire une fois de plus on peut supposer ⁴ qu'une suite de points $x_{\varphi(n)} \in V_{\varphi(n)}$ converge vers $x \in X$. Alors $V_{\varphi(n)}$ converge vers la feuille $V(x)$ de \mathcal{L} passant par x (si $V_{\varphi(n)}$ avait une valeur d'adhérence $W \neq V(x)$, $V_{\varphi(n)}$ intersecterait une courbe $V_{\varphi(n)}(x_p)$ ce qui est absurde). En particulier $\langle [V(x)], \phi \rangle \leq 0$ ce qui est la contradiction recherchée. \square

Nous utilisons dans la proposition à venir la stratification mise en évidence au paragraphe précédent. Remarquer qu'on peut facilement construire un courant (diffus) subordonné à l'exemple 2.2.2 et qui charge toutes les strates.

PROPOSITION 2.2.12 *Soit un courant T de $ULP_C(\Omega)$. On suppose que l'ensemble des courbes singulières de la lamination à plis correspondante est de $\|T\|$ mesure nulle. Alors T est limite croissante de courants uniformément laminaires.*

Nous avons discuté l'hypothèse faite sur T dans la remarque 2.2.8.

PREUVE : il suffit de traiter le cas des courants diffus. D'après le théorème 2.2.9 on peut écrire

$$T = \mathbf{1}_{\mathcal{U}_1} T + \cdots + \mathbf{1}_{\mathcal{U}_k} T = \mathbf{1}_{\mathcal{U}_1^r} T + \cdots + \mathbf{1}_{\mathcal{U}_k^r} T,$$

où \mathcal{U}_q^r est l'ensemble des variétés régulières de \mathcal{U}_q . Soit $(K_q^i)_{i \geq 0}$ une exhaustion de \mathcal{U}_q^r par des fermés saturés par \mathcal{L} . Les courants $T|_{K_q^i}$ sont uniformément laminaires et à supports disjoints, et T est limite croissante, quand $i \rightarrow \infty$ de la suite $\mathbf{1}_{K_1^i} T + \cdots + \mathbf{1}_{K_k^i} T$. \square

Si l'ensemble des variétés singulières est chargé par T , on ne peut pas écrire T comme limite croissante de courants uniformément laminaires dans Ω . Néanmoins T appartient à $\overline{\text{Conv}(\mathcal{L})}$ donc T est limite de combinaisons linéaires finies de courants d'intégration sur des courbes de \mathcal{L} . Etant donnée une telle combinaison, formée de courbes disjointes, on peut approcher celles d'entre elles qui sont singulières par des courbes lisses en préservant leur disjonction. Ceci prouve que T est limite de courants uniformément laminaires de paramètre C .

⁴On ne peut pas supposer que $x \in \text{Supp}(T)$, c'est pour cela qu'on ne peut pas se contenter de l'approche esquissée en début de preuve

2.3. Courants laminaires.

Les courants laminaires ont été introduits dans [BLS], sous une forme légèrement différente de la nôtre. Nous donnons ici une définition (plus faible) de la notion de courant laminaire, et discutons des liens entre les deux définitions. Nous rappelons également un certain nombre de résultats utiles ainsi que quelques exemples, afin d’attirer l’attention du lecteur sur certaines difficultés, liées notamment à la notion de “prolongement analytique des feuilles”, et de tenter de justifier les nouvelles définitions. On fixe $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert borné.

DÉFINITION 2.3.1 *T est laminaire dans Ω s’il existe une suite croissante de courants $(T^i)_{i \geq 0}$, telle que pour tout i il existe une subdivision \mathcal{Q}_i de Ω , à un ensemble de $\|T\|$ mesure nulle près, en ouverts disjoints, et*

$$T^i = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_i} T_Q^i$$

soit la somme des courants T_Q^i , uniformément laminaires dans $Q \in \mathcal{Q}_i$, et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^i = T.$$

Comme les bords des subdivisions ne sont jamais chargés par le courant, quitte à remplacer \mathcal{Q}_i par la subdivision $\mathcal{Q}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Q}_i$ constituée des $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$, $Q_i \in \mathcal{Q}_i$, on peut toujours supposer que la suite de subdivisions est croissante (i.e. de plus en plus fine). D’après la proposition 2.3.4 ci dessous (voir aussi la proposition 2.2.12), on peut remplacer dans la définition “uniformément laminaire” par “uniformément laminaire à plis”. Observons que les disques de T_Q^i peuvent réapparaître dans $T_{Q'}^j$, $Q' \subset Q$.

DÉFINITION 2.3.2 ([BLS]) *T est faiblement laminaire si pour tout $x \in \text{Supp}(T)$ il existe un voisinage U de x tel que $T|_U$ soit l’intégrale directe dans U d’une famille mesurable de disques holomorphes compatibles, i.e. : il existe un espace mesuré (\mathcal{A}, μ) σ -fini et f_a une famille de plongements holomorphes $f_a : \mathbb{D} \rightarrow U$ tels que $(a, z) \mapsto f_a(z)$ est mesurable,*

$$a \neq b \Rightarrow f_a(\mathbb{D}) \cap f_b(\mathbb{D}) \text{ est ouvert dans } f_a(\mathbb{D}) \text{ et } f_b(\mathbb{D}),$$

et

$$T|_U = \int_{\mathcal{A}} [f_a(\mathbb{D})] d\mu(a). \tag{2.5}$$

Si de plus les disques $f_a(\mathbb{D})$ sont disjoints on dira que T est simple, ou de multiplicité localement constante.

La définition de la laminarité par Bedford, Lyubich et Smillie est ce que nous appelons ici “faiblement laminaire à multiplicité localement constante” (cette terminologie sera justifiée plus loin). Schématiquement parlant, voici certaines raisons qui nous ont poussés à adopter cette définition (qui nous a été suggérée par le rapporteur de l’article [Du2]) : premièrement

il nous semble que les arguments de [BLS], ainsi que ceux de [Ca], ne permettent pas de démontrer que la multiplicité est localement constante ; de plus nos résultats sur l'intersection géométrique des courants laminaires (voir chapitre 4) ne font pas la différence entre les deux notions. Il est à noter que nous donnerons au chapitre 5 une preuve du fait que les courants de [BLS] (i.e. associés aux automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2) satisfont effectivement la condition de simplicité (multiplicité localement constante).

On peut aussi extraire de [BeS] une notion plus faible de laminarité, qui est la notion de courant dirigé par une famille de disques compatibles (ou disjoints, c'est ici équivalent). Nous ne considérerons pas cette notion dans la suite (voir cependant la remarque 2.3.5).

PROPOSITION 2.3.3 *Les définitions 2.3.1 et 2.3.2 sont équivalentes. Autrement dit un courant est laminaire au sens de 2.3.1 si et seulement s'il est faiblement laminaire au sens de [BLS].*

PREUVE : supposons d'abord que T soit faiblement laminaire (non nécessairement simple) au sens de la définition 2.3.2, alors il est montré dans [BLS] que T est limite croissante de sommes de courants uniformément laminaires. Nous détaillons leur argument car la méthode de projection sera utilisée de nombreuses fois par la suite. On considère une projection linéaire π telle que l'ensemble des disques de \mathcal{A} qui sont verticaux pour π soit de $\|T\|$ -mesure nulle. Etant donné un quadrillage \mathcal{Q}_i de la base de projection (droite complexe) en carrés de même taille r_i , on considère la subdivision de Ω en $\pi^{-1}(q)$, $q \in \mathcal{Q}_i$. Posons pour $a \in \mathcal{A}$, $D_a = f_a(\mathbb{D})$. On dit qu'une composante connexe de $Q \cap D_a = \pi^{-1}(q) \cap D_a$ est bonne si c'est un graphe au dessus de q pour π , mauvaise sinon. Remarquer en particulier que si $\partial D_a \cap Q \neq \emptyset$, autrement dit si π n'est pas propre sur D_a , les composantes connexes correspondantes sont mauvaises. $Q = \pi^{-1}(q)$ étant fixé on forme le courant

$$T_Q = \int_{\mathcal{A}_Q} [D_a \cap Q] d\mu(a)$$

où \mathcal{A}_Q est l'ensemble des bonnes composantes au dessus de q . Alors T_Q est uniformément laminaire dans Q . Soit

$$T^i = \sum_{Q \in \pi^{-1}\mathcal{Q}_i} T_Q,$$

par choix de la projection la suite de courants T^i croit vers T quand $r_i \rightarrow 0$, donc vérifie les hypothèses de la définition 2.3.1.

Réciproquement, supposons que T soit laminaire au sens de 2.3.1. La suite des subdivisions \mathcal{Q}_i étant croissante, tout $Q \in \mathcal{Q}_i$ est réunion à $\|T\|$ mesure nulle près de $Q' \in \mathcal{Q}_{i+1}$. Si $Q' \in \mathcal{Q}_{i+1}$ on a $(T^i)|_{Q'} \leq (T^{i+1})|_{Q'} = T_{Q'}^{i+1}$. Les courants $(T^i)|_{Q'}$ et $T_{Q'}^{i+1}$ étant uniformément laminaires, par la proposition 2.1.4, $(T^i)|_{Q'}$ est subordonné dans Q' à $T_{Q'}^{i+1}$. On peut donc construire inductivement l'ensemble des disques \mathcal{A} et la mesure $\mu : \mathcal{A}_i$ étant construit on lui adjoint les disques correspondant à

$$\sum_{Q' \in \mathcal{Q}_{i+1}} \left(T_{Q'}^{i+1} - (T^i)|_{Q'} \right)$$

qui sont compatibles avec ceux de \mathcal{A}_i . □

PROPOSITION 2.3.4 *Les courants uniformément laminaires à plis sont laminaires (et simples).*

PREUVE : il faut juste prendre garde aux singularités des feuilles (sans singularités c'est la proposition 2.2.12). On sait que T se décompose selon la stratification en $T = \mathbf{1}_{\mathcal{U}_1}T + \cdots + \mathbf{1}_{\mathcal{U}_k}T$ et dans chacune des strates, l'ensemble des singularités des feuilles est un fermé de $\|T\|$ -mesure nulle. Ceci permet de considérer une exhaustion du complémentaire des points singuliers par une famille de disques disjoints. \square

Il y a une représentation alternative à (2.5) d'un courant laminaire comme intégrale directe de courants d'intégration. Il existe une famille mesurée de disques *disjoints* Δ_α et sur chaque Δ_α une fonction semi continue inférieurement p_α , la *fonction de multiplicité*, tels que T s'écrive localement sous la forme

$$T = \int p_\alpha[\Delta_\alpha]d\nu(\alpha). \quad (2.6)$$

On peut construire cette représentation en reprenant la preuve de la proposition 2.3.3 La fonction de multiplicité traduit le fait que des bonnes composantes pour la résolution \mathcal{Q} peuvent être des sous disques de bonnes composantes pour une résolution moins fine. Cette construction s'exprime élégamment en termes de *support stratifié*⁵ du courant [BLS]. Bien entendu si les disques de départ D_α sont disjoints les fonctions p_α sont localement constantes, ce qui justifie la terminologie. La mesure ν n'a de sens "transverse". que dans le cas de courants à multiplicité localement constante. Nous verrons à la section 5.3 comment rendre cette assertion précise pour certaines classes de courants.

REMARQUE 2.3.5 Les courants dirigés, au sens de [BeS], par une famille de disques disjoints, ont une représentation de la forme (2.6), mais p_α n'est pas nécessairement égale $\|T\|$ -p.p. à une fonction s.c.i.. C'est le cas en particulier si $T = [D_2] - [D_1]$ où $D_1 \subset\subset D_2$ sont deux disques holomorphes tels que ∂D_1 soit d'aire positive dans D_2 . Autrement dit T est un courant dirigé par D_1 (et de plus $T \leq D_1$) mais n'est pas laminaire. Nous ne connaissons pas de tels contre exemples fermés.

PROPOSITION 2.3.6 *Soient $T_1 \leq T_2$ des courants laminaires, T_2 s'écrivant*

$$T_2 = \int_{\mathcal{A}} p_\alpha[\Delta_\alpha]d\nu(\alpha).$$

Alors T_1, T_2 ont des représentations compatibles au sens où T_1 peut s'écrire

$$T_1 = \int_{\mathcal{A}} q_\alpha[\Delta_\alpha]d\nu(\alpha)$$

où $q_\alpha \leq p_\alpha$ presque partout.

On dira que T_1 est dans ce cas *subordonné* à T_2 . Le résultat est notamment intéressant lorsque T_1 est uniformément laminaire, puisqu'il donne un sens précis à la notion de "disque subordonné" à T_2 : le disque Δ est *subordonné* à T_2 si dans un ouvert U il existe un courant

⁵On dira qu'une famille ξ de disques de Ω (d'aire finie) est un support stratifié de T (muni de la représentation(2.5)) si $E = \cup_{\alpha \in \xi} \alpha$ est un borélien de $\|T\|$ mesure totale, ξ est une partition mesurable de E (localement les niveaux d'une fonction mesurable)et pour μ presque tout disque D_α , D_α est réunion à mesure nulle près d'une famille au plus dénombrable de $\alpha \in \xi$. Tout courant laminaire admet un support stratifié.

uniformément laminaire $T_1 \leq T_2$, et Δ est inclus dans une feuille L de $\mathcal{L}(T_1)$, qui est située dans le support de la mesure transverse. Cette notion est indépendante de la représentation (2.6).

PREUVE : (voir [BLS] lemme 6.9) la preuve est une variation sur celle de la proposition 2.1.4. Il suffit de traiter le cas où $S \leq T_2$ est uniformément laminaire. On a la représentation

$$T_2 = \int_{\mathcal{A}} p_\alpha[\Delta_\alpha] d\nu(\alpha),$$

et comme à la proposition 2.1.4, d'après le théorème de Radon-Nikodym et la simplicité des champs de (1,1) vecteurs associés aux courants laminaires, on peut écrire $S = fT_2$ où f est une fonction définie sur $\text{Supp}(T_2)$, $0 \leq f \leq 1$, $\|T_2\|$ -presque partout, d'où

$$S = \int_{\mathcal{A}} fp_\alpha[\Delta_\alpha] d\nu(\alpha).$$

Soit \mathcal{A}_Q l'ensemble des disques de \mathcal{A} , qui sont des graphes au dessus de q pour une projection π (q est un carré d'un quadrillage assez fin et π est une projection générique), comme à la proposition 2.3.3, et soit S_Q défini par

$$S = S_Q + S' = \int_{\mathcal{A}_Q} fp_\alpha[\Delta_\alpha] d\nu(\alpha) + S'.$$

Soit E la réunion des disques de \mathcal{A}_Q ; l'adhérence de E est une lamination de Q en graphes pour π . Pour les mêmes raisons qu'à la proposition 2.1.4, si $x \in \Delta_\alpha \subset E$ (on suppose x dans le support de $f d\nu$), la restriction à Q de la feuille de $\mathcal{L}(S)$ passant par x et $\Delta_\alpha \cap Q$ coïncident. En particulier S_Q est uniformément laminaire, et subordonné à la lamination \mathcal{A}_Q et donc fp_α est presque sûrement constante sur Δ_α . \square

EXEMPLE 2.3.7 Le pinceau des droites passant par 0 dans \mathbb{C}^2 , muni de la mesure préimage de la mesure de Fubini-Study de \mathbb{P}^1 , définit un courant laminaire : il suffit pour cela de subdiviser chacune des droites en réunion de disques évitant l'origine. D'après notre définition de la subordination –et contrairement à celle utilisée par Cantat [Ca]– aucun disque passant par 0 n'est subordonné au courant. L'avantage de notre définition est qu'elle évite de parler de “disque presque sûrement subordonné à T ”.

EXEMPLE 2.3.8 Voici une classe de courants horizontaux dans $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ (positifs et fermés), due à Slodkowski [Sl], extrêmes, à fibres totalement discontinues, et dont la structure est assez simple. Slodkowski les utilise pour construire des exemples de Wermer (i.e. des courants dont le support ne contient aucun disque), mais ils peuvent tout autant être choisis laminaires. On utilise le formalisme des fonctions multivaluées.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite injective du disque unité. On considère la suite de fonctions multivaluées

$$B_n(z) = \left\{ \pm(z - a_1) \cdots (z - a_{n-1}) \sqrt{z - a_n}, z \in \overline{\mathbb{D}} \right\},$$

et soit

$$X \text{ (resp. } X_N) = \left\{ (z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}, w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \text{ (resp. } \sum_{n=1}^N c_n b_n) b_n \in B_n(z) \right\}.$$

La suite des courants d'intégration T_N sur X_N normalisés par 2^{-N} admet un courant positif fermé adhérent T porté par X . Les c_n sont choisis suffisamment petits pour que X ait une structure de "limite projective" : autrement dit chaque point de la fibre $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap X$, $z \notin \{a_n, n \geq 1\}$ est codé par le choix des branches des $B_n(z)$. Plus précisément lors du passage de N à $N + 1$, chaque point de la fibre $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap X_N$ est "dédoublé", et c_{N+1} est choisi suffisamment petit pour que la distance entre les couples de points créés par le dédoublement de la fibre soit petite comparativement aux distances entre les points de $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap X_N$. Cela rend "l'holonomie" assez simple à analyser hors des fibres singulières $\{a_n\} \times \mathbb{C}$. La mesure transverse m^z de T est la mesure de probabilité équilibrée sur l'ensemble de Cantor ainsi construit.

Si la suite (a_n) est dense, comme X_N ne contient aucun disque au dessus de a_1, \dots, a_n , on obtient un exemple de Wermer. Si au contraire la suite (a_n) tend vers 0, on obtient un courant laminaire (simple) : si $\Delta \subset \mathbb{D}$ est un disque disjoint de la suite (a_n) , $X_N \cap (\Delta \times \mathbb{C})$ est réunion de 2^N disques, donc $T_N|_{\Delta \times \mathbb{C}}$ est uniformément laminaire (la mesure transverse de T_N est la mesure de comptage normalisée), et les valeurs d'adhérence de $T_N|_{\Delta \times \mathbb{C}}$ sont des courants uniformément laminaires dans $\Delta \times \mathbb{C}$. Le courant porté par X (on peut montrer qu'il est unique) est donc uniformément laminaire hors des fibres singulières ⁶.

EXEMPLE 2.3.9 On peut construire de nombreux exemples de courants laminaires fermés de potentiel continu, et d'auto-intersection positive au sens de la théorie du pluripotential. Dans le cas où des disques subordonnés au courant s'intersectent c'est évident : on considère un compact X de mesure nulle du disque unité \mathbb{D} portant une mesure à potentiel continu μ (il suffit que X soit non polaire). Soit le courant défini dans le bidisque par

$$T = T^v + T^h = \int_X [\{z\} \times \mathbb{D}] d\mu(z) + \int_X [\mathbb{D} \times \{w\}] d\mu(w).$$

Comme X est de mesure nulle $[\{z\} \times \mathbb{D}] = [\{z\} \times \mathbb{D} \setminus X]$ et on peut subdiviser $\mathbb{D} \setminus X$ en un ensemble dénombrable de disques disjoints. On obtient une représentation de T comme courant laminaire (simple). Par ailleurs $T \wedge T = 2T^h \wedge T^v > 0$.

Voici un exemple beaucoup plus intéressant de courant positif fermé laminaire (simple) dans \mathbb{P}^2 , dû à Demailly [De2]. Nous nous y référerons fréquemment par la suite. Soit $T = dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|)$, qui se décompose de la façon suivante :

$$T = \int_{S^1} [\{e^{i\theta}\} \times \mathbb{D}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [\mathbb{D} \times \{e^{i\theta}\}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [V_\theta] d\lambda(\theta),$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité S^1 , et $V_\theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, z = e^{i\theta}w, |z| > 1\}$. Le courant T est donc un courant laminaire, simple, fermé, de potentiel continu dans \mathbb{P}^2 , et donc $T \wedge T$ est de masse positive pour des raisons homologiques ($T \wedge T$ est la mesure de Lebesgue sur le tore unité). Le courant est de multiplicité localement constante, mais non constante, sur chacune des droites $\{z = e^{i\theta}w\}$. On remarque par ailleurs qu'il y a un ensemble non $\|T\|$ -négligeable de disques dont les prolongements analytiques s'intersectent.

⁶Le nombre de mauvaises composantes de X_n avec multiplicité est $N2^N$, donc ce courant n'est pas fortement approximable au sens du chapitre 5.

Soit $T_r = dd^c \max(\log^+ \left| \frac{z}{r} \right|, \log^+ \left| \frac{w}{r} \right|)$, et considérons le courant $T' = \int_1^2 T_r dr$, qui est positif et fermé, et se décompose en

$$T' = \int_1^2 \int_{S^1} [\{re^{i\theta}\} \times \mathbb{D}] d\lambda(\theta) dr + \int_1^2 \int_{S^1} [\mathbb{D} \times \{re^{i\theta}\}] d\lambda(\theta) dr + \int_1^2 \int_{S^1} [rV_\theta] d\lambda(\theta) dr.$$

T' est donc bien laminaire. Soit T'_3 le troisième terme de la décomposition, et soit ϕ une (1,1) forme test,

$$\langle T'_3, \phi \rangle = \int \left(\int_{rV_\theta} \phi \right) dr d\lambda(\theta) = \int \left(\int_{V_\theta} \mathbf{1}_{|z|>r} \phi \right) dr d\lambda(\theta) = \int \left(\int_{V_\theta} \alpha(|z|) \phi \right) d\lambda(\theta),$$

où $\alpha(s) = \min(s-1, 1)$ sur $[1, +\infty)$. Ceci montre que T' n'est pas de multiplicité localement constante bien que T soit fermé et laminaire.

Par ailleurs un calcul explicite montre que $T' \wedge T'$ est (à une constante multiplicative près) la mesure de Lebesgue sur la famille d'anneaux $2V_\theta \setminus V_\theta$, paramétrée par θ . En particulier $T' \wedge T'$ est absolument continue par rapport à la mesure trace de T' .

EXEMPLE 2.3.10 L'auto-intersection (au sens de la théorie du pluripotential) d'un courant laminaire ne provient pas nécessairement de l'intersection géométrique des disques ou de leurs prolongements, comme le montre l'exemple suivant. Soit un ensemble de Cantor de dimension < 1 dans le plan et G_K sa fonction de Green. On suppose que G_K est continue, et on a $G_K = 0$ sur K , $G_K > 0$ hors de K (en dynamique cette situation apparaît par exemple si $K = K_c$ est l'ensemble de Julia rempli de $z^2 + c$, $c \gg 1$). Soit $G(z, w) = \max(G_K(z), G_K(w))$, on a

$$\text{Supp}(dd^c G) \subset \{G_K(z) = G_K(w) > 0\} \cup (K \times K).$$

Comme $\dim(K \times K) < 2$, $K \times K$ n'est pas chargé par $dd^c G$; de plus l'hypersurface

$$\{G_K(z) = G_K(w) > 0\} = \{G_K(z) - G_K(w) = 0\} \setminus (K \times K)$$

est Levi-plate, donc feuilletée par des courbes analytiques. On en déduit que le courant $dd^c G$ est laminaire, uniformément dans le complémentaire de $K \times K$ par le théorème de support de Demailly [De1].

Il est possible de choisir K de telle sorte que les courbes feuilletant $\{G_K(z) = G_K(w) > 0\}$ ne se prolongent pas à travers K (à l'exception de la droite $(z = w)$). Soit un point (z_0, w_0) de $K \times K$ et un disque holomorphe local $\Delta \ni (z_0, w_0)$, que l'on pourra supposer être un graphe $\Delta = \{(\zeta, \varphi(\zeta)), \zeta \in U\}$ au dessus de la première coordonnée, tel que $\Delta \setminus (K \times K) \subset \{G_K(z) = G_K(w) > 0\}$.

On a alors $\varphi(z_0) = w_0$ et sur $U \setminus K$, $G_K(z) = G_K(\varphi(z))$, relation qui par continuité s'étend à U . Nous devons choisir K pour que ceci entraîne $\varphi = id$. D'abord, quitte à restreindre à un sous ouvert de U (que l'on notera toujours U), contenant des points de K , on peut supposer que φ n'a pas de points critiques. On peut aussi supposer que le bord de U est une ligne de niveau de G_K ; comme φ preserve G_K , φ est propre sur son image et donc φ est conforme $U \rightarrow \varphi(U)$.

Il suffit donc de construire un exemple de compact n'ayant pas d'automorphismes conformes locaux. On modifie la construction de l'ensemble de Cantor triadique usuel de la façon suivante : soient $I_0 = [0, 1]$, $I_{00} = [0, \frac{1}{3}]$, $I_{01} = [\frac{2}{3}, 1]$. A partir de ces deux intervalles on applique

itérativement le procédé suivant : soit

$$h(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{3}(1-t),$$

à l'étape $n+1$, l'intervalle $I_{\varepsilon_n} = [a, b]$ (ε_n est une suite de 0 et de 1) est remplacé par les deux intervalles

$$I_{\varepsilon_n 0} = [a, a + h(a)(b-a)] \text{ et } I_{\varepsilon_n 1} = [b - h(a)(b-a), b].$$

On obtient à la limite un compact totalement discontinu K , de mesure nulle (car $h(t) \geq 1/4$), et on vérifie aisément que

$$\frac{\log 2}{\log(1/h(a))} \leq \dim_H(K \cap [a, b]) \leq \frac{\log 2}{\log(1/h(b))}.$$

En particulier si U est un ouvert tel que $U \cap K \neq \emptyset$ toute application conforme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ préservant K est l'identité.

De plus par [T] §III.16, tous les points de K sont réguliers au sens du problème de Dirichlet donc la fonction de Green G_K existe, est continue et s'annule sur K , $G_K > 0$ et harmonique hors de K . Ainsi le courant $dd^c G$ a les propriétés requises. \square

Ces exemples, notamment l'exemple 2.3.9, sont à rapprocher de la représentation (2.6) des courants laminaires comme intégrale directe de courants d'intégration sur des disques. Il apparaît que les courants laminaires fermés peuvent avoir, en termes de prolongement analytique des disques, comme de théorie de l'intersection, des propriétés contre-intuitives. Une part essentielle de ce qui va suivre sera consacrée à la construction, puis l'étude, de classes de courants laminaires suffisamment vastes pour d'éventuelles applications dynamiques⁷ –ce que ne permettent pas les courants uniformément laminaires– et évitant, autant que faire se peut, ces comportements pathologiques.

⁷Il faut vraisemblablement limiter nos espoirs à la dynamique des applications injectives, ou de "petit" degré topologique, puisque le courant de Demailly 2.3.9 est le courant de Green d'une application holomorphe de \mathbb{P}^2 .

Chapitre 3

Construction de courants laminaires dans \mathbb{P}^2

Nous donnons un critère géométrique portant sur une suite de courbes irréductibles (singulières) dans \mathbb{P}^2 , dont le volume tend vers l'infini, pour que ses valeurs d'adhérence au sens des courants soient laminaires. Ce résultat est appliqué à la dynamique des applications méromorphes du plan projectif : nous montrons que le courant dynamique, dit “de Green” associé à une application birationnelle est laminaire ; ceci s'étend de plus aux surfaces rationnelles. Il en est de même pour une application rationnelle générique dont le degré topologique satisfait $d_t < d$ où d est le degré algébrique.

Plus précisément, nous montrons le critère (théorème 3.1) à la section 3.2. Les applications dynamiques -théorèmes 3.2 et 3.3- sont respectivement traitées aux sections 3.3 et 3.4.

Ce chapitre est une reproduction de l'article [Du2].

3.1. Introduction

In the present chapter we are interested in constructing laminar currents in \mathbb{P}^2 . Laminar currents appeared as currents of integration over entire curves in [BLS], [Ca], and as limits of dynamically defined rational divisors in [BS5]. It is well known that all positive closed currents in \mathbb{P}^2 are limits of sequences of rational divisors [De2]. Suppose $d_n^{-1}[C_n]$ converges in the sense of currents to T . Under which geometric conditions on C_n is T laminar? We prove (section 3.2) the following simple criterion, independent of holomorphic dynamics : for an irreducible algebraic curve C_n of degree d_n in \mathbb{P}^2 we denote by g_n the geometric genus of C_n (i.e. the genus of the normalization of C_n), and if $x \in \text{Sing}(C_n)$ is a singular point, we let $n_x(C_n)$ be the number of local irreducible components at x .

THEOREM 3.1 *Suppose the C_n are irreducible curves such that $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$. Then, using the notations above, if*

$$g_n + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d_n)$$

then T is laminar.

Note that, by the genus formula, sequences of smooth curves do never satisfy the assumption of the theorem. Furthermore all currents in \mathbb{P}^2 are limits of smooth divisors so the condition of the theorem is not necessary.

The proof of the theorem is modeled on the results of Bedford, Lyubich and Smillie [BLS], [BS5], who proved laminarity of T when the curves C_n are iterates of some line by a polynomial automorphism of \mathbb{C}^2 . This corresponds in this theorem to the case $g_n = 0$ and C_n is singular at one point I , with $n_I(C_n) = 1$.

This criterion can in turn be applied to obtain new examples of laminar currents in holomorphic dynamics on \mathbb{P}^2 . Let \mathcal{M}_d be the space of rational maps of degree d , which has the structure of a projective space. We say that a subset $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_d$ is Zariski residual if it contains a countable intersection of Zariski open sets. It is known [Si1] that the existence of the dynamical ‘‘Green’’ current is valid on the Zariski residual set of dominating algebraically stable maps (for details see section 3.3).

THEOREM 3.2 *There exists a Zariski residual set $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_d$, such that if $f \in \mathcal{U}$ and its topological degree $d_t(f)$ satisfies $d_t(f) < d$, then the Green current of f exists and is laminar.*

Concerning the case of bimeromorphic maps ($d_t = 1$) of smooth connected projective surfaces, it is possible to state a more precise result. It is a combination of results of Cantat [Ca] and Diller-Favre [DF], that if such a map has positive topological entropy, then its Green current always exists (in a sense to be precised, see section 3.4).

THEOREM 3.3 *The Green current of a bimeromorphic map of positive topological entropy of a projective surface is laminar.*

3.2. Laminar currents as limits of divisors in \mathbb{P}^2

It is well known that any positive closed current in \mathbb{P}^2 is the limit in the weak sense of currents, of a sequence of rational divisors [De2]. In this section we prove that under some geometric conditions on the (irreducible) divisors, the limit is a laminar current ; this criterion turns out to be useful in some dynamical problems (see section 3.3).

We begin with some notation : (C_n) is a sequence of (possibly singular) irreducible curves in \mathbb{P}^2 , with $d_n = \deg(C_n) \rightarrow \infty$, such that $\frac{1}{d_n}[C_n] \rightarrow T$, where \rightarrow denotes the weak convergence of currents. We denote by :

- $\pi : \widehat{C}_n \rightarrow C_n$ the resolution of singularities of C_n ;
- g_n the geometric genus of C_n , i.e. $g_n = \text{genus}(\widehat{C}_n)$;
- $\nu_x(C_n)$ the multiplicity of C_n at x ; $\nu_x(C_n)$ is the number of intersection points of C_n with a generic line near x ;
- $n_x(C_n)$ the number of local irreducible components of C_n at $x \in C_n$, that is, $n_x(C_n) = \#\pi^{-1}(x)$.

THEOREM 3.2.1 *Let (C_n) be a sequence of irreducible curves in \mathbb{P}^2 of degree $d_n \rightarrow \infty$, such that the sequence of rational divisors $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$. Then, using the notations above, if*

$$g_n + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d_n) \quad (3.1)$$

then T is laminar.

The condition of the theorem is of course not necessary : take an arbitrary sequence of curves (C_n) , and pick a sequence $r_n \rightarrow \infty$, such that $d_n^{-1}[h_{r_n}(C_n)]$ tends to the line at infinity in the sense of currents where $h_r(z, w) = (rz, rw)$. A less trivial example is the current $dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|)$ considered in example 2.3.9, which is the limit of the sequence $\frac{1}{n}[D_n]$ where D_n is the smooth curve (in homogeneous coordinates $[z : w : t]$) of equation $z^n + w^n + t^n = 0$. Concerning this last current, we have in fact the following finer result (see section 4.4) : T is not approximable in the weak sense by a sequence of divisors $d_n^{-1}[C_n]$ satisfying (3.1).

The remaining of this section will be devoted to the proof of theorem 3.1. The basic idea to count good and bad components is similar to [BLS], [BS5], but this theorem is independent of any dynamical context.

Let $p \in \mathbb{P}^2$ and π_p be the central projection $\mathbb{P}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ ([GH]) ; we consider a subdivision \mathcal{Q} of \mathbb{P}^1 into disjoint simply connected open sets (which we will call “squares”) which have the same area with respect to the Fubini-Study metric $\omega_{\mathbb{P}^1}$; we also suppose that the boundaries of the squares are piecewise smooth. Such a subdivision \mathcal{Q} will be called *admissible*. Note that $\pi_p^{-1}(Q)$ is isomorphic to $Q \times \mathbb{C}$ ($Q \in \mathcal{Q}$).

We say that a connected component Γ of $C_n \cap \pi_p^{-1}(Q)$ is *good* if $\pi_p : \Gamma \rightarrow Q$ is a homeomorphism (i.e. Γ is a graph over Q), *bad* if not. The *multiplicity* of the bad component Γ is the topological degree $\deg(\pi_p|_\Gamma)$. The number of bad components of C_n for the projection π_p with respect to Q is by definition always counted with multiplicity. We denote this number by $bc_p(C_n, Q)$.

It is clear that if $p \notin C_n$ the component Γ over Q is bad if and only if for some $z \in Q$ the line (pz) is tangent to C_n or hits a singular point of C_n . The next lemma roughly says that the number of bad components for a generic projection does not depend on the subdivision provided it is fine enough. Such a lemma is necessary because we will have to make $n \rightarrow \infty$ with Q fixed, so we cannot find a subdivision which is fine enough for all curves C_n .

LEMMA 3.2.2 *Fix p such that $p \notin C_n$, p does not lie on any line joining two singular points of C_n , nor any line through a singular point and tangent to C_n at some smooth point (this is a Zariski dense condition).*

Let

$$bc_p(C_n) = \sup \{ bc_p(C_n, Q), Q \text{ admissible subdivision of } \mathbb{P}^1 \},$$

then if Q is an admissible subdivision of \mathbb{P}^1 such that the critical points of $\pi_p|_{C_n}$ (including singular points of C_n) lie over different squares of Q' , then $bc_p(C_n, Q) = bc_p(C_n)$.

PROOF : We are looking for admissible subdivision maximizing the number of bad components, with p fixed as stated in the lemma. It is clear that the number of bad components decreases if some singular fiber $(pz) = \pi_p^{-1}(z)$ of the projection -that is a fiber tangent to C_n or meeting a singular point of C_n - lies over the boundary of a square Q . Then we can assume Q is chosen so that no singular fiber lies over ∂Q for $Q \in \mathcal{Q}$.

Now fix Γ a bad component of multiplicity d over $Q \in \mathcal{Q}$; suppose $\pi_p^{-1}(z_1^s), \dots, \pi_p^{-1}(z_k^s)$ are the singular fibers. We take an admissible subdivision of Q into squares $\{Q_i, 1 \leq i \leq \ell\}$ separating the singular fibers. Without loss of generality we assume for $1 \leq i \leq k$, $Q_i \ni z_i^s$. Bad components for the new subdivision are over Q_1, \dots, Q_k , with respective multiplicities d_1, \dots, d_k . We have to prove that $\sum_i d_i \geq d$.

Suppose this is false. Fix a regular fiber $\pi_p^{-1}(z^r)$ and paths γ_i in Q joining z_i^s to z^r . There are d local good plaques over a small neighborhood of z^r . For each $1 \leq i \leq k$ and $z \in \gamma_i$ near z_i^s there are d_i local plaques over z corresponding to the bad component over Q_i ; follow them by analytic continuation along γ_i . We get no more than $\sum d_i < d$ plaques over z^r . The remaining $d - \sum d_i$ plaques correspond by analytic continuation along $-\gamma_i$ to good plaques at each singular fiber $\pi_p^{-1}(z_i^s)$, giving rise to global good components over Q , a contradiction.

Any further refinement of the subdivision will produce the same number of bad components. \square

PROPOSITION 3.2.3 *Let C_n be an irreducible curve in \mathbb{P}^2 , and p a (Zariski-) generic point in \mathbb{P}^2 . Then (notations as in the beginning of the section) :*

$$bc_p(C_n) \leq 2(2g_n - 2 + 2d_n) + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n).$$

PROOF : We first list the generic assumptions we make for choosing p :

- $p \notin C_n$,

- p does not lie on any line joining two singular points of C_n ,
- p does not lie on any line through a singular point and tangent to C_n in some smooth point,
- p does not lie in any tangent line to a singular point of C_n .

then for an admissible subdivision \mathcal{Q} separating the critical fibers as in the preceding lemma, the bad components of C_n are exactly :

- components through some singular point x of C_n : the multiplicity of such a component for π_p is $\nu_x(C_n)$, because the multiplicity of C_n at x is the number of points of intersection between C_n and a generic (as above) line near the singularity ;
- components through smooth points x of C_n such that the tangent line $T_x C_n$ is the line (px) : the multiplicity of such a component is the local degree of $\pi_p|_{C_n}$ near x . If we choose coordinates so that $p = [0 : 1 : 0]$ lies in the line at infinity ($t = 0$) (in homogeneous coordinates $[z : w : t]$) and C_n has (reduced) equation $(P_n = 0)$, then C_n has a vertical tangent at x and the local degree of π_p is the intersection multiplicity $I_x(P_n, \frac{\partial P_n}{\partial z})$ (this formula is false for singular points).

The remaining of the proof is now a careful examination of the Riemann-Hurwitz formula (see [GH]) for the projection $\pi_p \circ \pi : \widehat{C}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ (recall that $\pi : \widehat{C}_n \rightarrow C_n$ is the resolution of singularities). $\pi_p \circ \pi$ is a branched covering, let \mathcal{R} be the set of its critical points, and $v(x)$ be its local degree near $x \in \mathcal{R}$. The Riemann-Hurwitz formula states :

$$\chi(\widehat{C}_n) = 2 - 2g_n = d_n \chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{x \in \mathcal{R}} (v(x) - 1), \quad (3.2)$$

with $\chi(\mathbb{P}^1)=2$. We want to relate this to the number of bad components for the projection π_p . First, remark that there may be points $x \in \widehat{C}_n$ with $\pi(x) \in \text{Sing}(C_n)$ but $x \notin \mathcal{R}$ (e.g. if the singularity is an ordinary multiple point); for those x , $v(x) = 1$. Let $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \pi^{-1}(\text{Sing}(C_n))$, we then have

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} (v(x) - 1) = \sum_{x \in \mathcal{R}} (v(x) - 1).$$

We claim that

$$bc_p(C_n) = \sum_{x \in \mathcal{S}} v(x).$$

Indeed if $x \in \mathcal{S} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C_n))$, the local degree of $\pi_p \circ \pi$ at x is equal to that of π_p at $\pi(x)$, and if $y_0 \in \text{Sing}(C_n)$ the multiplicity of C_n at y_0 , that is the number of intersection points between C_n and the line $\pi_p^{-1}\pi_p(y)$, y near y_0 , is exactly

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(y_0)} v(x).$$

Let $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C_n))$ and $\mathcal{S}_2 = \pi^{-1}(\text{Sing}(C_n))$. We infer

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} v(x) = \sum_{x \in \mathcal{S}_1} v(x) + \sum_{x \in \mathcal{S}_2} v(x).$$

Now for $x \in \mathcal{S}_1$ we have $v(x) \geq 2$, so $v(x) \leq 2(v(x) - 1)$, and on the other hand

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{S}_2} v(x) &= \sum_{x \in \mathcal{S}_2} (v(x) - 1) + \#\pi^{-1}(\text{Sing}(C_n)) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{R}} (v(x) - 1) + \sum_{y \in \text{Sing}(C_n)} n_y(C_n). \end{aligned}$$

Thus

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} v(x) \leq 2 \sum_{x \in \mathcal{S}_1} (v(x) - 1) + \sum_{x \in \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{R}} (v(x) - 1) + \sum_{y \in \text{Sing}(C_n)} n_y(C_n),$$

and by noting that $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{R}$, i.e. all points in \mathcal{S}_1 are critical for $\pi_p \circ \pi$, and using the Riemann-Hurwitz formula (3.2) we get the desired estimate. \square

REMARK : the inequality $v(x) \leq 2(v(x) - 1)$ used above might seem far from being sharp, however if we choose p outside the finitely many inflexive tangents to C_n , this is an equality.

Theorem 3.1 is now a consequence of the following proposition, which is a generalization of the reasoning of [BS5].

PROPOSITION 3.2.4 *Let (C_n) be a sequence of curves in \mathbb{P}^2 , of degree $d_n \rightarrow \infty$, such that the sequence $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$. Assume that for (Baire-) generic p , $bc_p(C_n) = O(d_n)$. Then T is laminar.*

Note that the hypotheses on C_n are slightly weaker than in theorem 3.1, in particular we do not make any irreducibility hypothesis, so that this proposition could apply in various contexts not particularly involving proposition 3.2.3 (the reason for the baire genericity here is that we have to choose p in a countable intersection of Zariski open sets). The main difference with [BS5] is that we make no assumption on the support of T , leading to several difficulties.

PROOF : We still consider the projection $\pi_p : \mathbb{P}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^1$, and we denote by $\omega_{\mathbb{P}^1}$ and $\omega_{\mathbb{P}^2}$ the respective Fubini-Study forms. We will construct a laminar current $T_\infty \leq T$, with

$$\langle T_\infty, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle = \langle T, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle.$$

Note that the form $\pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1}$ which is singular at the point p , is integrable with respect to all positive closed currents because in local coordinates it expresses as $dd^c \log |Z - p|$ (see the classical proof of the existence of the Lelong number at p).

Let \mathcal{Q} be an admissible subdivision of \mathbb{P}^1 , recall that the ‘‘squares’’ have the same $\omega_{\mathbb{P}^1}$ -area. Then for a good component Γ over $Q \in \mathcal{Q}$

$$\langle [\Gamma], \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle = \int_{\Gamma} \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} = \int_{\pi_p(\Gamma)} \omega_{\mathbb{P}^1} = \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q)$$

and for a bad component Γ of multiplicity m ,

$$\int_{\Gamma} \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} = m \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q).$$

Let $\mathcal{G}(Q, n)$ be the set of good components of C_n over Q , and

$$T_{\mathcal{Q}, n} = \frac{1}{d_n} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(Q, n)} [\Gamma] \leq T_n = \frac{1}{d_n} [C_n].$$

By lemma 3.2.2, $bc_p(C_n)$ dominates the number of bad components for the subdivision \mathcal{Q} , and we get

$$\langle T_n - T_{\mathcal{Q}, n}, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle \leq \frac{bc_p(C_n)}{d_n} \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q) \leq C \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q).$$

We need a normal families argument to get some laminar structure on cluster values of the sequences of currents. For this, we remark that $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathcal{Q}, n}) \leq 1$ ($\mathbf{M}_{\mathbb{P}^2}$ denotes the mass norm with respect to $\omega_{\mathbb{P}^2}$), hence

$$\# \left\{ \Gamma \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{G}(Q, n), \mathbf{M}_{\mathbb{P}^2}([\Gamma]) > 1 - \eta \right\} \leq \frac{d_n}{1 - \eta} \quad (3.3)$$

where η is some fixed positive constant (s.t. $1 - \eta \gg \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q)$).

LEMMA 3.2.5 *The family of holomorphic functions $f : Q \rightarrow \mathbb{C}$ such that*

$$\mathbf{M}_{\mathbb{P}^2}([\Gamma_f]) = \int_{\Gamma_f} \omega_{\mathbb{P}^2} \leq 1 - \eta$$

is normal, where Γ_f is the graph of f in $Q \times \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^2$, and η is some fixed positive constant.

PROOF OF THE LEMMA : suppose the result is false. By the Zalcman lemma there exist a sequence $Q \ni x_n \rightarrow x \in Q$, a sequence of positive numbers ρ_n converging to zero, and a sequence of holomorphic functions in Q satisfying the volume assumption, such that $f_n(x_n + \rho_n z)$ converges uniformly on compact sets in \mathbb{C} to a non constant entire map h . Thus the graph of $\zeta \mapsto f_n(x_n + \zeta)$ over the disk $D(0, \rho_n)$ is close to the graph Γ_n of the map $\zeta \mapsto h(\zeta/\rho_n)$. As $n \rightarrow \infty$ the cluster set of the sequence of graphs (Γ_n) contains the vertical line $\{x\} \times \mathbb{C}$, which is impossible because of the area bound. An alternate approach for this lemma is to use Bishop's Theorem [Bi]. \square

Let $\mathcal{G}'(Q, n) \subset \mathcal{G}(Q, n)$ the set of components of volume $\leq 1 - \eta$ in \mathbb{P}^2 . By dropping the components of $\mathcal{G}(Q, n) \setminus \mathcal{G}'(Q, n)$ we get a new current $T'_{\mathcal{Q}, n}$, and by (3.3) we have

$$\langle T_n - T'_{\mathcal{Q}, n}, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle \leq (C + 1/(1 - \eta)) \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q) = C' \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(Q). \quad (3.4)$$

Now we extract a subsequence n_j such that $T'_{\mathcal{Q}, n_j} \rightharpoonup T_Q \leq T|_{Q \times \mathbb{C}}$ for every Q , where $T'_{\mathcal{Q}, n} = T'_{\mathcal{Q}, n}|_{Q \times \mathbb{C}}$. We have to show that T_Q is uniformly laminar. The proof is very similar to [BS5] so we only sketch it.

Let L_x be the line $\pi_p^{-1}(x)$, $x \in Q$, and

$$\lambda_{Q, n_j}(x) = \frac{1}{d_{n_j}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}'(Q, n_j)} [\Gamma \cap L_x] = T'_{\mathcal{Q}, n_j} \wedge [L_x];$$

it is a consequence of the theory of slicing currents that the sequence $\lambda_{Q,n_j}(x)$ converges weakly for almost all $x \in Q$. As $\cup_n \mathcal{G}'(Q, n)$ is a normal family, the family of graphs meeting some compact subset of a line L_x is equicontinuous. Then if φ is a test function in $Q \times \mathbb{C}$, the family $\int_{L_x} \varphi \lambda_{Q,n}(x)$ is equicontinuous as a function of x . Thus we get that $\lambda_{Q,n_j}(x)$ converges weakly to a measure $\lambda_Q(x)$ for all $x \in Q$.

It remains to prove that $\mathcal{G}'(Q, n_j)$ “converges” to a lamination by graphs in $Q \times \mathbb{C}$. The fact that λ_Q is a transverse measure is then a consequence of weak convergence and equicontinuity.

LEMMA 3.2.6 ([BS5]) *Fix $x_0 \in Q$. Let $\mathcal{G}'(Q)$ be the set of holomorphic $f : Q \rightarrow \mathbb{C}$ such that f is the limit of some sequence of $f_{n_j} \in \mathcal{G}(Q, n_j)$ and $f(x_0) \in \text{Supp}(\lambda_Q(x_0))$. Then the graphs of $\{f, f \in \mathcal{G}'(Q)\}$ form a lamination in $Q \times \mathbb{C}$.*

PROOF OF THE LEMMA : one has to show

- for each $y \in \text{Supp}(\lambda_Q(x_0))$, there is a unique $f \in \mathcal{G}'(Q)$, s.t. $f(x_0) = y_0$;
- two distinct graphs are disjoint.

(this is more subtle than the Hurwitz Theorem since good components of different $\mathcal{G}'(Q, n_j)$ may intersect, we use the convergence of currents instead)

It suffices to show the following fact : “if a sequence $f_{n_j} \in \mathcal{G}'(Q, n_j)$ satisfies $f_{n_j}(x_0) \rightarrow y_0 \in \text{Supp}(\lambda_Q(x_0))$ then the sequence converges”. Suppose not : there exists two subsequences $f_{n_j^i} \rightarrow f^i$, $f^i(x_0) = y_0$, $i = 1, 2$, and $f^1 \neq f^2$. If y_0 is not an atom of $\lambda_Q(x_0)$, we can assume $(f^1)'(x_0) \neq (f^2)'(x_0)$: indeed we take a sequence $g_{n_j^1} \in \mathcal{G}'(Q, n_j^1)$ such that $g_{n_j^1}(x_0)$ converges to y_0' near y_0 . By extracting a further subsequence if necessary, we get a limit function g^1 whose graph does not intersect that of f^1 by the Hurwitz theorem, and so has transversal intersection with Γ_{f^2} (e.g.[BLS] lemma 6.4).

As $y_0 \in \text{Supp}(\lambda_Q(x_0))$, $\lambda_Q(x_0)(B(y_0, \varepsilon)) > \alpha$, and $\lambda_{Q,n_j^i}(x_0)(B(y_0, \varepsilon)) > \alpha/2$ for j large enough. Moreover all graphs of $\mathcal{G}'(Q, n_j^i)$ near $f_{n_j^i}(x_0)$ have slope close to $(f^i)'(x_0)$. This contradicts the convergence $T_{Q,n_j} \rightarrow T_Q$.

If y_0 is an atom of $\lambda_Q(x_0)$ of mass α , there is a sequence of intervals I_{n_j} shrinking to y_0 with mass more than $3\alpha/4$ for λ_{Q,n_j} . If there are two distinct limiting graphs for points in I_{n_j} , we contradict the convergence of currents again. \square

We have thus far proven that T_Q is a uniformly laminar current on $Q \times \mathbb{C}$, and let

$$T_Q = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} T_Q \leq T.$$

By successively refining \mathcal{Q} we get an increasing sequence T_{Q^ℓ} converging to some laminar current T_∞ . Because of the estimate (3.4), we have $\langle T_\infty, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle = \langle T, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle$.

We claim that for generically chosen p , this last relation forces $T = T_\infty$. Indeed, let $S = T - T_\infty \leq T$, S is a positive current, thus is representable by integration. This means that there is a positive measure ν_S (which is in fact the trace measure $\|S\|$ of S), and a measurable field of (1,1) vectors S_x such that $S = \int \langle S_x, \cdot \rangle d\nu_S$. If $\langle S, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle = 0$, the (1,1) vector S_x is simple and a.e. tangent to the pencil of lines through p . Now the set of points $p \in \mathbb{P}^2$ such that there is a set of positive $\|T\|$ measure of x such that T_x is directed by the

pencil through p is at most countable. It suffices to choose p outside this at most countable exceptional set to achieve the desired result. \square

Observe that there is no need in proposition 3.2.4 for the $[C_n]$ to be closed currents. More precisely we have shown :

PROPOSITION 3.2.7 *Let (C_n) be a sequence of complex submanifolds, possibly with boundary, in \mathbb{P}^2 . Assume that $d_n^{-1}[C_n] \rightharpoonup T$, where T is a positive, closed current. Assume also that for a generic projection π_p , and any admissible subdivision \mathcal{Q} of \mathbb{P}^1 , the total mass with respect to $\pi_p^*\omega_{\mathbb{P}^1}$ of the set of bad components of $[C_n]$ is $\leq Cd_n \text{Area}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{Q})$ (C is some fixed constant). Then T is laminar.*

This proposition applies for example for entire curves in \mathbb{P}^2 , in which case the control of the number of bad components comes from the Ahlfors' Covering Theorem (see [BLS] p.112, [Ca]). This yields the following corollary, which solves a question posed by Cantat (in the special case of \mathbb{P}^2) :

COROLLARY 3.2.8 *Let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2$ be an injective holomorphic mapping. Let*

$$A(r, f) = \frac{[f(D(0, R))]}{\mathbf{M}_{\mathbb{P}^2}([f(D(0, R))])}.$$

Then all closed currents in \mathbb{P}^2 which are limits of subsequences $A(r_j, f)$ are laminar.

3.3. Applications to holomorphic dynamics in \mathbb{P}^2

In this section we prove Theorem 3.2. We will define a Zariski-generic set \mathcal{U} (a countable intersection of Zariski open sets) in the space \mathcal{M}_d of rational maps of degree d in \mathbb{P}^2 , such that if $f \in \mathcal{U}$ and $d_t(f) < d$, then the dynamical “Green” current of f exists and is laminar. All rational maps considered are supposed to be *dominating*, i.e. with generically nonvanishing Jacobian determinant. We roughly describe the equations defining \mathcal{U} . Existence of the Green current requires an assumption (algebraic stability) to control the “algebraic growth” of iterates of f . We also have to understand the “topological growth” of preimages of a generic line, which leads to an additional hypothesis (H). Both hypotheses (AS) and (H) lead to a generic set in \mathcal{M}_d (prop. 3.3.1).

Let us be more specific. We consider a rational self map of \mathbb{P}^2 of degree d , given by its graph $\Gamma_f \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, Γ_f is an irreducible, possibly singular surface. We let X be the minimal desingularization of Γ_f , with the natural projections $\pi_1, \pi_2 : X \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 \mathbb{P}^2 & \text{---} & \mathbb{P}^2 \\
 & \text{Ch}_f & \text{Ch}_h
 \end{array}$$

π_1 is a composition of point blow-ups and π_2 is a holomorphic map with the same topological degree as f .

Let $I(f^\infty) = \cup_{n \geq 1} f^{-n} I(f)$ be the total indeterminacy set of f (for background on iteration of rational maps on \mathbb{P}^2 see [Si1]). The first hypothesis is classical, and is a necessary condition for the Green current to describe the asymptotic distribution of the preimage of a generic hypersurface of \mathbb{P}^2 ; namely we assume f is algebraically stable (AS) which means that $I(f^\infty)$ is at most countable. In this case it follows from [RS2] and [Si1] that there exists a current T describing the asymptotic distribution of preimages of hyperplanes. More precisely we have : suppose f is an AS rational self map of \mathbb{P}^2 , then there exists a pluripolar set E in $\check{\mathbb{P}}^2$ (the dual space of \mathbb{P}^2), such that if $L \notin E$,

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^*[L] \rightarrow T.$$

The second hypothesis is the following : for a generically finite holomorphic map $h : X \rightarrow Y$ between complex manifolds, we define $\mathcal{E}(h)$ to be the set of points in X where h is not locally finite. $\mathcal{E}(h)$ is a subvariety of X [Fi]. We say that f satisfies (H) if

$$\pi_2(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)) \cap I(f^\infty) = \emptyset. \tag{H}$$

We give another equivalent version of (H). Let $\varpi : X \rightarrow \Gamma_f$ denote the resolution of singularities, which is a composition of finitely many point blow-ups and η_1, η_2 be the natural projections $\Gamma_f \rightarrow \mathbb{P}^2$, s.t. $\pi_i = \eta_i \circ \varpi$. We claim that $\varpi(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)) \subset \Gamma_f$ is a finite set of

points, which means that the curves of $\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)$ come from the resolution of singularities of Γ_f . Indeed if a curve $D \subset \Gamma_f$ projects to some point p by η_1 , i.e. $D \subset (\{p\} \times \mathbb{P}^2) \cap \Gamma_f$, then as η_2 restricted to $\{p\} \times \mathbb{P}^2$ is 1-1, $\eta_2(D)$ is a curve, i.e. D is not contracted by η_2 . So (H) is equivalent to

$$\eta_2(\varpi(\mathcal{E}(\varpi)) \cap I(f^\infty)) = \emptyset.$$

In case $Sing(\Gamma_f)$ is zero dimensional, $\varpi(\mathcal{E}(\varpi)) = Sing(\Gamma_f)$, this means that up to the determination of the singularities of Γ_f , and the knowledge of $I(f^\infty)$ (which is necessary in order to know if f is AS), it is practically possible (though in fact probably rather difficult) to determine whether f satisfies (H) or not.

The next proposition shows that (H) is satisfied in many interesting cases.

PROPOSITION 3.3.1 (i) *An algebraically stable birational map satisfies (H);*
(ii) *(H) and (AS) are generically satisfied in the (algebraic) set of rational maps of \mathbb{P}^2 , and in the set of polynomial mappings of \mathbb{C}^2 .*

Remark that it is unclear whether (H) and (AS) are generic in subsets of maps with fixed topological degree.

PROOF : (i) suppose $x \in \pi_2(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)) \cap I(f^\infty)$, say $x \in I(f^n)$. As f is birational, $\pi_2(\mathcal{E}(\pi_2)) = I(f^{-1})$, hence $x \in I(f^n) \cap I(f^{-1})$. In particular, $f^{-1}(x)$ is not finite, contradicting that f is AS.

(ii) The set \mathcal{M}_d of dominating meromorphic maps of degree d in \mathbb{P}^2 is a Zariski open subset of a projective space \mathbb{P}^N . The subset of algebraically stable maps is a countable intersection $\mathcal{A}_d = \bigcap_n \mathcal{A}_n$ (\mathcal{A}_n is defined by $\{f \in \mathcal{M}_d \text{ s.t. } I(f^n) \text{ is finite}\}$) of Zariski open proper subsets of \mathcal{M}_d [Si1]. We show that maps satisfying (H) are generic in \mathcal{A}_d . The set of maps f such that

$$\pi_2(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)) \cap I(f^n) \neq \emptyset$$

is algebraic in \mathcal{A}_n and its complement is not empty since there are maps in \mathcal{A}_d satisfying (H) (e.g. Hé non maps of degree d).

The case of polynomial maps of degree d in \mathbb{C}^2 is similar. □

EXAMPLE : we present an explicit family of maps $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, non birational, whose generic element satisfies AS and (H). Let $g = (g_1, g_2) = (p(z) - aw, az)$ be a Hénon map of degree $d(g) \geq 3$. Let $f = (g_1^2, g_2^2)$; f is a polynomial map, $d(f) = 2d(g) \geq 6$ and $d_t(f) = 4$. We have $I(f) = I(g) = [0 : 1 : 0]$ in homogeneous coordinates $[z : w : t]$, and $f((t=0) \setminus I) = [1 : 0 : 0] =: q \neq I$ so $I(f^\infty) = I(f)$ and f is AS.

Let L be a linear automorphism $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ and denote also by L its extension $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. We get $d(L \circ f) = d(f)$, $d_t(L \circ f) = d_t(f)$, $I(L \circ f) = I(f) = I$ and if $L(q) \neq I$, $L \circ f$ is AS and $I((L \circ f)^\infty) = I$. We now prove that for generic L , $L \circ f$ satisfies (H).

Let $id \otimes L$ be the map $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, Ly)$; one checks that $\Gamma_{L \circ f} = (id \otimes L)(\Gamma_f)$ in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Recall that the condition (H) concerns a finite subset $\mathcal{S}(f) := \varpi(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2))$ of Γ_f . Hence $\pi_2(\mathcal{S}(L \circ f)) = \pi_2((id \otimes L)(\mathcal{S}(f))) = L\pi_2(\mathcal{S}(f))$. As $\pi_2(\mathcal{S}(f))$ is a finite subset of the line at infinity and $I((L \circ f)^\infty) = I$ is fixed, for generic L we get $\pi_2(\mathcal{S}(L \circ f)) \neq I$ and we are done. □

Theorem 3.2 is a consequence of proposition 3.3.1 and the following proposition.

PROPOSITION 3.3.2 *Let f be a rational self map of \mathbb{P}^2 , of algebraic degree d , and topological degree $d_t < d$. We assume that f is AS and satisfies the hypothesis (H) above. Then the Green current T is laminar.*

Note that the result holds in particular for all AS birational maps. In the next section we will show that for birational maps the ‘‘AS’’ hypothesis is in fact unnecessary.

PROOF : We want to use theorem 3.1 with the sequence of currents $d_n^{-1}(f^n)^*[L] = d_n^{-1}[f^{-n}(L)]$. Let $C_n = f^{-n}(L)$. We have to show that

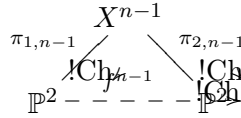
$$g_n + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d^n) \tag{3.5}$$

with notations as in the first section. We will estimate the two terms separately, for generic L . Let us first discuss the genericity assumptions made on L :

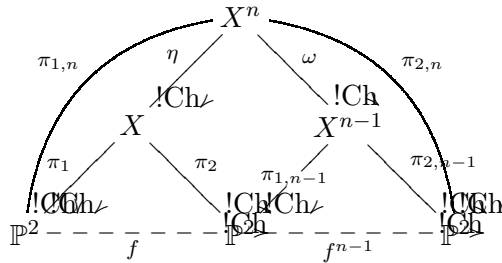
- (G1) we choose L s.t. the convergence $d_n^{-1}(f^n)^*[L] \rightarrow T$ holds;
- (G2) the hypothesis (H) says that $\cup_{n \geq 0} f^n(\pi_2(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)))$ is an at most countable set.

We take L missing this countable number of points.

We will prove the estimate (3.5) by induction on n . This leads us to introduce the following diagram, which illustrates the step from $n - 1$ to n in terms of the graphs of the rational maps f^n . Suppose we have constructed a surface X^{n-1} (which is a proper modification of the graph of f) with the following diagram :



Then we define X^n such that we have the following diagram, where X^n is smooth and minimal among the possible graphs :



Such a X^n always exists since there is a natural rational map $X \rightarrow X^{n-1}$ birationally equivalent to f ; X^n is not a priori a minimal desingularization of the graph of f^n . Note that all arrows are holomorphic, $\pi_{1,n}$, π_1 , η are compositions of points blow-ups, $d_t(\omega) = d_t$, $d_t(\pi_{2,n-1}) = d_t^{n-1}$. This allows us to state the last (Zariski) generic hypothesis on L

- (G3) by definition, $\pi_{2,n}(\mathcal{E}(\pi_{2,n})) \subset \mathbb{P}^2$ is finite for all n , we take L missing the union of these sets. Moreover, Bertini’s theorem says that $\pi_{2,n}^{-1}(L)$ is smooth, irreducible and of mutiplicity 1 for generic L (see [GH], and [FL] for irreducibility). We choose such an L .

The proof of the estimate (3.5) splits up into two lemmas.

LEMMA 3.3.3 *Let f be as in theorem 3.2, L a line in \mathbb{P}^2 satisfying hypotheses (G2) and (G3), and $C_n = f^{-n}(L)$, then*

$$\sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d^n).$$

Before we begin the proof, we want to give a heuristic argument, which gives a true proof for birational mappings. We have seen that $\sum n_x(C_n) =: N_n$ is the number of points in $\pi^{-1}(\text{Sing}(C_n))$, where π is the resolution of singularities. Now if f is birational, $f^{-n}|_L : L \rightarrow C_n$ is a (non minimal a priori) resolution of singularities. The hypothesis (G3) ensures that $L \cap I((f^{-1})^\infty) = \emptyset$ and so $\sum n_x(C_n)$ is not greater than the number of points in $L \cap \mathcal{E}(f^{-n})$, and $\mathcal{E}(f^{-n}) = \text{Crit}(f^{-n})$. To conclude, note that the critical set of a rational self mapping of \mathbb{P}^2 has degree at most $3d - 3$, where d is the degree of f , and that for an AS birational map f and f^{-1} have the same degree. This argument gives in fact the proof of theorem 3.2 for birational maps (since $g_n = 0$ in this case).

For non invertible maps, given C_{n-1} , with set of singularities \mathcal{S} , we want to analyze $\text{Sing}(C_n)$. The set $\text{Sing}(C_n)$ contains points of $f^{-1}(\mathcal{S})$, which has cardinality not greater than $d_t \cdot \#\mathcal{S}$, preimages of points of $f(I(f)) \cap C_{n-1}$, and possibly other points (the preimage of a smooth curve, even by a holomorphic map need not in general be smooth). In fact the sense of the Bertini argument in (G3) is precisely that the latter set is empty. We have to estimate the number of local irreducible components at these points. We thus can expect a formula such as $N_n \leq d_t N_{n-1} + cd^{n-1}$ which is indeed the case.

We also recall for future reference some properties of divisors and intersection products on compact surfaces (see [GH]) : a *divisor* is a formal linear combination of subvarieties with integer coefficients, we write $D \geq D'$ if $D' - D$ is an *effective divisor*, that is a divisor with nonnegative coefficients. The *intersection product* $C \cdot C'$ of two curves is the sum of intersection multiplicities at common points ; the product \cdot is extended by bilinearity to divisors, and depends only on cohomology classes in $H^2(X, \mathbb{Z})$, where X is the ambient surface. Given a holomorphic map $h : X \rightarrow Y$ there are natural pull back and push forward operations h^* and h_* on divisors, which satisfy $h^*D \cdot h^*D' = d_t(h)(D \cdot D')$, and $h^*D \cdot D' = D \cdot h_*(D')$ provided these expressions make sense.

PROOF OF LEMMA 3.3.3 : by (G3) $\widehat{C}_n := \pi_{2,n}^{-1}(L)$ is smooth and irreducible. As $\pi_{1,n}$ is a composition of point blow-ups, $\pi_{1,n} : \widehat{C}_n \rightarrow C_n$ is a resolution of singularities. Hence

$$\sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) \leq \#\widehat{C}_n \cap \mathcal{E}(\pi_{1,n}).$$

We introduce $E(\pi_{1,n})$ the exceptional divisor, which is the sum (with coefficients equal to 1) of irreducible components of $\mathcal{E}(\pi_{1,n})$, and $\#\widehat{C}_n \cap \mathcal{E}(\pi_{1,n}) \leq \widehat{C}_n \cdot E(\pi_{1,n})$ (generically equal).

Now $\pi_{1,n} = \pi_1 \circ \eta$, so $\mathcal{E}(\pi_{1,n}) \subset \mathcal{E}(\eta) \cup \eta^{-1}\mathcal{E}(\pi_1)$. Hence

$$E(\pi_{1,n}) \leq \eta^*E(\pi_1) + E_\eta$$

since of course all coefficients in the second member are ≥ 1 . From this we infer

$$E(\pi_{1,n}) \cdot \widehat{C}_n \leq \eta^*E(\pi_1) \cdot \widehat{C}_n + E(\eta) \cdot \widehat{C}_n \quad (3.6)$$

because the pull back of a curve from \mathbb{P}^2 intersects positively any effective divisor.

We claim that $E(\eta) \cdot \widehat{C}_n \leq \omega^*E(\pi_{1,n-1}) \cdot \widehat{C}_n$. Indeed

$$E(\eta) = \sum_{i=1}^k V_i$$

with V_i a rational curve; suppose without loss of generality that \widehat{C}_n cuts V_1, \dots, V_l . By (G3), $\pi_{2,n}$ is a branched covering near \widehat{C}_n and so for $1 \leq i \leq l$, $\omega(V_i)$ is not a point. As $\pi_2 \circ \eta = \pi_{1,n-1} \circ \omega$, and $V_i \subset \mathcal{E}(\pi_2 \circ \eta)$, we have $\omega(V_i) \subset \mathcal{E}(\pi_{1,n-1})$, $1 \leq i \leq l$. This implies

$$\omega^*(E(\pi_{1,n-1})) \geq \sum_{i=1}^l V_i$$

which yields the desired result. We deduce

$$E(\eta) \cdot \widehat{C}_n \leq \omega^* E(\pi_{1,n-1}) \cdot \widehat{C}_n = \omega^* E(\pi_{1,n-1}) \cdot \omega^*(\widehat{C}_{n-1}) = d_t(E(\pi_{1,n-1}) \cdot \widehat{C}_{n-1}), \quad (3.7)$$

with $\widehat{C}_{n-1} = \pi_{2,n-1}^{-1}(L)$.

On the other hand, we have $\eta^* E(\pi_1) \cdot \widehat{C}_n = cd^{n-1}$. Indeed

$$\eta^* E(\pi_1) \cdot \widehat{C}_n = E(\pi_1) \cdot \eta(\widehat{C}_n)$$

with $\eta(\widehat{C}_n)$ an irreducible curve in X which projects down to C_{n-1} by π_2 and to C_n by π_1 . By the hypothesis (G2), $\pi_2^{-1}(C_{n-1})$ is irreducible so $\eta(\widehat{C}_n) = \pi_2^{-1}(C_{n-1})$, and we know the cohomology class $\{C_{n-1}\}$ of C_{n-1} in \mathbb{P}^2 , $\{C_{n-1}\} = d^{n-1} \{L\}$. From this we can evaluate the intersection product in cohomology

$$\eta^* E(\pi_1) \cdot \widehat{C}_n = \{E(\pi_1)\} \cdot \{\eta(\widehat{C}_n)\} = \{E(\pi_1)\} \cdot \pi_2^* \{C_{n-1}\} = d^{n-1} \{E(\pi_1)\} \cdot \pi_2^* \{L\}. \quad (3.8)$$

We can thus conclude from (3.6), (3.7), (3.8) that $N_n = E(\pi_{1,n}) \cdot \widehat{C}_n$ satisfies $N_n \leq d_t N_{n-1} + cd^{n-1}$, $d_t < d$, and it is then a standard result that $N_n = O(d^n)$. \square

It seems more difficult to find a heuristic argument for the next lemma, so we systematically use the terminology of divisors.

LEMMA 3.3.4 *Let f be as in theorem 3.2, L a line in \mathbb{P}^2 satisfying hypotheses (G2) and (G3), $C_n = f^{-n}(L)$, and g_n the geometric genus of C_n , then $g_n = O(d^n)$.*

PROOF : We apply the Riemann-Hurwitz formula for the branched covering $\pi_{2,n} : \widehat{C}_n \rightarrow L$, and use induction again. We first write down the formula in the language of divisors [GH].

Let $h : X \rightarrow Y$ be a dominating holomorphic map of smooth surfaces. We define the ramification divisor R_h to be the divisor locally defined by the holomorphic function $Jac(h)$ (Jacobian determinant). If h is a branched covering, the order of vanishing of $Jac(h)$ can be interpreted in terms of the local topological degree of h near the divisor. If $C \subset Y$ and $C' \subset X$ are smooth curves s.t. $h^{-1}(C) = C'$, then the Riemann Hurwitz formula between Euler characteristics reads (this holds without the branched covering assumption)

$$\chi(C') = d_t \chi(C) - R_h \cdot C'.$$

If $k : Y \rightarrow Z$ is another map, the usual chain rule reads

$$R_{k \circ h} = h^* R_k + R_h.$$

The Riemann Hurwitz formula for $\pi_{2,n} : \widehat{C}_n \rightarrow L$ then states

$$2 - 2g_n = \chi(\widehat{C}_n) = d_t^m \chi(L) - R_{\pi_{2,n}} \cdot \widehat{C}_n,$$

then as $d_t < d$ we only have to show $R_{\pi_{2,n}} \cdot \widehat{C}_n = O(d^n)$.

By the chain rule,

$$R_{\pi_{2,n}} = \omega^* R_{\pi_{2,n-1}} + R_\omega,$$

hence

$$R_{\pi_{2,n}} \cdot \widehat{C}_n = \omega^* R_{\pi_{2,n-1}} \cdot \widehat{C}_n + R_\omega \cdot \widehat{C}_n = d_t(R_{\pi_{2,n-1}} \cdot \widehat{C}_{n-1}) + R_\omega \cdot \widehat{C}_n \quad (3.9)$$

As before, it only remains to see that $R_\omega \cdot \widehat{C}_n = cd^n$ to get the desired result.

By the genericity hypothesis (G3) we know that ω is a branched covering near \widehat{C}_n . In particular if an irreducible component R of R_h intersects \widehat{C}_n , the order of vanishing of the Jacobian along R is $\leq d_t - 1$ since it is exactly $e - 1$, where e is the local degree in the neighborhood of R . Moreover the chain rule for the commutative diagram $\pi_{1,n-1} \circ \omega = \pi_2 \circ \eta$ yields

$$\omega^* R_{\pi_{1,n-1}} + R_\omega = \eta^* R_{\pi_2} + R_\eta,$$

so

$$R_\omega \leq \eta^* R_{\pi_2} + R_\eta.$$

By dropping all components of R_η which do not meet \widehat{C}_n , we can write

$$R_\omega \cdot \widehat{C}_n \leq \eta^* R_{\pi_2} \cdot \widehat{C}_n + D \cdot \widehat{C}_n,$$

with D some divisor supported in $\mathcal{E}(\eta)$ with coefficients $\leq d_t - 1$ by the discussion above, that is $D \leq (d_t - 1)E(\eta)$. By the preceding lemma

$$E(\eta) \cdot \widehat{C}_n \leq E(\pi_{1,n}) \cdot \widehat{C}_n \leq C^{st} d^n.$$

To conclude, $\eta^* R_{\pi_2} \cdot \widehat{C}_n$ can be estimated in cohomology in X as in the preceding lemma, using (G2),

$$\eta^* R_{\pi_2} \cdot \widehat{C}_n = R_{\pi_2} \cdot \eta(\widehat{C}_n) = \{R_{\pi_2}\} \cdot \{\eta(\widehat{C}_n)\} = d^{n-1} \{R_{\pi_2}\} \cdot \pi_2^* \{L\}$$

and we are done. \square

REMARK. It might be possible to get rid of the hypothesis (H), by a more precise control of the multiplicities of the curves C_n at the indeterminacy points, but this seems difficult and is beyond the scope of this work.

3.4. Birational invariance and applications.

“birational invariance” is the following easy proposition :

PROPOSITION 3.4.1 *Let T be a positive closed current in the (compact) surface X and $h : X \rightarrow Y$ a birational map.*

*Then T is laminar iff h_*T is laminar.*

PROOF : by the structure theorem for birational maps [GH] it suffices to show the following :

- i if $\pi : X \rightarrow Y$ is a point blow up and T a positive closed current on X , T laminar $\Rightarrow \pi_*T$ laminar ;
- ii if $\pi : X \rightarrow Y$ is a point blow-up and T a positive closed current on Y , T laminar $\Rightarrow \pi^*T$ laminar.

The first point goes as follows : we can write $T = T_1 + c[E]$, where E is the exceptional divisor of the blow up ($\pi(E) =: p$), and T_1 gives no mass to E . T_1 is in fact the trivial extension through E of $T|_{X \setminus E}$, which is of course laminar (restriction of a laminar current). Now $\pi : X \setminus E \rightarrow Y \setminus \{p\}$ is a biholomorphism, and $\pi_*(T|_{X \setminus E}) = \pi_*(T_1|_{X \setminus E}) = (\pi_*T_1)|_{Y \setminus \{p\}}$ so $(\pi_*T_1)|_{Y \setminus \{p\}}$ is laminar. We conclude that π_*T itself is laminar because a neighborhood U of p can be covered up to a set of $\|\pi_*T\|$ -measure 0 by countably many disjoint open subsets of $U \setminus \{p\}$.

For the second part, write $\pi^*T = T_1 + \nu(T, 0)[E]$ where T_1 is the trivial extension through E of $(\pi^*T)|_{X \setminus E}$. T_1 is laminar because $T|_{Y \setminus \{p\}}$ is, and we get that T is laminar by subdividing into smaller subdisks all disks in T intersecting E . \square

We now prove theorem 3.3 :

Let M be a connected smooth projective surface, and f a birational selfmap of M , of positive topological entropy. It is a result of J. Diller and C. Favre [DF] that there exists a proper modification $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ (π is a composition of point blow ups), such that f lifts to an algebraically stable map $\hat{f} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ (of positive entropy also). Either \hat{f} is an automorphism, in which case the results of Cantat [Ca] yield the existence of a natural laminar Green current on \widehat{M} , or \hat{f} has indeterminacy points, and the existence of the Green current is proved in [DF]; moreover in the latter case \widehat{M} is birational to \mathbb{P}^2 . We define the Green current of f to be $T(f) = \pi_*T(\hat{f})$. By proposition 3.4.1 laminarity of $T(f)$ is equivalent to laminarity of $T(\hat{f})$, so we focus on \hat{f} . Abusing notation we write f for \hat{f} and M for \widehat{M} .

We only need to treat the case when f has indeterminacy points. We define $\lambda_1 = \lambda_1(f)$, the first dynamical degree of f to be the spectral radius of the linear map $f^* : H^{1,1}(M) \rightarrow H^{1,1}(M)$. In \mathbb{P}^2 , $\lambda_1 = d$ (see [DF], [RS2], [Gu1] for details and references). One has $h_{top}(f) \leq \log \lambda_1$ so $\lambda_1 > 1$ [Fr]. Let L be an element of the linear system of hyperplane sections of M . Bertini’s theorem implies that a generic L is smooth and irreducible. Moreover for generic L

$$\frac{1}{\lambda_1^n} (f^n)^*[L] \rightarrow cT,$$

where c is some positive constant independent of L ([DF] Theorem 6.5, see also [Si1] Theorem 1.10.1). Without loss of generality we assume $c = 1$. Let $C_n = f^{-n}(L)$, and $g_n, \sum n_x(C_n)$ be defined as in section 3.2. We want to prove

$$g_n + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(\lambda_1^n).$$

As f is birational $g_n = g(f^{-n}(L))$ is independent of n so we only bound the second term.

We adapt lemma 3.3.3 to this context. First note that the divisor L is *ample* (because as a line bundle it is the restriction of the hyperplane bundle [GH]), in particular its intersection product with any effective divisor is nonnegative. If we draw the same diagram as in the preceding section, replacing \mathbb{P}^2 by M , we get that the intersection product of $\pi_{2,n}^*(L)$ with any effective divisor in X^n is nonnegative. If moreover we choose L satisfying the generic assumptions (G2) : L misses the countable set $\cup_{n \geq 0} f^n(\pi_2(\mathcal{E}(\pi_1) \cap \mathcal{E}(\pi_2)))$ (by algebraic stability of f^{-1}) and (G3) : L misses $\cup_n \pi_{2,n}(\mathcal{E}(\pi_{2,n}))$ and $\pi_{2,n}^{-1}(L)$ is smooth and irreducible for every n , we can read again lemma 3.3.3, replacing \mathbb{P}^2 by M and d by λ_1 ($d_t = 1$).

To conclude, we apply theorem 3.1 in \mathbb{P}^2 . Let $h : M \rightarrow \mathbb{P}^2$ be a birational map, and consider the sequence of curves $h(f^{-n}(L)) = h(C_n)$, at the level of currents we have

$$\frac{1}{\lambda_1^n} [h(C_n)] = h_* \left(\frac{1}{\lambda_1^n} [C_n] \right) \rightarrow h_* T.$$

We can decompose $[h(C_n)] = [\Gamma_n] + [E_n]$ where $[\Gamma_n]$ is the (irreducible) proper transform of C_n , and $[E_n]$ is some divisor subordinate to $\mathcal{E}(h^{-1})$.

The sequence $(1/\lambda_1^n)[E_n]$ converges to a divisor, which does not affect the laminarity of $h_* T$, and it remains to prove that the sequence of curves Γ_n satisfy the hypotheses of theorem 3.1. The term g_n is invariant by the birational transformation h , and

$$\sum_{x \in \text{Sing}(\Gamma_n)} n_x(\Gamma_n) \leq \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) + \#C_n \cap \mathcal{C}(h).$$

the first term is $O(\lambda_1^n)$ by the preceding discussion, and the second is $O(\lambda_1^n)$ ($\mathcal{C}(h)$, the critical set, contains the indeterminacy points of h by definition) because the spectral radius of the action f^* on $H^2(M, \mathbb{Z})$ is $\leq \lambda_1$. Thus $h_* T$ is laminar, and so is T by proposition 3.4.1. \square

REMARK. With the same method it is possible to derive laminarity of the Green current for AS rational maps of rational surfaces, satisfying $d_t < \lambda_1$ and (H).

Chapitre 4

Intersection géométrique

Nous explorons les liens entre laminarité et produit extérieur des courants. Nous définissons (section 4.2) l'intersection géométrique des courants laminaires, et cherchons à vérifier dans certains cas que cette intersection coïncide avec le produit extérieur. Nous montrons à la section 4.3 que l'intersection des courants uniformément laminaires (éventuellement à plis) est toujours géométrique en ce sens. Nous considérons ensuite la classe des courants laminaires de \mathbb{P}^2 obtenus grâce au théorème 3.1 –courants *fortement approximables*– et montrons (section 4.4) que le produit extérieur est géométrique dans tout ouvert où un tel courant est à potentiel continu. Un corollaire important de cette étude est que la construction du chapitre 3 ne permet pas d'atteindre tous les courants laminaires de \mathbb{P}^2 . La dernière section est consacrée à un cas d'intersection géométrique dans le bidisque, qui a la particularité de ne pas nécessiter d'hypothèse sur le potentiel des courants.

Il est à noter que nous utilisons une définition générale de l'opérateur de produit extérieur, due à N. Sibony.

4.1. Compléments de théorie du pluripotential.

Une définition générale du produit extérieur des courants, d'après N. Sibony. Nous décrivons dans cette section, suivant [Si3], le produit extérieur des courants positifs fermés en dimension 2, dans un cadre général, et bien adapté au produit des courants laminaires.

On fixe Ω un ouvert de \mathbb{C}^2 , muni de sa forme Kählerienne standard ω , et $u, v \in \text{PSH}(\Omega)$. On dira que le produit extérieur $dd^c u \wedge dd^c v$ est *admissible* si dans Ω , $u \in L^1_{loc}(dd^c v \wedge \omega)$; le produit extérieur étant alors défini par

$$dd^c u \wedge dd^c v := dd^c(udd^c v).$$

Remarquer que la condition d'admissibilité n'a de sens que parce que les fonctions psh sont définies ponctuellement par

$$u(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B(0, \delta))} \int_{B(0, \delta)} u$$

d'après la relation de sous moyenne et la semi continuité supérieure. Par ailleurs deux potentiels d'un courant différant d'une fonction pluriharmonique, l'admissibilité du produit extérieur ne dépend pas du potentiel choisi, et est donc définie sans ambiguïté au niveau des courants. On abrègera par la suite la condition d'admissibilité en $u \in L^1_{loc}(dd^c v)$ ($dd^c v \wedge \omega$ est équivalente à la mesure trace du courant $dd^c v$).

Nous allons montrer dans cette section que l'opérateur de produit extérieur défini dans ces conditions générales, est symétrique et satisfait le théorème de convergence décroissante de Bedford-Taylor [BT2]. L'avantage de cette définition est qu'elle est stable par restriction du domaine, ce qui n'est pas le cas pour les conditions de type "singularités compactes" [Si2], [De1], ou pour l'inégalité d'Oka [FS2].

THÉORÈME 4.1.1 *Supposons le produit extérieur $dd^c u \wedge dd^c v$ admissible dans Ω . Si (u_j) , (v_j) sont des suites de fonctions plurisousharmoniques telles que $u_j \geq u$ et $u_j \rightarrow u$ dans L^1_{loc} (respectivement $v_j \geq v$ et $v_j \rightarrow v$ dans L^1_{loc}), alors pour tout j , le produit extérieur $dd^c u_j \wedge dd^c v_j$ est admissible, et au sens des courants dans Ω on a*

$$u_j dd^c v_j \rightarrow u dd^c v \text{ et } dd^c u_j \wedge dd^c v_j \rightarrow dd^c u \wedge dd^c v.$$

COROLLAIRE 4.1.2 *Si $u \in L^1_{loc}(dd^c v)$ alors $v \in L^1_{loc}(dd^c u)$ et $dd^c u \wedge dd^c v = dd^c v \wedge dd^c u$*

COROLLAIRE 4.1.3 *Si le produit extérieur $dd^c u \wedge dd^c v$ est admissible et u_1, v_1 sont des fonctions psh telles que $dd^c u_1 \leq dd^c u$ et $dd^c v_1 \leq dd^c v$, alors $dd^c u_1 \wedge dd^c v_1$ est admissible.*

PREUVE DU COROLLAIRE 4.1.3 : quitte à retrancher des constantes on peut supposer que les fonctions psh u, v, u_1, v_1 sont négatives dans Ω . Par ailleurs $u - u_1$ est psh, donc de même on peut supposer que $u - u_1 \leq 0$, i.e. $u \leq u_1 \leq 0$. Comme $u \in L^1_{loc}(dd^c v)$ on en déduit que $u_1 \in L^1_{loc}(dd^c v)$. Du corollaire précédent on déduit $v \in L^1_{loc}(dd^c u_1)$, et comme de même on

peut supposer que $v \leq v_1$, alors $v_1 \in L^1_{loc}(dd^c u_1)$. \square .

PREUVE DU THÉORÈME : fixons $K \subset\subset \Omega$. Nous supposons dans un premier temps que $\|u_j dd^c v_j\|_K \leq C_K$. Comme la suite (v_j) est bornée dans L^1_{loc} , la suite de courants $dd^c v_j$ est de masse bornée dans K . D'après le lemme de Hartogs si S est une valeur d'adhérence de la suite de courants $(u_j dd^c v_j)$, alors $S \leq u dd^c v$ (voir p.ex. [FS2]). Il reste à montrer l'inégalité inverse.

Pour cela on fixe une fonction test $\varphi \geq 0$; il faut montrer

$$\int u dd^c v \wedge \varphi \omega \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int u_j dd^c v_j \wedge \varphi \omega.$$

Considérons les régularisantes u_j^ε de u_j [Hö], bien définies au voisinage du support de φ . On a $u_j^\varepsilon \geq u_j \geq u$, et donc

$$\begin{aligned} \int u dd^c v \wedge \varphi \omega &\leq \int u_j^{\varepsilon_1} dd^c v \wedge \varphi \omega = \int v dd^c(\varphi u_j^{\varepsilon_1}) \wedge \omega \\ &= \int \varphi v dd^c u_j^{\varepsilon_1} \wedge \omega + \int u_j^{\varepsilon_1} v dd^c \varphi \wedge \omega - 2 \int v d^c \varphi \wedge du_j^{\varepsilon_1} \wedge \omega, \end{aligned}$$

où la première égalité est la définition du courant $dd^c v$, et la deuxième vient de ce que les termes de bidegré (1,1) de $du_j^{\varepsilon_1} \wedge d^c \varphi$ et $d\varphi \wedge d^c u_j^{\varepsilon_1}$ sont identiques. Par ailleurs par la formule de Stokes,

$$\int u_j^{\varepsilon_1} v dd^c \varphi \wedge \omega = \int d^c \varphi \wedge (v du_j^{\varepsilon_1} + u_j^{\varepsilon_1} dv) \wedge \omega,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int u dd^c v \wedge \varphi \omega &\leq \int \varphi v dd^c u_j^{\varepsilon_1} \wedge \omega - \int d^c \varphi \wedge (v du_j^{\varepsilon_1} - u_j^{\varepsilon_1} dv) \wedge \omega \\ &\leq \int \varphi v_j^{\varepsilon_2} dd^c u_j^{\varepsilon_1} \wedge \omega + \int d^c \varphi \wedge (u_j^{\varepsilon_1} dv - v du_j^{\varepsilon_1}) \wedge \omega, \end{aligned}$$

où l'on a introduit la régularisée $v_j^{\varepsilon_2} \geq v_j \geq v$. Ensuite comme on vient de le faire on peut remplacer

$$\int \varphi v_j^{\varepsilon_2} dd^c u_j^{\varepsilon_1} \wedge \omega \quad \text{par} \quad \int \varphi u_j^{\varepsilon_1} dd^c v_j^{\varepsilon_2} \wedge \omega - \int d^c \varphi \wedge (u_j^{\varepsilon_1} dv_j^{\varepsilon_2} - v_j^{\varepsilon_2} du_j^{\varepsilon_1}) \wedge \omega,$$

et il vient

$$\int u dd^c v \wedge \varphi \omega \leq \int \varphi u_j^{\varepsilon_1} dd^c v_j^{\varepsilon_2} \wedge \omega + \int d^c \varphi \wedge \left((v_j^{\varepsilon_2} - v) du_j^{\varepsilon_1} + u_j^{\varepsilon_1} d(v - v_j^{\varepsilon_2}) \right) \wedge \omega.$$

Par ailleurs (voir [Hö], Theorem 4.1.8) les fonctions psh sont dans L^p (le "localement" est implicite dans les lignes qui suivent) pour tout p et leurs dérivées sont dans L^q pour tout $1 \leq q < 2$, et la convergence L^1 des fonctions psh induit la convergence dans ces topologies plus fortes. On peut donc faire tendre ε_2 vers 0 puis ε_1 vers 0, pour obtenir l'inéquation suivante

$$\int u dd^c v \wedge \varphi \omega \leq \int u_j dd^c v_j \wedge \varphi \omega + \int d^c \varphi \wedge ((v_j - v) du_j + u_j d(v - v_j)) \wedge \omega, \quad (4.1)$$

dans laquelle le deuxième terme du membre de droite a une interprétation ponctuelle, donnée par l'inégalité de Hölder. Finalement quand j tend vers l'infini, $v_j \rightarrow v$ dans L^p pour tout p et les dérivées dans L^q pour tout $1 \leq q < 2$, ainsi $|(v_j - v)du_j|$ et $|u_j d(v - v_j)|$ convergent vers 0 dans L^1 , et il vient

$$\int u dd^c v \wedge \varphi \omega \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int u_j dd^c v_j \wedge \varphi \omega.$$

Il reste à démontrer que la masse $\|u_j dd^c v_j\|$ est localement uniformément bornée. Pour cela on réutilise l'inéquation (4.1). La discussion précédente montre que le deuxième terme du membre de droite est uniformément borné en j , et donc, étant donné que $u \in L^1_{loc}(dd^c v)$, on a

$$-\infty < \int u dd^c v \wedge \varphi \omega \leq \int u_j dd^c v_j \wedge \varphi \omega + O(1),$$

ce qui majore la masse locale de $u_j dd^c v_j$. \square

PREUVE DU COROLLAIRE 4.1.2 : on reprend la suite d'inégalités de la preuve précédente,

$$\begin{aligned} -\infty < \int u dd^c v \wedge \varphi \omega &\leq \int u^{\varepsilon_1} dd^c v \wedge \varphi \omega \\ &\leq \int v dd^c u^{\varepsilon_1} \wedge \varphi \omega + \int d^c \varphi \wedge (u^{\varepsilon_1} dv - v du^{\varepsilon_1}) \wedge \omega \\ &\leq \int v^{\varepsilon_2} dd^c u^{\varepsilon_1} \wedge \varphi \omega + \int d^c \varphi \wedge (u^{\varepsilon_1} dv - v du^{\varepsilon_1}) \wedge \omega, \end{aligned}$$

puis on fait tendre ε_1 vers 0, dans ce cas le deuxième terme de la dernière inégalité est borné, indépendamment de ε_2 , i.e.

$$-\infty < \int u dd^c v \wedge \varphi \omega \leq \int v^{\varepsilon_2} dd^c u \wedge \varphi \omega + O(1).$$

Il reste à faire tendre ε_2 vers 0 pour aboutir à $v \in L^1_{loc}(dd^c u)$. \square

Intégration. On montre dans ce paragraphe la commutation entre intégrales de familles de courants et produit extérieur, dans le cadre général du paragraphe précédent, sous une hypothèse de mesurabilité de la famille des potentiels. Un résultat similaire est démontré dans [BJ], sous l'hypothèse que l'un des potentiels est localement borné.

Dans $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ on considère (\mathcal{A}, μ) un espace mesuré σ -fini et une famille $\mathcal{A} \ni a \mapsto T_a$ de courants positifs fermés de bidegré (1,1) dans Ω telle que pour toute forme test ϕ , $a \mapsto \langle T_a, \phi \rangle$ soit mesurable et μ -intégrable (pour avoir l'intégrabilité, il suffit de vérifier celle de la fonction $a \mapsto \mathbf{M}(T_a|_K)$ sur tout compact K); ceci par définition sera appelé une *famille intégrable de courants positifs fermés*. Dans ce cas le couplage

$$\phi \longmapsto \int_{\mathcal{A}} \langle T_a, \phi \rangle d\mu(a)$$

définit un courant positif fermé de masse localement finie, qui est par définition $\int_{\mathcal{A}} T_a d\mu(a)$.

REMARQUE : on ne parle pas de "famille localement intégrable de courants positifs fermés" pour ne pas prêter à confusion : le résultat est local dans Ω , mais global dans \mathcal{A} . On a suivi la définition standard de l'intégration fonctionnelle dans les espaces de Fréchet.

PROPOSITION 4.1.4 Soient S et T deux $(1,1)$ courants positifs fermés de Ω tels que le produit extérieur $S \wedge T$ soit admissible et T soit l'intégrale directe d'une famille intégrable de courants T_a comme ci-dessus. On suppose de plus qu'il existe une famille mesurable et μ -intégrable (i.e. $\|u_a\|_{L^1_{loc}}$ est μ -intégrable) de fonctions psh u_a telles que $dd^c u_a = T_a$.

Alors pour μ -presque tout a $T_a \wedge S$ est un produit extérieur admissible et

$$S \wedge T = \int_{\mathcal{A}} (S \wedge T_a) d\mu(a). \quad (4.2)$$

L'hypothèse d'existence d'une famille intégrable de potentiels est en fait superflue : dans toute boule on a un potentiel u_a de T_a donné par une formule intégrale, donc dépendant mesurablement de T_a , et dont la norme L^1_{loc} est contrôlée par $\mathbf{M}(T_a)$.

PREUVE : soient $\Omega_1 \subset\subset \Omega'_1 \subset\subset \Omega$. Comme

$$\sup_{\Omega_1} u_a \leq C \|u_a\|_{L^1(\Omega'_1)},$$

et comme $\|u_a\|_{L^1(\Omega'_1)}$ est μ -intégrable, quitte à retirer une fonction ne dépendant que de a , on peut supposer que $u_a \leq 0$ dans Ω_1 pour tout a . Dorénavant on se placera dans Ω_1 .

Posons

$$u(z) = \int_{\mathcal{A}} u_a(z) d\mu(a),$$

et vérifions que u est un potentiel de T . La fonction u est négative dans Ω_1 , semi continue supérieurement : en effet le lemme de Fatou pour les fonctions négatives s'écrit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

d'où si $z_n \rightarrow z$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u(z_n) \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} u_a(z_n) d\mu(a) \leq \int u_a(z) d\mu(a) = u(z),$$

enfin au sens des courants on a $dd^c u = T$: si ϕ est une forme test

$$\langle u, dd^c \phi \rangle = \left\langle \int u_a d\mu(a), dd^c \phi \right\rangle = \int \langle u_a, dd^c \phi \rangle d\mu(a)$$

d'après le théorème de Fubini classique, et comme $\langle u_a, dd^c \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$ on conclut.

Comme le produit extérieur $T \wedge S$ est admissible, $u \in L^1_{loc}(\|S\|)$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{\Omega_1} u d\|S\|$ est finie. Alors pour μ presque tout a , $\int_{\Omega_1} u_a d\|S\| < \infty$ (Fubini), et donc le produit extérieur $T_a \wedge S$ est admissible dans Ω_1 . Montrons la relation de Fubini (4.2). Soit ϕ une fonction test à support dans Ω_1 , alors le couplage $\langle u_a S, dd^c \phi \rangle$ a une interprétation ponctuelle¹ : en effet le courant S a une représentation par intégration de la forme (2.2) et donc

$$\langle u_a S, dd^c \phi \rangle = \int u_a \langle S_x, \psi_x \rangle d\|S\|$$

¹La raison de cette discussion est d'éviter d'utiliser un "théorème de Fubini fonctionnel".

où (S_x) est le champ de (1,1) vecteurs associé à S et (ψ_x) celui de (1,1) covecteurs associé à $dd^c\phi$. Dans ce cas on peut appliquer le théorème de Fubini classique et

$$\int \langle u_a S, dd^c\phi \rangle d\mu(a) = \int \left(\int u_a \langle S_x, \psi_x \rangle d\|S\| \right) d\mu(a) = \int u \langle S_x, \psi_x \rangle d\|S\| = \langle uS, dd^c\phi \rangle,$$

autrement dit

$$\int \langle T_a \wedge S, \phi \rangle d\mu(a) = \langle T \wedge S, \phi \rangle.$$

□

Nous concluons par une remarque que nous utiliserons plusieurs fois par la suite : si \mathcal{A}_j est une suite croissante de sous ensembles de \mathcal{A} , alors la suite des potentiels des courants

$$T_j = \int_{\mathcal{A}_j} T_a d\mu(a)$$

est décroissante si on a choisi des potentiels u_a négatifs. En particulier dans ce cas les produits extérieurs sont continus.

4.2. Définition et exemples.

Une motivation pour l'étude du produit extérieur des courants positifs fermés au cours des années 70 était de donner un nouveau point de vue sur l'intersection des ensembles analytiques. Il apparaît que dans le cas de courants d'intégration sur des diviseurs, l'intersection pluri-potentialiste et l'intersection algèbro-géométrique coïncident. Ce sont des raisons analogues qui ont poussé les auteurs de [BLS] (voir pp. 79-80) à introduire les courants laminaires, et à étudier leur intersection potentialiste sous un angle géométrique. Il y est effectivement montré que dans le cas des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 , les courants dynamiques stable et instable s'intersectent "géométriquement" ; la preuve repose de façon essentielle sur la théorie des systèmes dynamiques non uniformément hyperboliques. Ce résultat d'intersection géométrique est utilisé pour montrer que les points selles sont dans le support de la mesure d'entropie maximale.

Nous allons étudier ces questions sous un angle plus systématique, et retrouver ces résultats dans un cadre indépendant de toute dynamique. On ne considèrera que des courants diffus, la théorie de l'intersection des courants d'intégration étant bien comprise, et tout courant positif fermé se décomposant d'après le théorème de semi-continuité de Siu en une somme de courants d'intégration et d'un courant ne chargeant pas les sous ensembles analytiques (voir [De1]).

Etant donnés deux disques holomorphes Δ_a et Δ_b , on définit la mesure $[\Delta_a \cap \Delta_b]$ comme étant la somme des masses de Dirac aux points d'intersection de $\Delta_a \cap \Delta_b$ si ces points sont isolés, 0 sinon. Remarquer que nous n'avons pas introduit de multiplicité d'intersection : la raison en est que nous considérons des courants diffus et donc, d'après la proposition 2.1.3, le disque Δ_a étant fixé, si Δ_b varie dans une famille continue de disques disjoints, l'ensemble des paramètres b pour lesquels Δ_a et Δ_b sont tangents est au plus dénombrable. Supposons maintenant que T_1 et T_2 soient des courants uniformément laminaires dans Ω , et soit U un ouvert dans lequel T_1 et T_2 sont donnés par l'intégration sur une famille mesurée de sous variétés Δ_a (que l'on pourra supposer être des disques), i.e.

$$T_k|_U = \int_{\mathcal{A}_k} [\Delta_a^k] d\mu^k(a).$$

On définit dans ce cas la *mesure d'intersection géométrique* de T_1 et T_2 comme étant la mesure $T_1 \hat{\wedge} T_2$ définie dans U par

$$T_1 \hat{\wedge} T_2|_U = \int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} [\Delta_a^1 \cap \Delta_b^2] d\mu_1(a) d\mu_2(b).$$

On dira que l'intersection des courants uniformément laminaires T_1 et T_2 est *géométrique*² si $T_1 \wedge T_2$ est admissible et $T_1 \wedge T_2 = T_1 \hat{\wedge} T_2$.

²Nous verrons à la section suivante que c'est en fait toujours le cas.

Soient maintenant des courants laminaires dans Ω , munis de représentations comme limites de suites croissantes

$$T_k = \lim_{i \rightarrow \infty} T_k^{(i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k^i} T_{Q,k}^{(i)}, \quad k = 1, 2. \quad (4.3)$$

On supposera que ces représentations sont compatibles au sens où les bords $\partial \mathcal{Q}_k^i$ sont de $\|T_j\|$ mesure nulle (on utilise la notation $\partial \mathcal{Q}$ pour la réunion des bords des $Q \in \mathcal{Q}$). Alors, quitte à remplacer \mathcal{Q}_k^i par $\mathcal{Q}_1^i \wedge \mathcal{Q}_2^i$ (la subdivision la moins fine subordonnée à \mathcal{Q}_1^i et \mathcal{Q}_2^i), on pourra supposer que les courants uniformément laminaires $T_{Q,k}^{(i)}$, $k = 1, 2$ sont subordonnés à la même subdivision \mathcal{Q}^i .

DÉFINITION 4.2.1 Soient T_1 et T_2 des courants laminaires fermés dans Ω , de produit extérieur admissible. On dira que l'intersection de T_1 et T_2 est géométrique s'il existe des représentations de T_1 et T_2 comme en (4.3) telles que la suite de mesures

$$\nu_{\mathcal{Q}^i} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}^i} T_{Q,1}^{(i)} \wedge T_{Q,2}^{(i)}$$

croisse vers $\nu = T_1 \wedge T_2$. On dira de deux courants uniformément laminaires à plis qu'ils ont une intersection géométrique s'ils vérifient cette propriété en tant que courants laminaires.

Nous verrons à la section suivante que la suite de mesures $\nu_{\mathcal{Q}^i}$ est effectivement dominée par ν (et en particulier de masse localement finie). Il est possible d'énoncer une définition équivalente en termes de représentation des courants laminaires comme intégrales de courants d'intégration sur des disques.

PROPOSITION 4.2.2 Les courants laminaires T_1 et T_2 admettant un produit extérieur s'intersectent géométriquement si et seulement s'il existe des représentations

$$T_k = \int_{\mathcal{A}_k} p_a^k [D_a^k] d\mu^k(a), \quad k = 1, 2$$

telles que

$$T_1 \wedge T_2 = \int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} p_a^1 p_b^2 [D_a^1 \cap D_b^2] d\mu^1(a) d\mu^2(b).$$

On dira que la mesure $\int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} p_a^1 p_b^2 [D_a^1 \cap D_b^2] d\mu^1(a) d\mu^2(b)$ (ou de façon équivalente la limite des mesures $\nu_{\mathcal{Q}^i}$ de la définition 4.2.1) est l'intersection géométrique de T_1 et T_2 . Remarquer que par définition l'auto-intersection géométrique d'un courant laminaire est toujours nulle.

On perçoit ici l'importance de la représentation choisie pour les courants laminaires : en effet $T_1 \wedge T_2$ étant le plus souvent singulière par rapport à T_1 et T_2 , une modification de la représentation des T_i sur un ensemble de $\|T_i\|$ mesure nulle peut affecter la mesure d'intersection géométrique. Ce phénomène est illustré dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.2.3 Reprenons la première partie de l'exemple 2.3.9 : X est un compact non polaire de mesure nulle du disque unité \mathbb{D} , et μ une mesure à potentiel continu portée par X . Soient T^h et T^v deux courants respectivement horizontal et vertical dans \mathbb{B} , définis par

$$T^h = \int_X [\mathbb{D} \times \{w\}] d\mu(w) \quad \text{et} \quad T^v = \int_X [\{z\} \times \mathbb{D}] d\mu(z).$$

Bien entendu le produit $T^h \wedge T^v = \mu \otimes \mu$ est géométrique. Cependant, si on subdivise chacun des $\{z\} \times (\mathbb{D} \setminus X)$ et $(\mathbb{D} \setminus X) \times \{w\}$ en une réunion de disques disjoints, on obtient des représentations de T^h et T^v comme courants laminaires simples et la mesure d'intersection géométrique associée est nulle, puisque tous les disques ainsi construits sont disjoints.

Il faut donc pouvoir disposer de représentations adaptées des courants laminaires à intersecter. C'est le cas par exemple pour les courants construits comme limites de courbes, comme au théorème 3.1.

Les exemples suivants montrent que la régularité du potentiel influe sur le caractère géométrique du produit extérieur.

EXEMPLE 4.2.4 Supposons que S soit un courant uniformément laminaire lisse et que T soit laminaire. Alors T et S s'intersectent géométriquement. Pour cela, soit ϕ une fonction test,

$$\langle S \wedge T, \phi \rangle = \int_{\mathcal{A}} \left(\int_{D_a} p_a \phi S \right) d\mu(a),$$

et pour un courant uniformément laminaire lisse $\int_{D_a} p_a \phi S$ admet toujours une interprétation géométrique. En effet par la proposition 2.1.3, quitte à subdiviser le disque $\Delta = D_a$ (en retirant un ensemble d'aire nulle), on peut supposer que toutes les intersections entre Δ et les feuilles de $\mathcal{L}(S)$ sont transverses. Par ailleurs, la fonction de multiplicité p_a n'est définie que presque partout sur Δ , donc quitte à retirer de Δ un ensemble de mesure nulle si nécessaire, ce qui ne change pas $S \wedge [\Delta]$ (on utilise ici l'hypothèse de lissité), on pourra supposer que la fonction de multiplicité p_a est définie à tous les points d'intersection.

Ensuite au voisinage d'un point d'intersection, S a une structure de courant uniformément laminaire élémentaire, transverse à Δ et l'identification entre mesure transverse et produit extérieur dans ce cas est démontrée à la proposition 2.1.2. S'il n'y a pas de point d'intersection, Δ est subordonné à $\mathcal{L}(S)$ et la restriction de S à Δ est nulle.

EXEMPLE 4.2.5 Dans le bidisque unité on intersecte des courants d'intégration sur des pinces de droites passant par 0. Soit

$$T_r = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} [w = r\theta z] d\theta$$

où r est un réel, $0 < r < 1$ et θ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité S^1 . Considérons le produit extérieur $T_r \wedge T_{1/r}$ qui est clairement admissible et égal à la masse de Dirac en 0. Comme les courants sont diffus, ce ne peut pas être une mesure d'intersection géométrique. Ces courants ont un nombre de Lelong en 0.

On pourra cependant vérifier que ces courants sont "fortement approximables" au sens de la définition 4.4.1 par les courbes d'équation $w^n = r^n z^n$ (on voit directement que T_r et $T_{1/r}$ satisfont la conclusion de la proposition 4.4.6). A la section 4.4, nous nous intéresserons au cas des courants à potentiel continu.

Enfin, une conséquence des exemples 2.3.9 et 2.3.10 est que la régularité du potentiel ne suffit pas pour assurer l'intersection géométrique : en effet $T = dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|)$ est de potentiel continu et $T \wedge T > 0$; on peut cependant dans cet exemple interpréter géométriquement $T \wedge T$ en tenant compte des prolongements analytiques des disques. Ceci est impossible dans l'exemple 2.3.10.

4.3. Courants uniformément laminaires.

Nous montrons dans cette section que les courants uniformément laminaires (resp. à plis) s'intersectent géométriquement dès que leur produit extérieur est admissible. Nous donnons par ailleurs un critère simple assurant l'admissibilité du produit extérieur dans ce cadre. Le cas du produit de deux courants uniformément laminaires dont l'un est à potentiel continu est traité dans [BLS] Lemme 8.3 : leur preuve peut être étendue au cas général puisqu'elle n'utilise qu'un argument de convergence monotone. Notre preuve traite simultanément le cas des courants à plis.

THÉORÈME 4.3.1 *Soient T_1 et T_2 des courants uniformément laminaires (éventuellement à plis) diffus, tels que $T_1 \wedge T_2$ soit localement admissible. Alors l'intersection $T_1 \wedge T_2$ est géométrique.*

En particulier si $T_1 \wedge T_1$ est un produit extérieur admissible, alors $T_1 \wedge T_1 = 0$.

COROLLAIRE 4.3.2 *Soient T_1 et T_2 des courants laminaires, munis de représentations comme limites croissantes, comme en (4.3)*

$$T_k = \lim_{i \rightarrow \infty} T_k^{(i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{Q \in \mathcal{Q}^i} T_{Q,k}^{(i)}, \quad k = 1, 2,$$

et tels que le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ soit admissible. Alors la mesure $T_1 \wedge T_2$ d'intersection géométrique de T_1 et T_2 satisfait $T_1 \wedge T_2 \leq T_1 \wedge T_2$. En particulier $T_1 \wedge T_2$ est de masse localement finie.

PREUVE DU COROLLAIRE : on a implicitement supposé que les représentations sont compatibles (au sens où les bords des subdivisions ne sont pas chargés par les courants, voir la définition 4.2.1). Soit

$$\nu_{\mathcal{Q}^i} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}^i} \nu_Q^{(i)} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}^i} T_{Q,1}^{(i)} \wedge T_{Q,2}^{(i)}$$

la mesure d'intersection géométrique de $T_{Q,1}^{(i)}$ et $T_{Q,2}^{(i)}$. Dans $Q \in \mathcal{Q}^i$ on a $T_k = T_{Q,k}^{(i)} + R_k$, donc

$$T_1 \wedge T_2 = T_{Q,1}^{(i)} \wedge T_{Q,2}^{(i)} + R_1 \wedge T_{Q,2}^{(i)} + T_{Q,1}^{(i)} \wedge R_2 + R_1 \wedge R_2$$

où tous les produits extérieurs sont admissibles d'après le corollaire 4.1.3. D'après le théorème précédent on a $\nu_Q^{(i)} = T_{Q,1}^{(i)} \wedge T_{Q,2}^{(i)}$, et donc $\nu_{\mathcal{Q}^i} \leq T_1 \wedge T_2$. Comme ν est la limite croissante des $\nu_{\mathcal{Q}^i}$ on conclut. \square

Il est alors naturel de se poser la question suivante : sous quelles conditions le produit extérieur de deux courants uniformément laminaires est-il admissible ? Il est aisé de construire des exemples de courants uniformément laminaires pour lesquels le théorème 4.1.1 ne permet pas de construire le produit extérieur de T avec lui-même. C'est en effet le cas pour

un courant d'intégration sur une courbe : dans des coordonnées (z, w) adaptées la courbe a pour équation $\{z = 0\}$ et le courant associé a pour potentiel $\log |z|$. Pour obtenir des exemples diffus, il suffit de considérer des courants de la forme $\int [z = \alpha] d\mu(\alpha)$ où μ est une mesure d'énergie infinie (i.e. $\int u d\mu = -\infty$, u étant un potentiel de μ). En considérant une seconde mesure $\mu_2 \geq 0$ telle que $\int u d\mu_2 = -\infty$, on obtient un exemple de deux courants distincts dont on ne peut pas prendre le produit extérieur. La proposition suivante dit que ces exemples sont essentiellement les seuls.

PROPOSITION 4.3.3 *Soient T_1 et T_2 des courants uniformément laminaires (éventuellement à plis) diffus. Supposons que pour presque toute feuille V_1 de $\mathcal{L}(T_1)$ (resp. V_2 de $\mathcal{L}(T_2)$) les points d'intersection de V_1 et V_2 soient isolés dans $V_1 \cap V_2$. Alors $T_1 \wedge T_2$ est localement admissible.*

Nous utiliserons la définition suivante : soit T est un courant uniformément laminaire (éventuellement à plis) dans Ω , de la forme $\int_{\mathcal{L}} [V] d\mu(V)$. Soit $\Omega' \subset \Omega$ et $\mathcal{L}_{\Omega'}$ l'ensemble des feuilles de \mathcal{L} rencontrant Ω' . Alors

$$\int_{\mathcal{L}_{\Omega'}} [V] d\mu(V)$$

sera appelé le saturé de $T|_{\Omega'}$ dans Ω .

PREUVE DE LA PROPOSITION : soient $x \in \text{Supp}(T_1) \cap \text{Supp}(T_2)$, C , et $r_1 > 0$ tels que

$$V_1(x) \cap V_2(x) \cap B(x, r_1) = \{x\}$$

et $T_1, T_2 \in ULP_C(B(x, r_1))$. D'après la proposition 2.2.3, pour un certain $0 < r < r_1$, on a

$$\forall y_1, y_2 \in B(x, r), V_1(y_1) \cap V_2(y_2) \cap B(x, r_1) \subset B(x, \frac{r_1}{2}). \quad (4.4)$$

Pour $i = 1, 2$ soit $T_{i,r}$ le saturé dans $B(x, r_1)$ du courant $T_i|_{B(x,r)}$ dans la lamination à plis $\mathcal{L}(T_i)$. On a

$$T_i|_{B(x,r)} \leq T_{i,r} \leq T_i|_{B(x,r_1)}.$$

La propriété (4.4) assure que

$$\text{Supp}(T_{1,r}) \cap \text{Supp}(T_{2,r}) \subset B(x, \frac{r_1}{2}),$$

et donc le produit extérieur $T_{1,r} \wedge T_{2,r}$ est admissible (voir [Si2],[De1]). On en conclut que $T_1 \wedge T_2$ est admissible dans $B(x, r)$. \square

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.1 : on fixe un ouvert Ω tel que $T_1, T_2 \in ULP_C(\Omega)$, et dans $\Omega' \subset \subset \Omega$ on utilise la stratification du théorème 2.2.9 : pour $i = 1, 2$ on a

$$T_k = \mathbf{1}_{\mathcal{U}_1^i} T_i + \cdots + \mathbf{1}_{\mathcal{U}_k^i} T_i.$$

Il suffit de démontrer que $\mathbf{1}_{\mathcal{U}^1} T_1 \wedge \mathbf{1}_{\mathcal{U}^2} T_2$ est géométrique, où \mathcal{U} est l'un quelconque des \mathcal{U}_q . Il y a une quantité au plus dénombrable de feuilles réductibles dans \mathcal{U}^i , donc l'ensemble de ces feuilles n'est pas chargé par T_i . Soit K_j^i une exhaustion croissante de \mathcal{U}^i par des fermés saturés évitant les feuilles réductibles. Par le théorème 4.1.1 on a la convergence (croissante)

$$\mathbf{1}_{K_j^1} T_1 \wedge \mathbf{1}_{K_j^2} T_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\mathcal{U}^1} T_1 \wedge \mathbf{1}_{\mathcal{U}^2} T_2$$

et il suffit de montrer que $\mathbf{1}_{K^1}T_1 \wedge \mathbf{1}_{K^2}T_2$ est géométrique (ou K^i est l'un des K_j^i). Notons que si l'ensemble des variétés singulières n'est pas chargé par les courants, on peut choisir les courants $\mathbf{1}_{K^i}T_i$ uniformément laminaires.

Soient $T'_i = \mathbf{1}_{K^i}T_i$ pour $i = 1, 2$, et $\mathcal{L}(T'_i)$ les laminations à plis (de multiplicité 1) correspondantes. Soit \mathcal{L}_{12} l'ensemble des feuilles communes, qui est une sous lamination à plis, et décomposons chacune des $\mathcal{L}(T'_i)$ en $\mathcal{L}_{12} \cup (\mathcal{L}(T'_i) \setminus \mathcal{L}_{12})$. Selon cette décomposition, $T'_i = R_i + S_i$ où R_i est subordonné à \mathcal{L}_{12} . Alors

$$T_1 \wedge T_2 = R_1 \wedge R_2 + S_1 \wedge S_2 + R_1 \wedge S_2 + S_1 \wedge R_2,$$

et tous les produits de cette somme sont admissibles (corollaire 4.1.3). Les deux derniers termes sont clairement nuls.

Par ailleurs, la condition de mesurabilité des potentiels de la proposition 4.1.4 est satisfaite pour les courants uniformément laminaires à plis. C'est en effet une conséquence de la proposition 2.2.6 : localement les feuilles sont des revêtements ramifiés de degré borné dans un bidisque, et en considérant des polynômes de Weierstraß, on obtient une équation de la feuille $V(x)$, dépendant mesurablement de x .

Montrons que $R_1 \wedge R_2 = 0$. On écrit

$$R_i = \int_{\mathcal{L}_{12}} [V] d\mu_i(V),$$

d'après la proposition 4.1.4 pour μ_1 presque tout V , $[V] \wedge R_2$ est admissible, et

$$R_1 \wedge R_2 = \int_{\mathcal{L}_{12}} ([V] \wedge R_2) d\mu_1(V).$$

Finalement, si N_ε est un ε voisinage saturé de $[V]$, on a par théorème de convergence monotone

$$[V] \wedge R_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [V] \wedge \left(\int_{\mathcal{L}_{12} \setminus N_\varepsilon} [V'] d\mu_2(V') \right) = 0.$$

Il reste à montrer que $S_1 \wedge S_2$ est géométrique. Le problème est local autour de $x \in \text{Supp}(S_1) \cap \text{Supp}(S_2)$. Comme x est isolé dans $V_1(x) \cap V_2(x)$, le nombre de points de $V_1(y_1) \cap V_2(y_2)$ est majoré si $y_1, y_2 \in B(x, r)$. En appliquant deux fois la proposition 4.1.4 on obtient

$$S_1 \wedge S_2|_{B(x,r)} = \int \left(\sum_{p \in V_1 \cap V_2 \cap B(x,r)} i_p(V_1, V_2) \right) d\mu_1(V_1) d\mu_2(V_2).$$

Supposons que $i_p(V_1, V_2) > 1$. Alors soit V_1 et V_2 sont lisses en p et tangentes, auquel cas la proposition 2.1.3 dit que toutes les feuilles proches de V_2 intersectent V_1 transversalement (les laminations à plis sont de multiplicité 1), soit par exemple V_1 est singulière en p , et toutes les feuilles voisines de V_2 intersectent V_1 en des points lisses. Dans les deux cas, on en déduit que

$$\{p \in B(x, r), i_p(V_1(p), V_2(p)) > 1\}$$

est de $\mu_1 \otimes \mu_2$ mesure nulle. □

REMARQUE 4.3.4 Le caractère diffus des courants est essentiel en ce qu'il permet de ne pas avoir à introduire de multiplicité d'intersection. On peut néanmoins remarquer que, dans le cas de l'intersection de deux courants uniformément laminaires, il suffit pour ne pas avoir à introduire de multiplicité qu'un seul des deux courants à intersecter soit diffus. La raison est toujours la proposition 2.1.3. Dans ce cas les résultats de cette section sont vrais sans modification.

4.4. Courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2 .

Dans cette section nous étudions sur le plan de l'intersection géométrique la classe des courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2 , dont nous étudierons plus systématiquement une version dans le bidisque au prochain chapitre. Les courants fortement approximables de \mathbb{P}^2 sont essentiellement les courants laminaires construits à partir du théorème 3.1. Nous verrons dans cette section que l'intersection des courants fortement approximables de \mathbb{P}^2 est géométrique dans tout ouvert où ils sont à potentiel continu (théorème 4.4.2). Inversement tous les courants laminaires de \mathbb{P}^2 ne possèdent pas cette propriété.

DÉFINITION 4.4.1 *Soit T un courant positif fermé de \mathbb{P}^2 . T est fortement approximable dans \mathbb{P}^2 s'il existe une suite (C_n) de sous ensembles analytiques de \mathbb{P}^2 , éventuellement à bord, et une constante C , telles que $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$, et pour une projection centrale générique π_p , et pour toute subdivision admissible \mathcal{Q} de \mathbb{P}^1 , si $T_{\mathcal{Q},n}$ désigne le courant formé des bonnes composantes de C_n au dessus de \mathcal{Q} , normalisé par d_n , on ait*

$$\langle d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{Q},n}, \pi^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle \leq C \text{Aire}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{Q}),$$

où Q est un carré générique de \mathcal{Q} .

Nous rappelons qu'une subdivision admissible est une subdivision de \mathbb{P}^1 (à un ensemble d'aire nulle près) en "carrés" disjoints de bord lisses par morceaux, et de $\omega_{\mathbb{P}^1}$ -aire égale (ou comparable). Sous les hypothèses de la définition, la proposition 3.2.7 assure que T est laminaire. Les courants limites de courbes algébriques satisfaisant le critère –théorème 3.1– du chapitre précédent sont fortement approximables, nous avons cependant énoncé la définition sous une forme plus générale pour englober le cas des "courants d'intégration" sur les courbes entières injectives (voir la proposition 3.2.7). On peut écrire une définition locale des courants fortement approximables, mais il est essentiel pour conserver les résultats de cette section de pouvoir choisir une projection générique (en particulier la définition de l'approximabilité forte du chapitre suivant est distincte de celle ci, voir ci-après la remarque 4.4.10).

THÉORÈME 4.4.2 *Soient T_1 et T_2 des courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2 , et supposons qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ dans lequel T_1 et T_2 aient des potentiels locaux continus. Alors le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ est géométrique dans Ω .*

COROLLAIRE 4.4.3 *Soient T_1 et T_2 des courants fortement approximables dans \mathbb{P}^2 , et admettant un produit extérieur dans $\Omega \subset \mathbb{P}^2$. Supposons que dans l'ouvert $\Omega' \subset \Omega$, T_1 et T_2 aient des potentiels continus et que la masse de $T_1 \wedge T_2|_{\Omega'}$ soit totale dans Ω . Alors l'intersection de T_1 et T_2 est géométrique dans Ω .*

Ce corollaire s'applique par exemple si T_1 et T_2 sont de potentiel borné, continu hors d'un fermé pluripolaire (voir [BT2]), ou encore si les potentiels de T_1 et T_2 sont continus hors d'un nombre fini de points ou l'un au plus des T_i admet un nombre de Lelong –une situation

analogue apparaît naturellement dans la dynamique de certaines applications birationnelles [Di]).

COROLLAIRE 4.4.4 *Soit T un courant fortement approximable dans \mathbb{P}^2 , de potentiel continu dans $\Omega \subset \mathbb{P}^2$. Alors $T \wedge T = 0$ dans Ω . En particulier il n'existe pas de courant fortement approximable dont les potentiels locaux sont partout continus dans \mathbb{P}^2 .*

La deuxième partie du corollaire vient de ce qu'un courant positif fermé de \mathbb{P}^2 tel que $T \wedge T$ soit admissible est d'auto-intersection strictement positive pour des raisons homologiques [FS2]. On déduit en particulier de ce corollaire que les courants laminaires de potentiel continu dans \mathbb{P}^2 –c'est le cas en particulier pour l'exemple de Demailly 2.3.9– ne sont pas fortement approximables. Une autre manière de le voir est de vérifier que le courant $T = dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|)$ (l'exemple de Demailly) contredit la proposition 4.4.6 ci-dessous, plus précisément l'équation (4.5). En effet un calcul simple montre que la masse de T dans un r -voisinage du tore unité $\{|z| = |w| = 1\}$ est $O(r)$.

Une autre conséquence du corollaire est le fait que pour le courant de Green T^+ d'un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 , qui est de potentiel continu dans \mathbb{C}^2 , l'auto-intersection $T^+ \wedge T^+$ est concentrée au point d'indétermination I^+ .

REMARQUE 4.4.5 L'auto-intersection géométrique d'un courant laminaire est par définition toujours nulle, donc si T est un courant laminaire de \mathbb{P}^2 tel que $T \wedge T$ soit admissible, ce produit, qui est de masse strictement positive, n'est jamais géométrique. Il serait intéressant d'en comprendre la structure.

Montrons le théorème 4.4.2. On dira que \mathcal{S} est une *subdivision standard* de \mathbb{C} en carrés de taille r , si \mathcal{S} est l'image par une isométrie affine de la subdivision

$$\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{z \in \mathbb{C}, mr < \Re(z) < (m+1)r, nr < \Im(z) < (n+1)r\}.$$

PROPOSITION 4.4.6 *Soit T un courant laminaire fortement approximable dans \mathbb{P}^2 et soit $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ une boule. Alors il existe des projections linéaires π_1, π_2 telles que pour toutes subdivisions standard $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ de \mathbb{C} en carrés de taille r ,*

$$\mathcal{Q} = \{\pi_1^{-1}(s_1) \cap \pi_2^{-1}(s_2), (s_1, s_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2\}$$

est une subdivision d'un voisinage de $\overline{\Omega}$ en 4-cubes affines de taille $\geq cr$ et il existe un courant $T_{\mathcal{Q}} \leq T$, uniformément laminaire dans chaque $Q \in \mathcal{Q}$, et tel que

$$\mathbf{M}_{\Omega}(T - T_{\mathcal{Q}}) \leq Cr^2, \quad (4.5)$$

où c, C sont indépendants de r (\mathbf{M}_{Ω} désigne la masse restreinte à Ω).

PREUVE : la preuve est similaire à celle de la proposition 3.2.4, la différence étant que l'on doit contrôler la masse simultanément dans deux directions. Soit $T_n = d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$ où C_n satisfait les hypothèses de la définition 4.4.1, et soient deux projections centrales $\pi_{p_i} =: \pi_i$ génériques au sens de la définition 4.4.1 telles que l'ensemble des disques π_i -verticaux soit de $\|T\|$ mesure nulle pour $i = 1, 2$ et telles que $\overline{\Omega} \cap (p_1 p_2) = \emptyset$ (remarquer que $\mathbb{P}^2 \setminus (p_1 p_2) \simeq \mathbb{C}^2$). Considérons deux subdivisions standard \mathcal{S}_i de taille r et formons les courants $T_{\mathcal{S}_i, n}^i$ en retirant à $d_n^{-1}[C_n]$ les

mauvaises composantes relatives à π_i et \mathcal{S}_i , ainsi que les composantes de trop grand volume, comme dans la proposition 3.2.4, de façon à ce que l'estimée (3.4) soit satisfaite :

$$\langle T_n - T_{\mathcal{S}_i, n}^i, \pi_i^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle \leq Cr^2, \quad i = 1, 2.$$

Pour $i = 1, 2$, le courant $T_{\mathcal{S}_i, n}^i$ est le courant d'intégration sur une courbe à bord (non nécessairement connexe), dont le bord est inclus dans $\pi_i^{-1}(\partial \mathcal{S}_i)$,

$$T_{\mathcal{S}_i, n}^i = \frac{1}{d_n} [C_{\mathcal{S}_i, n}^i],$$

et considérons

$$T_{\mathcal{Q}, n} = \frac{1}{d_n} [C_{\mathcal{S}_1, n}^1 \cup C_{\mathcal{S}_2, n}^2] =: \frac{1}{d_n} [C_{\mathcal{Q}, n}]$$

où \mathcal{Q} est la subdivision définie dans l'énoncé de la proposition (la constante c ne dépend que de l'angle entre les deux projections). Par construction $C_{\mathcal{Q}, n}$ est une courbe holomorphe à bord dans \mathbb{P}^2 , dont le bord est inclus dans $\partial \mathcal{Q}$ et comme pour $i = 1, 2$, $T_n - T_{\mathcal{Q}, n} \leq T_n - T_{\mathcal{S}_i, n}^i$, on en déduit

$$\langle T_n - T_{\mathcal{Q}, n}, \pi_1^* \omega_{\mathbb{P}^1} + \pi_2^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle \leq 2Cr^2;$$

il est par ailleurs à noter que $\pi_1^* \omega_{\mathbb{P}^1} + \pi_2^* \omega_{\mathbb{P}^1}$ est une forme Kählerienne au voisinage de $\overline{\Omega}$.

Il reste à voir qu'une sous suite de $T_{\mathcal{Q}, n}$ converge vers un courant $T_{\mathcal{Q}}$, uniformément laminaire dans chaque $Q \in \mathcal{Q}$. Soit $Q \in \mathcal{Q}$, décomposons $C_{\mathcal{Q}, n} \cap Q$ en union disjointe

$$C_{\mathcal{Q}, n} \cap Q = (C_{\mathcal{S}_1, n}^1 \cap Q) \cup [(C_{\mathcal{S}_2, n}^2 \cap Q) \setminus (C_{\mathcal{S}_1, n}^1 \cap Q)],$$

ainsi que $T_{\mathcal{Q}, n} := T_{\mathcal{Q}, n}|_Q = T_{\mathcal{Q}, n}^1 + T_{\mathcal{Q}, n}^2$ selon cette décomposition. Toutes les courbes de $T_{\mathcal{Q}, n}^i$ sont des restrictions à Q de graphes pour π_i de volume contrôlé. Il existe donc une sous suite $T_{\mathcal{Q}, n_j}$ telle que

$$T_{\mathcal{Q}, n_j} = T_{\mathcal{Q}, n_j}^1 + T_{\mathcal{Q}, n_j}^2 \rightharpoonup T_Q^1 + T_Q^2 = T_Q$$

où T_Q^i est uniformément laminaire et formé de restrictions à Q de graphes pour π_i : on reproduit l'argument de 3.2.4.

De plus si $x \in \text{Supp}(T_Q^1) \cap \text{Supp}(T_Q^2)$, et Δ^1, Δ^2 sont les disques correspondants passant par x , alors $\Delta^1 = \Delta^2$. En effet si x était un point isolé de $\Delta^1 \cap \Delta^2$, les disques approximatifs respectifs $\Delta_{n_j}^1$ et $\Delta_{n_j}^2$ des $T_{\mathcal{Q}, n_j}^i$ devraient se couper, ce qui est impossible puisque ces disques sont des bonnes composantes de C_n . Ceci montre que T_Q est uniformément laminaire. \square

REMARQUE 4.4.7 On pourrait simplifier la dernière étape de la preuve en utilisant les courants uniformément laminaires à plis. En effet d'après le théorème 2.2.11, les valeurs d'adhérence de $T_{\mathcal{Q}, n}$ sont des courants à plis dans chaque cube $Q \in \mathcal{Q}$, et dans la preuve ci-après, on peut remplacer "uniformément laminaire" par "uniformément laminaire à plis" puisque l'intersection des courants à plis est géométrique. Nous nous en tenons aux courants uniformément laminaires pour la commodité du lecteur.

PREUVE DU THÉOREME 4.4.2 : le problème est local donc on peut supposer que Ω est une boule. Soit ν la mesure $T_1 \wedge T_2$, nous supposons que $\|\nu\| \leq 1$ dans Ω . Nous allons construire une suite croissante de mesures d'intersection géométrique $\nu_{\mathcal{Q}} \leq \nu$ telles que $\mathbf{M}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}) \rightarrow 0$ quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Par la proposition précédente, on dispose de deux projections, que l'on pourra supposer être les mêmes pour T_1 et T_2 (ici on utilise le fait que les courants sont approximables dans \mathbb{P}^2), et quitte à composer avec une application affine, on pourra les supposer orthogonales. Etant données des subdivisions standard de \mathbb{C} de taille r , on considèrera la subdivision en cubes \mathcal{Q} induite, qui sera vue comme restriction à Ω d'une subdivision en cubes de \mathbb{C}^2 . Pour $Z \in \mathbb{C}^2$, soit $\mathcal{Q}_Z := Z + \mathcal{Q}$ la subdivision translatée; si Z est dans le réseau $L(\mathcal{Q})$ des sommets de \mathcal{Q} , alors $\mathcal{Q}_Z = \mathcal{Q}$. Le nombre de cubes rencontrant Ω est $N(\mathcal{Q}_Z) \leq C_0/r^4$, où C_0 est indépendante de Z .

Soit un nombre réel $\lambda < 1$, et pour $Q \in \mathcal{Q}$, soit Q^λ l'homothétique de Q de rapport λ par rapport à son centre. Le volume de Lebesgue $\text{Leb}(Q^\lambda)$ est $\lambda^4 r^4$. Soit $\mathcal{Q}^\lambda := \cup_{Q \in \mathcal{Q}} Q^\lambda$, $(\mathcal{Q}^\lambda)^c := \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{Q}^\lambda$,

$$\text{Leb}(\Omega \cap (\mathcal{Q}^\lambda)^c) \leq N(\mathcal{Q})(1 - \lambda^4)r^4 \leq C_0(1 - \lambda^4).$$

LEMME 4.4.8 *Il existe $Z \in \mathbb{C}^2$ tel que $\nu(\Omega \cap (\mathcal{Q}_Z^\lambda)^c) < 2(1 - \lambda^4)$.*

PREUVE : le lemme est une conséquence simple de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation et du théorème de Fubini. C'est une généralisation du fait que quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $\nu(\partial\mathcal{Q}) = 0$. Par périodicité il suffit de considérer $Z \in \overline{\mathcal{Q}}$ pour un certain $Q \in \mathcal{Q}$. On a

$$\int_{\overline{\mathcal{Q}}} \nu(\Omega \cap (\mathcal{Q}_Z^\lambda)^c) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)} = \int_{\overline{\mathcal{Q}}} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{Z+(\mathcal{Q}^\lambda)^c}(y) d\nu(y) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)}$$

et $y \in Z+(\mathcal{Q}^\lambda)^c$ si et seulement si $Z \in y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c$. Donc $\mathbf{1}_{Z+(\mathcal{Q}^\lambda)^c}(y) = \mathbf{1}_{y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(Z)$. L'intégrale précédente vaut donc

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\overline{\mathcal{Q}}} \mathbf{1}_{y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(Z) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)} \right) d\nu(y) = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Leb}(Q)} \text{Leb}((y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c) \cap Q) d\nu(y),$$

et pour tout $y \in \mathbb{C}^2$, $\text{Leb}((y - (\mathcal{Q}^\lambda)^c) \cap Q) = \text{Leb}(Q \setminus \mathcal{Q}^\lambda) = (1 - \lambda^4) \text{Leb}(Q)$, par invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{C}^2/L(\mathcal{Q})$. D'où

$$\int_{\overline{\mathcal{Q}}} \nu(\Omega \cap (\mathcal{Q}_Z^\lambda)^c) \frac{d\text{Leb}(Z)}{\text{Leb}(Q)} \leq (1 - \lambda^4)$$

et le lemme est démontré.

On fixe donc Z_0 satisfaisant la conclusion du lemme et par abus de notation, on renomme \mathcal{Q} la subdivision translatée $Z_0 + \mathcal{Q}$. On applique la proposition 4.4.6 aux courants T_i , et ainsi on obtient des courants $T_{i,\mathcal{Q}} \leq T_i$, uniformément laminaires dans chaque $Q \in \mathcal{Q}$, et tels que $\mathbf{M}(T_i - T_{i,\mathcal{Q}}) \leq Cr^2$. Soit $T_{i,Q} = T_{i,\mathcal{Q}}|_Q$, le produit $T_{1,Q} \wedge T_{2,Q}$ est admissible dans Q (d'après [BLS] lemme 8.2 les $T_{i,Q}$ sont en fait à potentiel continu), et est géométrique par le théorème 4.3.1. Soit

$$\nu_{\mathcal{Q}} = T_{1,\mathcal{Q}} \wedge T_{2,\mathcal{Q}} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} T_{1,Q} \wedge T_{2,Q} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} T_{1,Q} \wedge T_{2,Q};$$

on a $\nu_{\mathcal{Q}} \leq \nu$ et il reste à estimer $\mathbf{M}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}})$.

La masse se décompose en

$$\mathbf{M}_{\Omega}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}) = \mathbf{M}_{\Omega \cap \mathcal{Q}^\lambda}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}) + \mathbf{M}_{\Omega \cap (\mathcal{Q}^\lambda)^c}(\nu - \nu_{\mathcal{Q}}).$$

Le deuxième terme est majoré par $2(1 - \lambda^4)$ d'après le lemme précédent. On fixe λ tel que $2(1 - \lambda^4) < \varepsilon/2$. Il reste à majorer $\mathbf{M}_{\Omega \cap Q^\lambda}(\nu - \nu_Q)$ Soit $Q \in \mathcal{Q}$, alors

$$\begin{aligned} T_1 \wedge T_2 - T_{1,Q} \wedge T_{2,Q} &= (T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2 + T_{1,Q} \wedge (T_2 - T_{2,Q}) \\ &\leq (T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2 + T_1 \wedge (T_2 - T_{2,Q}). \end{aligned}$$

Par symétrie il suffit de considérer le premier terme. Soit u_2 un potentiel de T_2 dans Ω , et soit χ une fonction plateau dans Q , $\chi \in C_0^\infty(Q)$, $\chi \geq 0$, $\chi = 1$ au voisinage de Q^λ . On peut prendre par exemple $\chi(z) = \chi_0(c_Q + z/r)$, où χ_0 est une fonction analogue dans le cube unité. λ étant fixé, $\|dd^c \chi\|_{L^\infty} = O(\frac{1}{r^2})$. Par ailleurs

$$\mathbf{M}_{Q^\lambda}((T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2) \leq \int \chi(T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2 = \int u_2 dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}),$$

et si c_Q est le centre de Q , on remarque (cf. [BT1] Theorème 2.4) que

$$\int u_2 dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}) = \int (u_2 - u_2(c_Q)) dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}).$$

Donc

$$\int u_2 dd^c \chi \wedge (T_1 - T_{1,Q}) \leq C\omega(u_2, r)\mathbf{M}(T_1 - T_{1,Q}) \|dd^c \chi\|_{L^\infty} \leq C\omega(u_2, r)\frac{1}{r^2}\mathbf{M}(T_1 - T_{1,Q}),$$

où $\omega(u_2, r)$ est le module de continuité de u_2 de rayon r . En prenant la somme sur $Q \in \mathcal{Q}$, et en utilisant (4.5) on obtient

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{M}_{Q^\lambda}((T_1 - T_{1,Q}) \wedge T_2) \leq C\omega(u_2, r),$$

soit

$$\mathbf{M}_{\Omega \cap Q^\lambda}(\nu - \nu_Q) \leq C(\omega(u_1, r) + \omega(u_2, r)).$$

Donc si r est suffisamment petit, $\mathbf{M}_\Omega(\nu - \nu_Q) < \varepsilon$.

En reproduisant inductivement le même procédé dans chaque cube, on obtient bien une suite croissante de mesures ν_Q \square

REMARQUE 4.4.9 On déduit de la preuve que si l'un de T_1 ou T_2 , par exemple T_1 , est uniformément laminaire, alors les termes correspondant à $(T_1 - T_{1,Q})$ sont nuls. En particulier dans ce cas l'hypothèse de potentiel continu pour T_2 est inutile. Nous avons donc montré le résultat suivant : si T_1 est un courant uniformément laminaire et à potentiel continu dans Ω , et T_2 est un courant fortement approximable quelconque de \mathbb{P}^2 , alors l'intersection $T_1 \wedge T_2$ est géométrique dans Ω .

REMARQUE 4.4.10 Il est essentiel dans la preuve de pouvoir choisir des projections génériques ; en particulier ce résultat ne s'applique pas dans le cadre du chapitre suivant (cadre des applications d'allure Hénon), pour l'intersection d'un courant horizontal et d'un courant vertical. Nous utiliserons cependant la même terminologie "fortement approximable" . *A priori* les deux classes sont distinctes. Il serait intéressant de savoir si tel est effectivement le cas.

A contrario, et nous utiliserons ce fait plusieurs fois par la suite, si l'on peut choisir un même couple de projections (π_1, π_2) de sorte que la conclusion de la proposition 4.4.6 soit simultanément satisfaite pour T_1 et T_2 , alors les résultats de cette section sont valables. Ceci est en particulier vrai si $T_1 = T_2 = T$.

4.5. Un cas particulier.

Nous présentons dans cette section un cas particulier d'intersection géométrique entre un courant laminaire et un courant uniformément laminaire, respectivement horizontal et vertical dans un bidisque. L'intérêt de ce résultat est que les seules hypothèses faites sur les courants en présence sont de nature géométrique, et que les potentiels n'interviennent pas directement. S'agissant d'intersection géométrique, nous l'avons inclus dans ce chapitre, mais les objets considérés s'apparentent plutôt au chapitre 5. Ce résultat n'étant pas cité par la suite, certains détails seront laissés à l'attention du lecteur.

THÉORÈME 4.5.1 *Soit T un courant positif fermé laminaire, horizontal et normalisé dans le bidisque \mathbb{B} , ne chargeant pas les courbes. On suppose qu'il existe une suite de courbes lisses à support dans $\mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$, de genre $O(d_n)$, telle que*

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n} [C_n].$$

Soit \mathcal{L} une lamination par graphes verticaux dans \mathbb{B} , et S un courant vertical, uniformément laminaire, diffus et subordonné à \mathcal{L} .

Alors l'intersection $T \wedge S$ est géométrique.

Le produit extérieur considéré ici est bien entendu admissible puisque son support est relativement compact dans \mathbb{B} . Le lecteur pourra se reporter à la section suivante 5.1 pour plus de détails sur les courants laminaires horizontaux et verticaux. Le reste de la section sera consacré à la preuve du théorème.

On peut supposer la lamination \mathcal{L} étendue à un voisinage du support de S (voir [Do]), et on notera $\pi_{\mathcal{L}}$ la projection (holonomie) $\text{Supp}(\mathcal{L}) \rightarrow U \subset \{0\} \times \mathbb{D}$. La projection $\pi_{\mathcal{L}}$ est Hölderienne, et même quasi conforme des transversales $\text{Supp}(\mathcal{L}) \cap (\{w\} \times \mathbb{D})$ à valeurs dans U . Le courant uniformément laminaire S admet la représentation

$$S = \int_U [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)] d\mu_S(x).$$

On peut également supposer que l'ouvert $U \subset \mathbb{D}$ est simplement connexe et de bord lisse. Par ailleurs, le *degré homologique* de C_n , i.e. la classe de C_n dans $H_2(\mathbb{B} \cup \partial_v \mathbb{B}, \partial_v \mathbb{B})$ (voir le chapitre 1 ou la section suivante pour plus de détails) est équivalent à d_n ; nous supposons sans perte de généralité qu'il vaut d_n . Rappelons que dans ce cas le nombre de points d'intersection, comptés avec multiplicité, de C_n avec un graphe vertical est égal à d_n .

Nous allons construire des sommes de courants uniformément laminaires approchant T et constitués de graphes au dessus de U pour la projection $\pi_{\mathcal{L}}$. On considère un quadrillage \mathcal{Q} de U assez fin pour que les carrés ne rencontrent pas ∂U et $\text{Supp}(S)$ simultanément, ainsi que la subdivision de $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ en $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)$ $Q \in \mathcal{Q}$. On dira comme précédemment d'une composante

connexe Γ de $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q) \cap C_n$, qu'elle est *bonne* si c'est un graphe (i.e. une section de $\pi_{\mathcal{L}}$) au dessus de Q , *mauvaise* sinon.

LEMME 4.5.2 *Le nombre de mauvaises composantes de C_n comptées avec multiplicité est $O(d_n)$*

PREUVE : il nous faut d'abord montrer que les composantes ont une multiplicité bien définie. La difficulté est que la projection $\pi_{\mathcal{L}}$ n'est pas holomorphe. Une autre différence avec les méthodes de la section 3.2 est qu'il est impossible de changer de projection puisque $\pi_{\mathcal{L}}$ est ici imposée.

Si Γ est une composante au dessus de Q (i.e. une composante connexe de $C_n \cap \pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)$), alors $\pi_{\mathcal{L}} : \Gamma \rightarrow Q$ est propre d'après les hypothèses du théorème. Par ailleurs $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)$ est topologiquement un bidisque, donc si $x \in Q$, le nombre de points d'intersection comptés avec multiplicité des courbes holomorphes $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)$ et Γ , qui sont respectivement verticale et horizontale dans ce bidisque topologique, ne dépend que des classes d'homologie relative correspondantes (voir le chapitre 1). En particulier ce nombre est indépendant de $x \in Q$. Ce nombre est par définition la multiplicité de la composante Γ , qui est bonne si et seulement si sa multiplicité est 1.

De plus d'après la proposition 2.1.3 le nombre de fibres $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)$ tangentes à Γ est fini, et au voisinage d'un tel point de tangence, $\pi_{\mathcal{L}}$ a un degré local bien défini, qui est égal à l'ordre de tangence entre $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)$ et Γ en ce point. Ainsi $\pi_{\mathcal{L}}|_{\Gamma}$ est un revêtement ramifié sur Q .

Le lemme 3.2.2 s'applique alors ici sans modification et affirme que si la subdivision \mathcal{Q} sépare les fibres critiques, le nombre de mauvaises composantes comptées avec multiplicité ne dépend pas de la subdivision. Ce nombre est alors égal au nombre de tangences (avec multiplicité) de C_n avec les fibres de $\pi_{\mathcal{L}}$ dans $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$.

Pour compter le nombre de mauvaises composantes, il reste à voir que la formule de Riemann-Hurwitz s'applique à $\pi_{\mathcal{L}}$. La preuve de la formule consiste à considérer une triangulation de la base dont les projetées des fibres critiques sont des sommets. L'image réciproque par $\pi_{\mathcal{L}}$ de cette triangulation induit une triangulation de C_n dont on doit compter arêtes, faces et sommets. La projection $\pi_{\mathcal{L}}$ ayant un degré local bien défini près de ses points de ramification, le décompte s'effectue comme si elle était holomorphe, et l'estimation sur le genre de C_n , jointe au fait que le nombre de composantes de bord est majoré par d_n donnent le résultat³. \square

Nous achevons la preuve du théorème. On considère une subdivision de U satisfaisant la conclusion du lemme, et pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ on forme comme à la section 3.2 le courant $T_{Q,n}$ des bonnes composantes de C_n au dessus de Q (normalisé par d_n),

$$T_{Q,n} = \frac{1}{d_n} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(Q,n)} [\Gamma],$$

où $\mathcal{G}(Q,n)$ désigne l'ensemble des bonnes composantes au dessus de Q . Le courant $T_{Q,n}$ est uniformément laminaire dans $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)$. Fixons un carré Q , ainsi que $x_0 \in Q$; la suite de

³Un calcul similaire sera détaillé au théorème 5.1.4.

mesures (l'admissibilité des produits extérieurs est conséquence de la proposition 4.3.3)

$$\lambda_{Q,n}(x_0) := T_{Q,n} \wedge [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x_0)] = T_{Q,n} \wedge [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x_0)]$$

est de masse bornée car le graphe $[\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x_0)]$ coupe C_n en d_n points. On effectue une extraction de sorte que $\lambda_{Q,n_j}(x_0) \rightarrow \lambda_Q(x_0)$ puis une nouvelle extraction n_{j_k} telle que $T_{Q,n_{j_k}} \rightarrow T_Q$. On note $n := n_{j_k}$.

D'après le lemme 3.2.6, $\mathcal{G}(Q, n)$ converge vers une lamination $\mathcal{G}(Q)$ de $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)$, et le courant T_Q est uniformément laminaire et subordonné à $\mathcal{G}(Q)$, $\lambda_Q(x_0)$ étant la mesure transverse associée dans $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x_0)$. On en déduit⁴ que pour tout $x \in Q$,

$$T_{Q,n} \wedge [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)] \rightarrow T_Q \wedge [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)].$$

En effet, ces produits extérieurs sont géométriques (voir la remarque 4.3.4) et la convergence est donc conséquence de la convergence des suites $\mathcal{G}(Q, n)$ et $\lambda_{Q,n}(x_0)$.

Il vient alors

$$T_{Q,n} \wedge \int_Q [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)] d\mu_S(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_Q \wedge \int_Q [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)] d\mu_S(x).$$

En effet on a les inégalités $T_{Q,n} \leq d_n^{-1}[C_n]$, $T_Q \leq T$ et $\int_Q [\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(x)] d\mu_S(x) \leq S$ dans $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)$ donc les produits extérieurs sont admissibles et on peut appliquer le théorème de Fubini (proposition 4.1.4). D'où en particulier

$$\mathbf{M} \left((T_{Q,n} \wedge S)|_{\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)} \right) = \mu_S(Q) \frac{\#\mathcal{G}(Q, n)}{d_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left((T_Q \wedge S)|_{\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)} \right).$$

En réalisant la même opération dans chaque carré de \mathcal{Q} , on obtient (après une extraction convenable)

$$\mathbf{M} \left(\sum_{Q \in \mathcal{Q}} ((T - T_Q) \wedge S)|_{\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(Q)} \right) = \mathbf{M}((T - T_{\mathcal{Q}}) \wedge S) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu_S(Q) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n - \#\mathcal{G}(Q, n)}{d_n} \right).$$

Par ailleurs

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} (d_n - \#\mathcal{G}(Q, n))$$

étant le nombre total, avec multiplicité, de mauvaises composantes pour la subdivision \mathcal{Q} , il vient

$$\mathbf{M}((T - T_{\mathcal{Q}}) \wedge S) \leq C \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mu_S(Q),$$

et le membre de droite est arbitrairement petit puisque μ_S est diffuse. Le produit extérieur $T_Q \wedge S$ étant bien sûr géométrique, le théorème est démontré. \square

⁴A la différence de la proposition 3.2.4 la projection $\pi_{\mathcal{L}}$ n'est pas lipschitzienne et on ne peut pas directement appliquer la théorie du slicing. C'est pour cette raison qu'on a d'abord extrait une sous suite visant à faire converger $\lambda_{Q,n}(x_0)$.

Chapitre 5

Structure des courants approximables

Nous tentons une étude systématique de la structure des courants fortement approximables, rencontrés au chapitre précédent, en nous intéressant plus particulièrement aux propriétés de prolongement analytique des disques subordonnés à un tel courant. L'accent est mis sur les courants fortement approximables horizontaux dans un bidisque, qui apparaissent naturellement en dynamique des automorphismes polynomiaux et des applications d'allure Hénon –les résultats sont cependant valables dans un cadre plus général.

Nous rappelons à la section 5.1 quelques propriétés basiques des courants horizontaux (déjà rencontrés au chapitre 1) et démontrons un critère analogue au théorème 3.1 dans ce cadre. La section 5.2 est consacrée au problème du prolongement analytique des disques d'un courant fortement approximable. Le théorème 5.2.12, qui est le cœur du chapitre est le suivant :

si T est un courant horizontal fortement approximable dans \mathbb{B} , si S est un courant uniformément laminaire élémentaire dans $U \times \mathbb{D}$, subordonné à T dans $U_1 \times \mathbb{D}$ où $U_1 \subset U$, alors S est subordonné à T dans $U \times \mathbb{D}$.

Un corollaire de ce théorème est que ces courants sont simples (de multiplicité localement constante). Ceci nous permet de construire à la section 5.3, suivant une méthode développée par Meiyu Su, une lamination mesurée abstraite, immergée dans $\text{Supp}(T)$ et préservant la structure laminaire. À la section 5.4, nous étendons ces résultats au cas des “courants fortement approximables” généraux, pour lesquels nous esquissons une approche axiomatique.

5.1. Courants horizontaux fortement approximables.

Nous préparons dans cette section l'étude systématique des propriétés des courants fortement approximables horizontaux. Nous rappelons quelques propriétés des courants horizontaux généraux, déjà rencontrés au chapitre 1, et donnons (théorème 5.1.4) dans ce cadre un critère modelé sur le théorème 3.1. Ceci ouvre la voie à une définition des courants horizontaux fortement approximables, analogue à la définition 4.4.1 dans \mathbb{P}^2 .

Rappels et compléments sur les courants horizontaux. Nous rappelons quelques faits du chapitre 1. Un *courant horizontal* est par définition un courant positif fermé de bidegré (1,1) du bidisque \mathbb{B} dont le support est verticalement compact, i.e. $\text{Supp}(T) \subset \mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$ pour un certain ε (on définit de façon analogue les courants verticaux). L'intérêt de ces courants vient de l'existence et des propriétés des sections m^z , qui en font des analogues des revêtements ramifiés.

Rappelons la définition. Soit u un potentiel de T , i.e. $dd^c u = T$, où $d^c = (1/2i\pi)(\partial - \bar{\partial})$ (la normalisation est choisie de sorte que le potentiel du courant d'intégration sur la droite horizontale ($w = w_0$) soit $\log |w - w_0|$). On pose alors sur $\{z\} \times \mathbb{D}$

$$m^z = dd_w^c u = \Delta_w u(z, \cdot) \frac{i}{4\pi} dw \wedge d\bar{w}$$

qui est une mesure à support compact dans $\{z\} \times \mathbb{D}$. Pour le courant $T = [w = 0]$, on a $\|m^z\| = 1$. Soit $\pi : (z, w) \mapsto z$ la première projection. On rappelle que la section $\langle T, \pi, z_0 \rangle$ du courant T par la fibre $\pi^{-1}(z_0)$, quand elle existe – c'est le cas presque partout, et même hors d'un polaire – est la mesure limite de la suite de mesures $T \wedge \pi^*(\chi_\varepsilon(z) idz \wedge d\bar{z})$ où χ_ε est une approximation de l'unité centrée en z_0 (voir [Ra] pour plus de détails).

PROPOSITION 5.1.1 *Si T est un courant horizontal, alors :*

- i. m^z est la section (slice) de T par la fibre $\pi^{-1}(z)$, i.e. $m^z = \langle T, \pi, z \rangle$. De plus $m^z = T \wedge [\{z\} \times \mathbb{D}]$.
- ii. la masse $\|m^z\|$ est indépendante de z .

L'existence du produit extérieur est assurée car $(\{z\} \times \mathbb{D}) \cap \text{Supp}(T) \subset \subset \mathbb{B}$. On dira que $\|m^z\|$ est la masse des sections de z , ce que nous noterons $\|m^z\| = \text{m.s.}(T)$. Si $\text{m.s.}(T) = 1$, comme au chapitre 1, T sera dit *normalisé*.

On a vu à la proposition 1.2.6 que le produit extérieur d'un courant horizontal et d'un courant vertical normalisés est une mesure de probabilité. En particulier la masse des sections de T par une projection proche de la projection verticale π est 1. On en déduit que dans tout bidisque $\mathbb{B}' \subset \subset \mathbb{B}$,

$$\mathbf{M}(T|_{\mathbb{B}'}) \leq C \text{m.s.}(T).$$

Il suffit pour cela de remarquer que

$$\frac{i}{2} d(z - \alpha w) \wedge \overline{d(z - \alpha w)} + \frac{i}{2} d(z + \alpha w) \wedge \overline{d(z + \alpha w)} = idz \wedge d\bar{z} + |\alpha|^2 idw \wedge d\bar{w}$$

et que $\pi_\alpha : (z, w) \mapsto z - \alpha w$ est propre sur $\text{Supp}(T) \cap \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha \mathbb{B}')$ pour α assez petit (i.e. c'est une projection "verticale" dans \mathbb{B}').

Un autre fait que nous utiliserons à plusieurs reprises est la continuité de la masse des sections par convergence faible, autrement dit si $T_n \rightarrow T$ alors $\text{m.s.}(T_n) \rightarrow \text{m.s.}(T)$: il suffit de remarquer que celle ci peut se calculer en évaluant T sur des formes lisses de la forme $\varphi(z)idz \wedge d\bar{z}$ où φ est une fonction test positive d'intégrale 1 dans \mathbb{D} .

La proposition suivante est l'analogie dans le cas des courants horizontaux généraux de l'invariance par holonomie de la famille de mesures m^z pour les courants uniformément laminaires.

PROPOSITION 5.1.2 *Soit T un courant horizontal et (m^z) la famille de ses sections. On a*

i. *Si $F(z, w)$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de \mathbb{B} alors*

$$f(z) = \int_{\{z\} \times \mathbb{D}} F(z, w) dm^z(w)$$

est une fonction holomorphe dans \mathbb{D} .

ii. *$u : (z, w) \mapsto \int_{\{z\} \times \mathbb{D}} \log |w - s| dm^z(s)$ est un potentiel de T .*

PREUVE : T est limite au sens des courants d'une suite de diviseurs rationnels à supports horizontaux [DS], soit $T = \lim T_n = \lim d_n^{-1}[C_n]$ où d_n est le degré homologique de C_n (c'est à dire que $d_n^{-1}[C_n]$ est normalisé). La section m_n^z est dans ce cas la somme normalisée des masses de Dirac aux racines de $P_n(z, \cdot)$, où $(P_n = 0)$ est une équation de C_n (p.ex. un polynôme de Weierstraß).

Alors

$$f_n(z) = \int_{\{z\} \times \mathbb{D}} F(z, w) dm_n^z(w)$$

est holomorphe : en effet si on développe F en série entière on est ramenés au cas classique de

$$S_k(z) = \int_{\{z\} \times \mathbb{D}} w^k dm_n^z(w) = \frac{1}{d_n} \sum w_i^k(z),$$

où les $w_i^k(z)$ sont les racines comptées avec multiplicité de $P_n(z, \cdot)$.

Par ailleurs pour presque tout z , $\frac{1}{d_n} m_n^z \rightarrow m^z$. En effet il suffit de vérifier que pour presque tout z_0 ,

$$\log |z - z_0| T_n \rightarrow \log |z - z_0| T.$$

Le lemme de Hartogs implique [FS2]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log |z - z_0| T_n) \leq \log |z - z_0| T.$$

De plus si φ est une fonction test, $\varphi \geq 0$, on a

$$\left(\int \log |z - z_0| \varphi(z_0) d\lambda(z_0) \right) T_n \rightarrow \left(\int \log |z - z_0| \varphi(z_0) d\lambda(z_0) \right) T$$

puisque le terme entre parenthèses est une fonction lisse de z . La conjonction de ces deux faits entraîne la convergence presque partout.

On conclut la preuve du point *i* : $f_n(z)$ est une suite bornée de fonctions holomorphes, convergeant presque partout vers $f(z)$. La convergence est donc localement uniforme et f est holomorphe.

Pour le deuxième point on utilise un autre argument d'approximation. Remarquer que u est sous harmonique en w , à z fixé. Si $\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(w)$ est un noyau régularisant radial ne dépendant que de w , alors

$$u_\varepsilon(z, w) = \int_{\{z\} \times \mathbb{D}} \log |w - s| d(m^z * \chi_\varepsilon)(s)$$

est sous harmonique dans les tranches $\{z\} \times \mathbb{D}$ et décroît ponctuellement vers u . Il suffit donc de montrer que u_ε est psh et que $dd^c u_\varepsilon = T * \chi_\varepsilon$. Le calcul est fait dans [BS2] lemme 4.2. \square

Courants laminaires horizontaux. On donne dans ce paragraphe un analogue horizontal du théorème 3.1. Ce résultat est une généralisation de la laminarité des courants dynamiques des applications d'allure Hénon. (C_n) désigne une suite de courbes horizontales dans \mathbb{B} , c'est à dire une suite de sous ensembles analytiques de \mathbb{B} à support horizontal, que l'on supposera dans $\mathbb{D} \times D_{1-\varepsilon}$ (quitte à agrandir le bidisque on peut s'affranchir de cette dernière hypothèse), non nécessairement connexes. On reprend les notations de la section 3.2, i.e. \widehat{C}_n désigne la désingularisée de C_n , g_n le genre de \widehat{C}_n , et $n_x(C_n)$ le nombre de composantes irréductibles locales en $x \in C_n$. La courbe \widehat{C}_n est une surface de Riemann lisse, à bord (quitte à réduire \mathbb{B} on peut toujours supposer qu'aucune singularité de C_n ne rencontre $\partial\mathbb{B}$), et son genre est défini de la façon suivante : soit une surface réelle S compacte, connexe, orientable, à bord ; son bord est réunion finie de cercles, et en attachant à chacun de ces cercles un disque d'orientation compatible avec celle de S on obtient une surface compacte orientable sans bord, de genre g . Le nombre g est par définition le genre de S . On en déduit que la caractéristique d'Euler de S est $\chi(S) = 2 - 2g - q$ où q est le nombre de composantes connexes du bord. Si S a plusieurs composantes connexes, on définit le genre comme étant la somme des genres des composantes connexes.

On donne pour commencer une définition utile.

DÉFINITION 5.1.3 *Soit $U \subset\subset \mathbb{D}$ un ouvert, et soit la projection $\pi_\alpha : (z, w) \mapsto z - \alpha w$. On dira que π_α est verticale au dessus de U si $\pi_\alpha^{-1}(\overline{U})$ est un fermé vertical de \mathbb{B} , i.e. $\pi_\alpha^{-1}(\overline{U}) \cap \overline{\mathbb{B}}$ est inclus dans $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}$.*

L'analogue du théorème 3.1 pour les courants horizontaux est le critère suivant. Noter l'absence d'hypothèse d'irréductibilité faite sur les courbes C_n .

THÉORÈME 5.1.4 *Soit (C_n) une suite de courbes horizontales dans \mathbb{B} , de degré homologique d_n , et telle que $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$. On suppose que*

$$g_n + \sum_{x \in \text{Sing}(C_n)} n_x(C_n) = O(d_n).$$

Alors T est laminaire.

PREUVE : la preuve est essentiellement identique à celle du théorème 3.1 ; noter que dans le cadre de ce théorème, si $\text{Supp}(T) \neq \mathbb{P}^2$, le courant T est horizontal pour toute projection centrale π_p , $p \notin \text{Supp}(T)$.

Il suffit de montrer la laminarité dans un bidisque $\mathbb{B}' \subset \subset \mathbb{B}$. Si on fixe un disque $U \subset \mathbb{D}$ assez grand, alors pour α au voisinage de 0, π_α est verticale au dessus de U et $\mathbb{B}' \subset \pi_\alpha^{-1}(U) \subset \mathbb{B}$. En particulier $\pi_\alpha|_{C_n \cap \pi_\alpha^{-1}(U)}$ est propre. Le disque U étant ainsi fixé, on choisit une projection verticale π_α , satisfaisant la liste de propriétés génériques de la proposition 3.2.3, et telle que $\pi_\alpha^{-1}(\partial U) \cap \text{Sing}(C_n) = \emptyset$ pour tout n . On estime le nombre $bc_\alpha(C_n \cap \pi_\alpha^{-1}(U))$ de mauvaises composantes de C_n pour π_α dans $\pi_\alpha^{-1}(U)$. D'après le lemme 3.2.2 ce nombre a un sens sans référence à une subdivision particulière de U .

Soit $\widehat{\pi} : \widehat{C}_n \rightarrow C_n$ la résolution des singularités de C_n (par abus de notation on omet la mention de la restriction à $\pi_\alpha^{-1}(U)$). La courbe C_n n'étant pas nécessairement irréductible, \widehat{C}_n peut ne pas être connexe. Alors

$$\chi(\widehat{C}_n) = \sum_i \chi(\widehat{C}_n^{(i)}) = \sum_i (2 - 2g_n^{(i)} - q_n^{(i)})$$

où les sommes portent sur l'ensemble des composantes connexes de \widehat{C}_n . De plus le nombre de composantes connexes (et de même le nombre total de composantes de bord) est majoré par d_n puisque chacune des composantes contribue au degré homologique. On en déduit que $\chi(\widehat{C}_n) = -2g_n + O(d_n)$.

On peut alors appliquer la formule de Riemann-Hurwitz à $\pi_\alpha \circ \widehat{\pi} : \widehat{C}_n \rightarrow U$, qui est propre,

$$\chi(\widehat{C}_n) = d_n \chi(U) - \sum_{x \in \mathcal{R}(\pi_\alpha \circ \widehat{\pi})} (v(x) - 1),$$

où $\chi(U) = 1$. On obtient en suivant exactement la preuve de la proposition 3.2.3 que $bc_\alpha(C_n \cap \pi_\alpha^{-1}(U)) = O(d_n)$.

Sachant que le nombre de mauvaises composantes de C_n est $O(d_n)$ pour une famille non dénombrable de projections, la laminarité des courants adhérents est alors conséquence de la proposition 3.2.4 ou de [BS5]. \square

Nous allons définir les courants horizontaux fortement approximables (que nous abrègerons le plus souvent en "courants approximables") de façon analogue à la section précédente 4.4. Les courants laminaires horizontaux fortement approximables sont essentiellement les courants laminaires fournis par le théorème précédent ; cependant, comme pour la définition 4.4.1 nous nous plaçons délibérément dans un cadre le plus général possible, incluant l'approximation par des ensembles analytiques à bord –ce qui couvre le cas important des courants adhérents aux courbes entières injectives.

On dira qu'une subdivision d'un ouvert U est *admissible* si elle est la restriction à U d'une subdivision admissible de \mathbb{C} , c'est à dire une subdivision \mathcal{Q} en "carrés" Q (ouverts simplement connexes à bord C^1 par morceaux) d'aire égale (ou comparable¹, i.e. $\exists c, \forall Q_1, Q_2, c^{-1} \text{Aire}(Q_1) \leq \text{Aire}(Q_2) \leq c \text{Aire}(Q_1)$), de sorte qu'il est légitime de parler de l'aire des carrés de la subdivision (éventuellement à constante multiplicative près).

¹Pour ne pas interférer avec les diverses constantes apparaissant dans le cours du texte, il vaut mieux considérer que la constante c est fixée une fois pour toutes les subdivisions, disons $c = 10$.

DÉFINITION 5.1.5 Soit T un courant horizontal fermé laminaire de \mathbb{B} . On dira que T est fortement approximable s'il existe une suite de sous ensembles analytiques horizontaux C_n de \mathbb{B} , éventuellement à bord, telle que $d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$ et une constante C , telle que pour tout $U \subset \subset \mathbb{D}$, pour une projection π_α verticale au dessus de U (Baire)-générique, et pour toute subdivision admissible \mathcal{Q} de U , si $T_{\mathcal{Q},n}$ désigne le courant formé des bonnes composantes de C_n au dessus de \mathcal{Q} , normalisé par d_n , on ait

$$\left\langle d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{Q},n}, \mathbf{1}_{\pi_\alpha^{-1}(U)} \pi_\alpha^*(idz \wedge d\bar{z}) \right\rangle \leq CAire(\mathcal{Q}),$$

où Q est un carré générique de \mathcal{Q} .

L'hypothèse de laminarité faite dans la définition est bien entendu superflue. La différence essentielle avec la définition précédente (dans \mathbb{P}^2) des courants approximables est que l'on ne peut pas choisir une projection générique, mais uniquement une projection verticale. En particulier (voir la remarque 4.4.10 les résultats de la section 4.4 s'appliquent dans le cas de deux courants horizontaux, c'est à dire que les courants horizontaux fortement approximables à potentiel continu s'intersectent géométriquement. En revanche la méthode ne s'applique pas au cas d'un courant horizontal et d'un courant vertical.

REMARQUE 5.1.6 L'ensemble des courants fortement approximables normalisés pour lesquels le paramètre C intervenant dans la définition est majoré par une constante C_0 est compact. Il suffit pour cela d'appliquer un argument de procédé diagonal aux courbes approximantes.

5.2. Fonction de défaut et prolongement analytique.

Nous allons dans cette section étudier le prolongement analytique des disques d'un courant laminaire horizontal fortement approximable. Le résultat principal de la section (théorème 5.2.12) affirme schématiquement que si un disque Δ est subordonné à un courant fortement approximable T , et Δ admet un prolongement analytique $\tilde{\Delta}$, alors $\tilde{\Delta}$ est lui même subordonné à T . Pour cela il nous entrera plus avant dans les détails de l'approximation des courants laminaires, et nous introduisons dans ce cadre une notion de défaut dont nous étudions les propriétés.

Dans toute la section, T est un courant fortement approximable horizontal dans le bi-disque, $\text{m.s.}(T) = 1$, $T = \lim T_n = \lim d_n^{-1}[C_n]$ où (C_n) est une suite de courbes satisfaisant les hypothèses de la définition 5.1.5. Étant donné $U \subset\subset \mathbb{D}$, et une projection π_α verticale au dessus de U , pour une subdivision admissible \mathcal{Q} , on note : $\mathcal{G}(\mathcal{Q}, n)$ la famille des bonnes composantes de C_n au dessus de $Q \in \mathcal{Q}$,

$$T_{Q,n} = \frac{1}{d_n} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{Q},n)} [\Gamma],$$

et $T_{\mathcal{Q},n} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} T_{Q,n}$. On a d'après la définition,

$$\left\langle d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{Q},n}, \mathbf{1}_{\pi_\alpha^{-1}(U)} \pi_\alpha^*(idz \wedge d\bar{z}) \right\rangle \leq CAire(Q). \quad (5.1)$$

Nous rappelons que T admet une décomposition polaire $T = t \|T\|$ (voir l'équation (2.2)). On fixe pour le reste de la section une projection π_α telle que

$$\{x \in \text{Supp}(T), t(x) \text{ parallèle à la direction de projection } \text{Ker}(d\pi_\alpha)\}$$

soit de $\|T\|$ mesure nulle². Ceci assure que la suite des courants uniformément laminaires $T_{\mathcal{Q}}$ converge vers T (voir la fin de la preuve de la proposition 3.2.4).

En faisant un changement affine de coordonnées, on supposera dorénavant, pour alléger les notations, que U est le disque unité \mathbb{D} , que la projection π_α est la projection sur la première coordonnée π , et que le courant T est horizontal et fortement approximable dans $D_{1+\eta} \times \mathbb{D}$. Soit \mathcal{Q} la subdivision standard de \mathbb{C} en carrés ouverts disjoints à cotés de longueur 1, parallèles aux axes de coordonnées, et telle que 0 soit dans l'angle d'un carré. Soient les subdivisions suivantes (voir la figure 5.1) :

$$\mathcal{Q}_k^0 = r_k \mathcal{Q}, \quad \mathcal{Q}_k^1 = r_k \mathcal{Q} + \left(\frac{r_k}{3} + \frac{2ir_k}{3}\right), \quad \mathcal{Q}_k^2 = r_k \mathcal{Q} + \left(\frac{2r_k}{3} + \frac{ir_k}{3}\right),$$

²Un corollaire de notre étude (voir le théorème 5.2.12) est que toute projection verticale est en fait convenable.

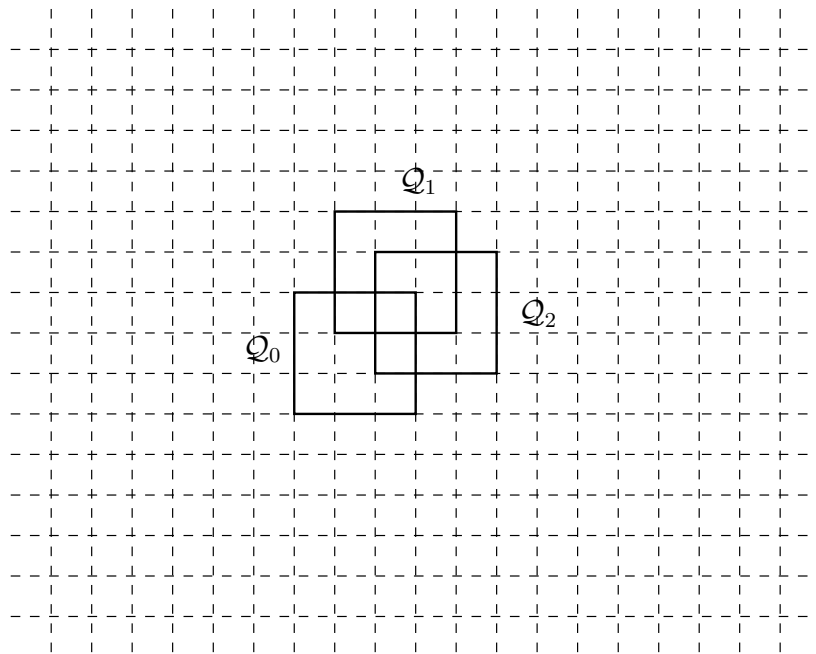


FIG. 5.1 – Les quadrillages.

de sorte que les ouverts des subdivisions \mathcal{Q}_k^j , $k \geq 0$, $j = 0, 1, 2$ forment une base de voisinages du plan (on pourra prendre par exemple $r_k = 2^{-k}$). On considèrera la trace de ces subdivisions dans \mathbb{D} . Dans la suite l'expression “un carré” sans mention particulière désignera un carré quelconque de l'une des subdivisions \mathcal{Q}_k^j , $k \geq 0$, $j = 0, 1, 2$.

Pour $Q \in \mathcal{Q}_k^j$ on peut extraire une sous suite de $T_{Q,n}$ convergeant vers un courant uniformément laminaire T_Q , formé de graphes au dessus de Q . Par un argument de procédé diagonal, on peut trouver une extraction, que nous continuerons à noter n , telle que pour tous $k \geq 0$, $0 \leq j \leq 2$, et pour tout $Q \in \mathcal{Q}_k^j$, on ait la convergence $T_{Q,n} \rightarrow T_Q$. On pose $T_{\mathcal{Q}_k^j} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k^j} T_Q$ et de (5.1) on déduit

$$\langle T - T_{\mathcal{Q}_k^j}, \pi^*(idz \wedge d\bar{z}) \rangle \leq Cr_k^2. \quad (5.2)$$

DÉFINITION 5.2.1 Pour tout $Q \in \mathcal{Q}_k^j$, $k \geq 0$, $0 \leq j \leq 2$, on définit le défaut de Q par

$$\text{dft}(Q) = 1 - \text{m.s.}(T_Q).$$

On rappelle que si S est un courant horizontal, $\text{m.s.}(S)$ désigne la masse des sections de S . La mention de T est ici implicite puisque T est fixé dans cette section. Dans le cas d'un courant T général, on définit $\text{dft}_T(Q) = \text{m.s.}(T) - \text{m.s.}(T_Q)$.

Le défaut $\text{dft}(Q)$ est la proportion asymptotique de mauvaises composantes de C_n au dessus de Q : en effet pour tout Q , $\text{m.s.}(T_{Q,n}) \rightarrow \text{m.s.}(T_Q)$, et $\text{m.s.}(T_{Q,n})$ est la proportion de bonnes composantes de C_n au dessus de Q . Le défaut a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 5.2.2

- i. k, j étant fixés, $\sum_{Q \in \mathcal{Q}_k^j} \text{dft}(Q) \leq C$;
 ii. Si $Q' \subset Q$ alors $\text{dft}(Q') \leq \text{dft}(Q)$.

PREUVE : pour $Q \in \mathcal{Q}_k^j$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n - T_{Q,n}, \mathbf{1}_{Q \times \mathbb{D}} \pi^*(idz \wedge d\bar{z}) \rangle = \text{dft}(Q) r_k^2,$$

et il suffit d'appliquer l'estimation (5.2) pour obtenir *i*. Le deuxième point provient de ce qu'une bonne composante de $\mathcal{G}(Q, n)$ est aussi une bonne composante au dessus de Q' , donc $\text{m.s.}(T_{Q,n}) \geq \text{m.s.}(T_{Q',n})$ (on utilise ici le fait qu'on a effectué la même extraction pour tous les carrés des subdivisions successives). \square

DÉFINITION 5.2.3 Soit $x \in \mathbb{D}$. On pose $\text{dft}(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{dft}(Q_p)$, où $(Q_p)_p$ est une suite décroissante de carrés telle que $\bigcap_{p \geq 0} Q_p = \{x\}$.

Une fibre $\{x\} \times \mathbb{D}$ sera dite régulière si $\text{dft}(x) = 0$, singulière (resp. ε -singulière) si $\text{dft}(x) > 0$ (resp. $\text{dft}(x) \geq \varepsilon$).

La définition est non ambiguë car d'une part pour une suite décroissante de carrés, la suite $\text{dft}(Q_p)$ décroît, et de plus si (Q'_r) est une autre suite de carrés décroissant vers $\{x\}$, p étant fixé, pour r assez grand on a $\text{dft}(Q'_r) \leq \text{dft}(Q_p)$, d'où $\lim_r \text{dft}(Q'_r) \leq \lim_p \text{dft}(Q_p)$. En inversant les rôles de (Q_p) et (Q'_r) on obtient l'inégalité inverse.

PROPOSITION 5.2.4 Il y a une quantité au plus dénombrable de fibres singulières, de plus $\sum_{x \in \mathbb{D}} \text{dft}(x) \leq 3C$.

PREUVE : j étant fixé, pour tout k , le nombre de carrés $Q \in \mathcal{Q}_k^j$ tels que $\text{dft}(Q) \geq \varepsilon$ est inférieur à C/ε . On en déduit que l'ensemble des fibres ε -singulières est fini et de cardinal majoré par $3C/\varepsilon$. Il y a donc une quantité au plus dénombrable de fibres singulières, et l'estimation en découle. \square

REMARQUE 5.2.5 Nous n'avons pas d'indication sur la structure des fibres singulières. Si un courant fortement approximable horizontal a un nombre de Lelong non nul en un point p , alors la fibre correspondant à p est singulière, au moins pour une projection générique. En effet en sectionnant le courant par une droite générique passant par p on obtient une masse de Dirac en ce point.

A l'opposée, on vérifie que la suite de courants $\frac{1}{n}[z = w^n]$ vérifie les hypothèses du théorème 5.1.4 dans le bidisque $\mathbb{D} \times 2\mathbb{D}$, et n'a aucune bonne composante au dessus d'un voisinage de 0, donc la fibre $(\{0\} \times 2\mathbb{D})$ est 1-singulière pour la projection $(z, w) \mapsto z$. Cependant le courant limite est un courant uniformément laminaire porté par $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ (il est uniformément laminaire par le théorème de support de Demailly [De1]), donc ce courant n'a pas de caractère "singulier".

Enfin il est à remarquer qu'en combinant le résultat pour plusieurs projections verticales, on peut définir les "point singuliers" comme étant à l'intersection de fibres singulières. Il y a une quantité au plus dénombrable de points singuliers.

L'utilisation de la fonction de défaut permet une formulation agréable des propriétés de prolongement analytique des bonnes composantes. Le résultat de base est le suivant.

PROPOSITION 5.2.6 *Soient Q, Q' deux carrés tels que $Q \cap Q' \neq \emptyset$, $\text{dft}(Q) \leq \alpha$, $\text{dft}(Q') \leq \alpha'$, avec $\alpha + \alpha' < 1$. Alors il existe un courant uniformément laminaire $T_{Q \cup Q'}$ dans $(Q \cup Q') \times \mathbb{D}$, tel que*

$$T_{Q \cup Q'}|_Q \leq T_Q, \quad T_{Q \cup Q'}|_{Q'} \leq T_{Q'}$$

et

$$\text{m.s.}(T_{Q \cup Q'}) \geq 1 - \alpha - \alpha'.$$

Une conséquence de la proposition 2.1.4 est que $T_{Q \cup Q'}$ est subordonné à T_Q sur $Q \times \mathbb{D}$ (resp. $T_{Q'}$ sur $Q' \times \mathbb{D}$). La dernière assertion pourrait être reformulée en “ $\text{dft}(Q \cup Q') \leq \alpha + \alpha'$ ”.

PREUVE : Quand $n \rightarrow \infty$, $\lim \text{m.s.}(T_{Q,n}) \geq 1 - \alpha$, et $\text{m.s.}(T_{Q,n}) = \frac{1}{d_n} \#\mathcal{G}(Q, n)$ est le cardinal de l'ensemble des bonnes composantes au dessus de Q . Donc pour n assez grand il y a plus de $(1 - \alpha - \varepsilon)d_n$ (resp. $(1 - \alpha' - \varepsilon)d_n$) bonnes composantes pour C_n au dessus de Q (resp. Q'). Comme le nombre total de composantes est asymptotiquement majoré par d_n au dessus de $Q \cap Q'$ (puisque $\text{m.s.}(T) = 1$), il y a au moins $(1 - \alpha - \alpha' - 3\varepsilon)d_n$ composantes de $\mathcal{G}(Q, n)$ et $\mathcal{G}(Q', n)$ coïncidant au dessus de $Q \cap Q'$ pour n assez grand. On obtient ainsi un ensemble $\mathcal{G}(Q \cup Q', n)$ de graphes dans $(Q \cup Q') \times \mathbb{D}$, de cardinal asymptotiquement minoré par $(1 - \alpha - \alpha')d_n$.

On construit alors le courant $T_{Q \cup Q'}$ ayant les propriétés souhaitées, en extrayant une sous suite convergente de

$$\frac{1}{d_n} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(Q \cup Q', n)} [\Gamma]$$

dans $(Q \cup Q') \times \mathbb{D}$. □

Nous voulons utiliser inductivement cette proposition pour construire des prolongements analytiques des disques de T le long de chemins. Par abus de langage on confondra un chemin et son image dans \mathbb{D} . Les chemins seront implicitement supposés continus et injectifs.

DÉFINITION 5.2.7 *Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ un chemin injectif. On dit que T a la propriété du prolongement analytique ε -approché le long de γ s'il existe un voisinage V_ε de γ et un courant T_{V_ε} , uniformément laminaire dans $V_\varepsilon \times \mathbb{D}$, tel que $T_\varepsilon \leq T$ et $\text{m.s.}(T_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.*

T sera dit avoir la propriété du prolongement analytique le long de γ s'il a la propriété de prolongement ε -approchée pour tout ε .

On peut effectivement traduire cette définition en termes de prolongement analytique. Soient $x_0 = \gamma(0)$, $x_1 = \gamma(1)$; T a la propriété du prolongement analytique le long de γ si pour m^{x_0} presque tout point y de la fibre $\{x_0\} \times \mathbb{D}$ il y a un voisinage V de γ et un graphe Δ au dessus de V , contenant (x_0, y) et subordonné à T (voir p.71 pour la définition des disques subordonnés à T). La formulation en termes de courants uniformément laminaires majorés par T est cependant plus précise et agréable.

La proposition 5.2.6 a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.2.8 *Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ un chemin injectif. Supposons que pour un $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement de γ par une famille finie \mathcal{F}_ε de carrés tels que*

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}_\varepsilon} \text{dft}(Q) \leq \varepsilon.$$

Alors T a la propriété du prolongement analytique ε -approché le long de γ .

Si γ est un chemin dans \mathbb{D} , par définition le défaut de γ est l'infimum des $\sum_{Q \in \mathcal{F}} \text{dft}(Q)$ pour toutes les familles \mathcal{F} de carrés de \mathcal{Q}_k^j recouvrant γ .

PREUVE : fixons $\varepsilon > 0$. Le chemin γ est paramétré par $[0, 1]$. Pour $s \in [0, 1]$ on considère la famille $\mathcal{F}_\varepsilon(s)$ des carrés de \mathcal{F}_ε rencontrant $\gamma([0, s])$. On numérote successivement (sans répétition) les carrés de $\mathcal{F}_\varepsilon(1)$ selon leur ordre d'arrivée dans $\mathcal{F}_\varepsilon(s)$. Plus précisément, soient

$$s_0 = 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_q$$

les valeurs de s pour lesquelles $\mathcal{F}_\varepsilon(s)$ croît. Supposons que pour $s < s_\ell$,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(s) = \mathcal{F}_\varepsilon(s_\ell) = \{Q_0, \dots, Q_{n(\ell-1)}\},$$

on pose alors pour $s_\ell \leq s < s_{\ell+1}$,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(s) \setminus \mathcal{F}_\varepsilon(s_{\ell-1}) = \{Q_{n(\ell-1)+1}, \dots, Q_{n(\ell)}\}$$

(plusieurs carrés peuvent apparaître en même temps). Il est de plus clair que pour $n(\ell-1)+1 \leq i \leq n(\ell)$, Q_i intersecte l'un des carrés de $\mathcal{F}_\varepsilon(s_\ell)$ puisque les carrés sont ouverts. On peut donc appliquer inductivement la proposition précédente. \square

Nous commençons par un résultat de prolongement analytique le long des chemins dans un cas particulier.

PROPOSITION 5.2.9 *On suppose qu'il existe une fonction h tendant vers 0 en 0 telle que pour tout carré $Q_p \in \mathcal{Q}_p$, on ait*

$$\text{dft}(Q_p) \leq r_p h(r_p), \quad (5.3)$$

où r_p est la taille des carrés de \mathcal{Q}_p . Alors T a la propriété du prolongement analytique le long de tous les chemins (rectifiables) de longueur finie.

Noter que pour une quelconque des subdivisions \mathcal{Q}_k^j , le défaut moyen des carrés est $O(r_k^2)$ puisque le nombre de carrés est $O(1/r_k^2)$ et le défaut total majoré. Si le défaut est "uniformément réparti", l'hypothèse de la proposition sera satisfaite.

La proposition est une conséquence directe du lemme (classique) suivant.

LEMME 5.2.10 *Soit un chemin γ rectifiable et de longueur ℓ dans \mathbb{D} . Alors si \mathcal{Q}_k est l'une des subdivisions \mathcal{Q}_k^j , et $r_k \leq \ell/2$, le nombre de carrés de \mathcal{Q}_k dont l'intérieur rencontre γ est majoré par $\frac{10\ell}{r_k}$.*

PREUVE : on numérote dans l'ordre d'apparition dans le paramétrage les carrés de \mathcal{Q}_k dont l'intérieur rencontre γ , éventuellement avec répétition (contrairement à la preuve du corollaire 5.2.8), et on obtient ainsi une famille ordonnée (Q_1, \dots, Q_N) . On regroupe les carrés de Q_2, \dots, Q_{N-1} en N_{paq} paquets de 5 carrés successifs, et donc

$$N \leq 5N_{\text{paq}} + 4 + 2 = 5N_{\text{paq}} + 6.$$

Étant donné un paquet $\{Q_{i_1}, \dots, Q_{i_5}\}$ de 5 carrés successivement rencontrés par γ , deux au moins sont à distance supérieure ou égale à r_k , et sont connectés par γ dans $Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_5}$. Donc

$$\text{long}(\gamma|_{Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_5}}) \geq r_k$$

(la restriction signifie ici restriction à l'intervalle correspondant de paramétrage), et en sommant sur tous les paquets, on a la relation $\ell \geq N_{paq} r_k$. Finalement on obtient

$$N \leq \frac{5\ell}{r_k} + 6$$

et le lemme en découle. \square

On en déduit de façon évidente la proposition : étant donné un chemin γ de longueur ℓ , on le recouvre à l'aide des trois subdivisions Q_k^j , $j = 0, 1, 2$, et r_k assez petit ; la relation (5.3) permet de majorer par $10\ell h(r_p)$ le défaut total du chemin et on applique le corollaire 5.2.8.

Plus généralement, on peut s'attendre à ce que même si T n'a pas la propriété de prolongement analytique le long de tous les chemins, on puisse toujours trouver un chemin γ_ε reliant deux points donnés et pour lequel T a la propriété de prolongement analytique ε -approché. C'est l'objet de la proposition suivante, qui est le résultat technique crucial de cette section, et la base du théorème de prolongement analytique 5.2.12.

PROPOSITION 5.2.11 *Soit T un courant horizontal fortement approximable normalisé au voisinage de \mathbb{B} comme précédemment. Si x_0 et x_1 sont deux points de \mathbb{D} , tels que $\text{dft}(x_0) = \text{dft}(x_1) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un chemin γ_ε reliant x_0 et x_1 tel que T ait la propriété du prolongement analytique ε -approché le long de γ_ε .*

En d'autres termes, m^{x_0} presque tout disque au dessus de x_0 a un prolongement le long d'un chemin jusqu'en x_1 , subordonné à T . La preuve montre plus généralement que pour des points x_0, x_1 quelconques on a un prolongement $(\text{dft}(x_0) + \text{dft}(x_1) + \varepsilon)$ -approché pour tout ε .

PREUVE : le défaut total étant majoré, il suffit de trouver un suffisamment grand nombre de chemins distincts pour que le défaut total de l'un d'entre eux soit petit. La seule difficulté est que vus dans le quadrillage les chemins ne peuvent pas être considérés comme distincts.

Pour alléger l'écriture on utilisera les notations suivantes : $a \approx b$ signifie qu'il existe des constantes c, C indépendantes de r (le pas du quadrillage) telles que $ca \leq b \leq Ca$; de même $a \lesssim b$ signifie $a \leq Cb$, C indépendante de r .

Supposons pour commencer que $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Pour $r \ll 1$, on considère les quadrillages $Q^j := Q_k^j$, $j = 0, 1, 2$, $r_k = r$. Soient des carrés $Q_0 \ni x_0$, $Q_1 \ni x_1$ réunions de carrés de Q^0 , de même taille $\approx \sqrt{r}$, symétriques par rapport à l'axe réel. On relie Q_0 et Q_1 par des chemins horizontaux $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_N$, mutuellement distants de $5r$, $N \approx 1/\sqrt{r}$ (cf. figure 5.2). Chacun des $\bar{\gamma}_i$ est recouvert par une famille \mathcal{F}_i de carrés de $Q^0 \cup Q^1 \cup Q^2$, $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (le cardinal de \mathcal{F}_i est $\approx 1/r$). On complète par deux segments chacun des $\bar{\gamma}_i$ en un chemin affine par morceaux γ_i joignant x_0 et x_1 .

Évaluons le défaut total de la famille de chemins (γ_i) ,

$$\sum_{i=1}^N \text{dft}(\gamma_i) \leq \sum_{i=1}^N \left(\text{dft}(Q_0) + \text{dft}(Q_1) + \sum_{Q \in \mathcal{F}_i} \text{dft}(Q) \right) \leq N(\text{dft}(Q_0) + \text{dft}(Q_1)) + 3C$$

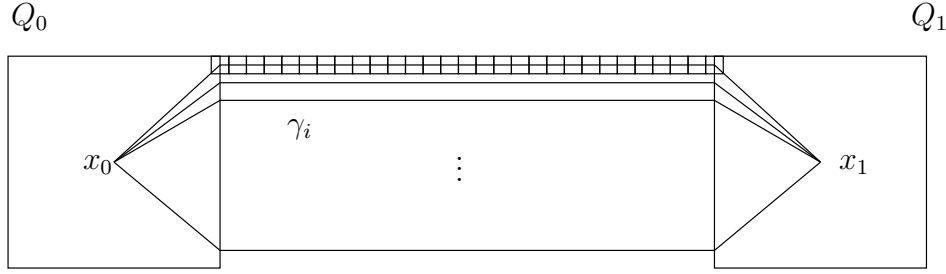


FIG. 5.2 – La famille de chemins (γ_i) .

d’après la proposition 5.2.2. Comme $N \approx 1/\sqrt{r}$, le défaut moyen est

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{dft}(\gamma_i) \lesssim \text{dft}(Q_0) + \text{dft}(Q_1) + \sqrt{r}.$$

Les fibres x_0 et x_1 étant régulières, pour $i = 0, 1$, $\text{dft}(Q_i) \rightarrow 0$ quand r_i tend vers 0. On en conclut que le défaut moyen de la famille (γ_i) est petit quand r est petit, et donc que l’un au moins des γ_i est de défaut petit.

Dans le cas général on considère une application affine h telle que $h(0) = x_0$ et $h(1) = x_1$, ainsi que l’image de la famille de chemins construits précédemment. On considère également $\tilde{Q}_0 \supset h(Q_0)$ et $\tilde{Q}_1 \supset h(Q_1)$ réunions de carrés de \mathcal{Q}^0 et de taille $\approx \sqrt{r}$, ainsi que des recouvrements $\tilde{\mathcal{F}}_i$ de $h(\tilde{\gamma}_i)$ par des carrés de \mathcal{Q}^j , et tels que $\tilde{\mathcal{F}}_i \cap \tilde{\mathcal{F}}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On conclut comme ci dessus. \square

Propriété forte de prolongement analytique. Nous abordons maintenant le résultat principal de cette section. Nous avons vu à la section 2.3 que pour certains courants laminaires (voir l’exemple de Demailly 2.3.9), la restriction du courant à une lamination peut être portée par un ouvert strict de celle ci. Nous montrons ici que ce phénomène n’apparaît pas pour les courants fortement approximables.

THÉORÈME 5.2.12 *Soit T un courant horizontal fortement approximable dans le bidisque. Supposons que S soit un courant uniformément laminaire élémentaire horizontal dans $U \times \mathbb{D}$, où $U \subset \subset \mathbb{D}$ est un ouvert connexe, tel que $S \leq T$ dans $U_1 \times \mathbb{D}$, où $U_1 \subset U$ est un ouvert non vide. Alors $S \leq T$ dans $U \times \mathbb{D}$.*

Nous rappelons qu’un courant uniformément laminaire élémentaire dans $U \times \mathbb{D}$ est un courant formé de graphes au dessus de U . Nous présentons ce résultat pour un courant S élémentaire par souci de clarté, mais on peut remplacer $U \times \mathbb{D}$ et $U_1 \times \mathbb{D}$ par un couple quelconque d’ouverts $U_1 \subset U$ (voir le corollaire 5.2.14 ci après).

En termes de représentation d’un courant laminaire comme intégrale de disques le résultat pourrait se formuler de la façon suivante : “si Δ est un disque subordonné à T et Δ admet un prolongement analytique $\tilde{\Delta}$, alors $\tilde{\Delta}$ est subordonné à T ”. Nous énonçons le résultat entre guillemets car il faut préciser l’hypothèse “ Δ admet un prolongement analytique $\tilde{\Delta}$ ” : d’après la définition de la subordination donnée à la p. 71 il faut qu’un courant uniformément laminaire

subordonné à T dont Δ est une feuille se prolonge. De plus la formulation du théorème est beaucoup plus précise puisqu'elle contient également une information sur la mesure transverse.

COROLLAIRE 5.2.13 *Les courants laminaires horizontaux fortement approximables sont de multiplicité localement constante (ou simples).*

Il est également possible d'étendre le théorème au cas de courants non élémentaires. Ceci nécessite cependant une définition : si S est un courant uniformément laminaire dans l'ouvert \mathcal{U} , et $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, on appelle saturé de $S|_{\mathcal{U}_1}$ dans \mathcal{U} le courant uniformément laminaire restriction de S à l'ensemble des feuilles rencontrant \mathcal{U}_1 .

COROLLAIRE 5.2.14 *Soit T un courant horizontal fortement approximable dans le bidisque. Supposons que S soit un courant uniformément laminaire dans l'ouvert connexe \mathcal{U} , tel que $S \leq T$ dans $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$. Si S_1 désigne le saturé de $S|_{\mathcal{U}_1}$ dans \mathcal{U} , alors $S_1 \leq T$ dans \mathcal{U} .*

PREUVE DU THÉORÈME : on pourra sans perte de généralité supposer que U_1 est un disque. On pose $m = \text{m.s.}(S)$.

On utilise la représentation de T comme intégrale de disques, sous la forme

$$T = \int_{\mathcal{A}} p_{\alpha}[\Delta_{\alpha}]d\mu(\alpha),$$

où p_{α} est une fonction s.c.i. positive sur Δ_{α} et les Δ_{α} sont disjoints. Dans $U_1 \times \mathbb{D}$, on a $S \leq T$ donc d'après la proposition 2.3.6 S admet une représentation de la forme ($\mathcal{A}|_{U_1}$ désigne l'ensemble des restrictions à U_1 des disques de \mathcal{A} ; $\mathcal{A}|_{U_1}$ est différent de \mathcal{A}_{U_1} l'ensemble des disques de \mathcal{A} qui sont des graphes au dessus de U_1)

$$S = \int_{\mathcal{A}|_{U_1}} q_{\alpha}[\Delta_{\alpha}]d\mu(\alpha)$$

où q_{α} est constante sur presque tout disque³ Δ_{α} et $q_{\alpha} \leq p_{\alpha}$ presque partout sur Δ_{α} .

Étant donné un carré Q , on note \mathcal{A}_Q l'ensemble des disques de \mathcal{A} qui sont des graphes au dessus de Q , et on considère le courant T_Q uniformément laminaire sur $Q \times \mathbb{D}$ construit précédemment (voir p. 124). Le courant uniformément laminaire T_Q admet une représentation

$$T_Q = \int_{\mathcal{A}} p_{\alpha,Q}[\Delta_{\alpha}]d\mu(\alpha),$$

où l'intégrale porte en fait sur \mathcal{A}_Q , et $p_{\alpha,Q}$ est une fonction constante sur Δ_{α} .

LEMME 5.2.15 *Pour presque tout $x \in U_1 \times \mathbb{D}$, il existe une suite décroissante de carrés Q_p , $\bigcap_{p \geq 0} Q_p = \{x\}$, et pour tout p un courant $S_{Q_p} \leq S$, uniformément laminaire dans $Q_p \times \mathbb{D}$, tel que $S_{Q_p} \leq T_{Q_p}$ et $\text{m.s.}(S_{Q_p}) \rightarrow m = \text{m.s.}(S)$ quand $p \rightarrow \infty$*

PREUVE : si pour tout k , \mathcal{Q}_k désigne la restriction à U_1 de l'une quelconque des \mathcal{Q}_k^j , et

$$T_{\mathcal{Q}_k} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} T_Q = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \int_{\mathcal{A}_Q} p_{\alpha,Q}[\Delta_{\alpha}]d\mu(\alpha),$$

³La fonction q_{α} est ici nécessaire car la mesure μ peut être "déséquilibrée"; quitte à remplacer μ par $\mathbf{1}_{\{q_{\alpha} > 0\}}q_{\alpha}\mu + \mathbf{1}_{\{q_{\alpha} = 0\}}\mu$ on peut supposer que $q_{\alpha} = 1$, ce que nous ne ferons pas.

alors $T_{\mathcal{Q}_k}$ croît vers T quand $k \rightarrow \infty$. On définit le courant $S_{\mathcal{Q}_k}$, par

$$S_{\mathcal{Q}_k} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \int_{\mathcal{A}_Q} \inf(q_\alpha, p_{\alpha, Q}) [\Delta_\alpha] d\mu(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} \inf(q_\alpha, \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \mathbf{1}_{Q \times \mathbb{D}} p_{\alpha, Q}) [\Delta_\alpha] d\mu(\alpha).$$

Le courant $S_{\mathcal{Q}_k}$ est uniformément laminaire dans chaque $Q \times \mathbb{D}$ puisque \mathcal{A}_Q est formé de graphes au dessus de Q et la fonction de multiplicité est constante sur chaque disque. De plus

$$p_{\alpha, \mathcal{Q}} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \mathbf{1}_{Q \times \mathbb{D}} p_{\alpha, Q}$$

croît $\|T\|$ presque partout vers $p_\alpha \geq q_\alpha$, donc $\inf(p_{\alpha, \mathcal{Q}}, q_\alpha)$ croît presque partout vers q_α , et par conséquent $S_{\mathcal{Q}_k}$ croît vers S .

On en déduit alors facilement l'assertion du lemme : premièrement si $Q' \subset Q$, alors $\text{m.s.}(S_{Q'}) \geq \text{m.s.}(S_Q)$ (où S_Q désigne $S_Q|_{Q \times \mathbb{D}}$); ensuite si ϕ est une forme à support dans $U_1 \times \mathbb{D}$ de la forme $\phi = \varphi(z) idz \wedge d\bar{z}$, alors $\langle S, \phi \rangle = m \int \varphi(z) d\lambda(z)$ d'après la proposition 1.2.6, et

$$\langle S_{\mathcal{Q}_k}, \phi \rangle = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \int S_Q \wedge \phi = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \text{m.s.}(S_Q) \int_Q \varphi d\lambda \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m \int \varphi d\lambda,$$

et on conclut. \square

Achevons la preuve du théorème. L'idée est de transporter la relation $S_Q \leq T_Q$ de U_1 à U en utilisant le prolongement analytique le long des chemins. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit un point x_0 de U_1 tel que la conclusion du lemme soit satisfaite, et tel que $\text{dft}(x_0) = 0$. Pour $Q \ni x_0$, $Q \in \mathcal{Q}_k$ et k assez grand, on a donc un courant uniformément laminaire $S_Q \leq T_Q$, $\text{m.s.}(S_Q) \geq m - \varepsilon$. Par ailleurs, d'après la proposition 5.2.11, pour tout $x_1 \in U$ il existe un chemin γ_ε joignant x_0 et x_1 et tel que T ait la propriété du prolongement analytique $(\text{dft}(x_1) + \varepsilon)$ -approché⁴ le long de γ_ε , il y a donc un voisinage V de γ_ε , et un courant $T_V \leq T$ uniformément laminaire, $\text{m.s.}(T_V) \geq 1 - \text{dft}(x_1) - \varepsilon$. En appliquant la proposition 5.2.6 à Q , V , et Q_1 le carré de \mathcal{Q}_k contenant x_1 on en déduit l'existence d'un courant T_{Q, Q_1} , uniformément laminaire et subordonné à T_Q , T_V et T_{Q_1} , avec

$$\text{m.s.}(T_{Q, Q_1}) \geq 1 - \text{dft}(Q) - \text{dft}(Q_1) - \varepsilon - \text{dft}(x_1) \geq 1 - \text{dft}(Q) - 2\text{dft}(Q_1) - \varepsilon$$

Noter que par construction les graphes de T_{Q, Q_1} au dessus de Q_1 sont dans le prolongement analytique (le long de γ_ε) de ceux situés au dessus de Q .

On montre aisément que la somme des T_{Q, Q_1} approxime T dans U :

$$\begin{aligned} \left\langle T - \sum_{Q_1 \in \mathcal{Q}_k} T_{Q, Q_1}, \mathbf{1}_{U \times \mathbb{D}} \pi^* idz \wedge d\bar{z} \right\rangle &\leq \sum_{Q_1 \in \mathcal{Q}_k} (\text{dft}(Q) + \varepsilon + 2\text{dft}(Q_1)) \text{Aire}(Q_1) \\ &\leq (\text{dft}(Q) + \varepsilon) + 2 \left(\sum_{Q_1 \in \mathcal{Q}_k} \text{dft}(Q_1) \right) r_k^2 \end{aligned}$$

et le terme d'erreur est majoré par 3ε si k est assez grand.

⁴Le lecteur désireux de n'utiliser que des prolongements ε -approchés pourra considérer un carré Q_1 à la place de x_1 , un point régulier $x'_1 \in Q_1$ et un chemin γ_ε liant x_0 à x'_1 .

Nous affirmons que pour tout Q_1 il existe un courant S_{Q,Q_1} , tel que dans $Q \times \mathbb{D}$,

$$S_{Q,Q_1} \leq T_{Q,Q_1}, \quad S_{Q,Q_1} \leq S_Q \leq S, \quad \text{et m.s.}(S_{Q,Q_1}) \geq m - \text{dft}(Q) - 2\text{dft}(Q_1) - 2\varepsilon.$$

Montrons que ceci implique le théorème : le courant S étant uniformément laminaire, si $Q_1 \subset U$ on peut pousser S_{Q,Q_1} par holonomie en un courant uniformément laminaire dans $Q_1 \times \mathbb{D}$, et dans $Q_1 \times \mathbb{D}$ on a $S_{Q,Q_1} \leq S$, $S_{Q,Q_1} \leq T_{Q,Q_1} \leq T$, et m.s. $(S_{Q,Q_1}) \geq m - \text{dft}(Q) - 2\text{dft}(Q_1) - 2\varepsilon$. Donc, comme précédemment on a la minoration suivante dans U :

$$\left\langle \sum_{Q_1 \in \mathcal{Q}_k} S_{Q,Q_1}, \mathbf{1}_{U \times \mathbb{D}} \pi^* idz \wedge d\bar{z} \right\rangle \geq \langle S, \mathbf{1}_{U \times \mathbb{D}} \pi^* idz \wedge d\bar{z} \rangle - 4\varepsilon,$$

autrement dit $\sum_{Q_1 \in \mathcal{Q}_k} S_{Q,Q_1}$ croît vers S . Comme par ailleurs

$$\sum_{Q_1 \in \mathcal{Q}_k} S_{Q,Q_1} \leq T$$

on conclut que $S \leq T$.

Il reste à démontrer notre affirmation (nous utilisons ici le fait que S_Q est uniformément laminaire dans $Q \times \mathbb{D}$). Les données sont : $S_Q \leq T_Q$, m.s. $(S_Q) \geq m - \varepsilon$, et $T_{Q,Q_1} \leq T_Q$, m.s. $(T_{Q,Q_1}) \geq 1 - \text{dft}(Q) - 2\text{dft}(Q_1) - \varepsilon$, tous ces courants étant uniformément laminaires, et subordonnés à la lamination $\mathcal{L}(T_Q)$. Fixons une fibre verticale ($c_Q \times \mathbb{D}$) et soient les sections (mesures) respectives m_{S_Q} , m_{T_Q} , $m_{T_{Q,Q_1}}$ de S_Q , T_Q et T_{Q,Q_1} . D'après le théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction $0 \leq f_{S_Q} \leq 1$ (resp. $0 \leq f_{T_{Q,Q_1}} \leq 1$) telle que $m_{S_Q} = f_{S_Q} m_{T_Q}$ (resp. $m_{T_{Q,Q_1}} = f_{T_{Q,Q_1}} m_{T_Q}$). Soit $f = \inf(f_{S_Q}, f_{T_{Q,Q_1}})$, alors ⁵

$$\int f dm_{T_Q} \geq m - \text{dft}(Q) - \text{dft}(Q_1) - 2\varepsilon.$$

On définit alors S_{Q,Q_1} comme étant le courant uniformément laminaire subordonné à T_Q de mesure transverse $f dm_{T_Q}$ dans la fibre $c_Q \times \mathbb{D}$, qui a les propriétés requises. \square

PREUVE DU COROLLAIRE 5.2.13 : comme ci dessus on considère la représentation

$$T = \int_{\mathcal{A}} p_\alpha[\Delta_\alpha] d\mu(\alpha)$$

où les Δ_α sont distincts et les fonctions p_α sont s.c.i., c'est à dire que pour tout c , $\{p_\alpha > c\}$ est ouvert dans Δ_α (à un ensemble d'aire nulle près). On veut montrer que p_α est localement constante. L'idée est la suivante : par le théorème précédent si la fonction p_α prend une certaine valeur $p_\alpha(x_0)$, alors $p_\alpha \geq p_\alpha(x_0)$. Nous détaillons maintenant le raisonnement.

En conservant les notations précédentes (nous rappelons que \mathcal{A}_Q est l'ensemble des disques de \mathcal{A} qui sont des graphes au dessus de Q), considérons le courant

$$\widetilde{T}_Q = \int_{\mathcal{A}_Q} p_\alpha[\Delta_\alpha] d\mu(\alpha),$$

⁵Si $0 \leq a, b \leq 1$ alors $\inf(a, b) \geq a + b - 1$

(le courant \widetilde{T}_Q n'est pas le courant T_Q de la preuve ci dessus ; il n'est pas *a priori* uniformément laminaire). Pour un carré $Q' \subset Q$, considérons la fonction mesurable

$$\mathcal{A}_Q \ni \alpha \mapsto \inf(p_\alpha|_{Q'}),$$

inf désignant ici l'infimum essentiel. Alors pour $\varepsilon > 0$,

$$\Delta_\alpha^\varepsilon = \{x \in Q', p_\alpha(x) > \inf(p_\alpha|_{Q'}) + \varepsilon\}$$

est à un ensemble d'aire nulle près un ouvert de $\Delta_\alpha \cap (Q' \times \mathbb{D})$. Nous allons montrer que cet ouvert est presque sûrement vide, démontrant en cela le corollaire.

Supposons le contraire : pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de paramètres \mathcal{E} de mesure strictement positive tel que $\Delta_\alpha^\varepsilon$ soit d'aire positive. Alors le courant

$$S_\varepsilon = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\Delta_\alpha^\varepsilon} p_\alpha[\Delta_\alpha] d\mu(\alpha)$$

est un courant laminaire de masse strictement positive. En particulier il existe un carré $R \subset Q$ tel qu'on puisse former un courant uniformément laminaire S de masse > 0 subordonné à S_ε ,

$$S = \int_{\mathcal{E}_R} \mathbf{1}_{\Delta_\alpha^\varepsilon \cap (R \times \mathbb{D})} p_\alpha[\Delta_\alpha] d\mu(\alpha).$$

Par définition de $\Delta_\alpha^\varepsilon$ on a

$$\left(\int_{\mathcal{E}_R} (\inf(p_\alpha|_{Q'}) + \varepsilon) [\Delta_\alpha] d\mu(\alpha) \right) |_{R \times \mathbb{D}} \leq T|_{R \times \mathbb{D}}.$$

Par le théorème de prolongement analytique cette relation s'étend à $Q' \times \mathbb{D}$ et donc sur les disques prolongeant ceux de \mathcal{E}_R on a $p_\alpha \geq \inf(p_\alpha|_{Q'}) + \varepsilon$ ce qui est contradictoire. \square

PREUVE DU COROLLAIRE 5.2.14 : il suffit de montrer le fait suivant : "l'ensemble \mathcal{V} des points $x \in \mathcal{U}$ tels qu'il existe un voisinage $\mathcal{N}(x)$ de x tel que $S_1 \leq T$ dans $\mathcal{N}(x)$, est ouvert et fermé dans \mathcal{U} . Par définition \mathcal{V} est ouvert. Soit x un point frontière de \mathcal{V} , nous devons montrer que $x \in \mathcal{V}$. Il suffit de considérer le cas où $x \in \text{Supp}(S_1)$. Soit $L(x)$ la feuille locale de $\mathcal{L}(S)$ passant par x ; il existe une projection satisfaisant la définition 5.1.5 et un voisinage $\mathcal{N}(x)$ de x tels que $L(x)|_{\mathcal{N}(x)}$, ainsi que les feuilles voisines, soient des graphes pour cette projection. Autrement dit S_1 est élémentaire près de x et on peut appliquer le théorème. \square

La preuve du théorème 5.2.12 a le corollaire suivant, qui est une amélioration substantielle du lemme 5.2.15.

PROPOSITION 5.2.16 *Si S est un courant uniformément laminaire dans $U \times \mathbb{D}$, et $S \leq T$ dans $U \times \mathbb{D}$, alors pour toute fibre $\{x\} \times \mathbb{D}$, $x \in U$, régulière pour T (i.e. $\text{dft}_T(x) = 0$), il existe une suite de carrés (Q_p) décroissant vers $\{x\}$, et pour tout p un courant $S_{Q_p} \leq S$, uniformément laminaire dans $Q_p \times \mathbb{D}$, tel que $S_{Q_p} \leq T_{Q_p}$ et $\text{m.s.}(S_{Q_p}) \rightarrow m = \text{m.s.}(S)$ quand $p \rightarrow \infty$*

En d'autres termes, la conclusion du lemme 5.2.15 est vraie hors d'un ensemble au plus dénombrable de fibres.

PREUVE : la preuve a déjà été faite p.132. On sait que la conclusion est vraie pour presque tout x , par le lemme 5.2.15. On choisit donc un tel x_0 , une suite de carrés $Q_p \ni x_0$, et une suite de courants uniformément laminaires S_{Q_p} , subordonnés à T_{Q_p} et à S sur $Q_p \times \mathbb{D}$, tels que $\text{m.s.}(S_{Q_p}) \geq \text{m.s.}(S) - \varepsilon_p$.

Le courant S_{Q_p} étant subordonné à T_{Q_p} , la propriété de prolongement analytique de T le long des chemins permet de construire pour tout $Q' \subset U$ un courant $S_{Q_p, Q'}$ dans $Q' \times \mathbb{D}$ subordonné à $T_{Q'}$ et tel que

$$\text{m.s.}(S_{Q_p, Q'}) \geq \text{m.s.}(S) - \text{dft}(Q_p) - \text{dft}(Q') - 2\varepsilon_p,$$

et on conclut. \square

Cette observation va nous permettre de mettre en évidence une question naturelle. Il est possible de définir si $\{x\} \times \mathbb{D}$ est une fibre régulière le germe de disque subordonné à T passant par (x, y) pour m^x presque tout (x, y) . En effet si Q_p est une suite de carrés décroissant vers x , on considère la famille des courants uniformément laminaires T_{Q_p} , ainsi que les mesures $m_{Q_p}^x = T_{Q_p} \wedge [\{x\} \times \mathbb{D}]$. Soit E^x la réunion des supports des mesures $m_{Q_p}^x$, qui est un borélien de m^x mesure totale. Si $y \in E^x$, alors $y \in \text{Supp } m_{Q_p}^x$ pour un certain p , et on définit le germe de disque subordonné à T passant par y comme étant celui de T_{Q_p} . La définition ne dépend pas de p puisque les disques des courants T_{Q_p} sont compatibles (c'est la même extraction de la suite C_n qui sert à construire les T_{Q_p} , voir le début de la section suivante pour plus de détails). Si S est un courant uniformément laminaire subordonné à T dans $U \times \mathbb{D}$, alors, d'après la proposition précédente, si $x \in U$ est régulier, pour m^x presque tout (x, y) , le germe de la feuille de $\mathcal{L}(S)$ passant par (x, y) et celui du disque défini ci dessus coïncident. Ceci n'était auparavant connu que $\|T\|$ presque partout.

Nous ne savons en revanche pas répondre à la question suivante : soit T un courant laminaire fortement approximable et supposons que S_1 et S_2 soient des courants uniformément laminaires tels que $S_1 \leq T$ (resp. $S_2 \leq T$). Soit $x \in \text{Supp}(S_1) \cap \text{Supp}(S_2)$ et soient $L_1(x)$ et $L_2(x)$ les feuilles respectives de $\mathcal{L}(S_1)$ et $\mathcal{L}(S_2)$ passant par x . Est il possible que x soit isolé dans $L_1(x) \cap L_2(x)$? En d'autres termes, des disques subordonnés à T peuvent-ils se couper ?

La première partie de l'exemple 2.3.9 fournit un contre exemple dans le cas de courants laminaires généraux : soient T_1 et T_2 des courants uniformément laminaires horizontaux dans le bidisque, intégrales de courants d'intégration sur des droites parallèles

$$T_i = \int [L_i + (0, \alpha)] d\mu_i(\alpha), \quad i = 1, 2,$$

où L_1 et L_2 sont des droites transverses passant par $(0, 0)$, et les mesures μ_i sont portées par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle. Soit $T = T_1 + T_2$. En subdivisant convenablement les disques de T_1 et T_2 , on voit que T est laminaire (de multiplicité constante). T vérifie même la propriété forte de prolongement analytique (théorème 5.2.12).

Cette question est liée à l'étude du produit extérieur $T \wedge T$. Plus précisément si le produit extérieur $T \wedge T$ est admissible, et $T \wedge T = 0$, la réponse à cette question est "non". En effet si ce n'était pas le cas, i.e. si des disques subordonnés aux courants S_1 et S_2 se coupaient en x , le produit extérieur $S_1 \wedge S_2$ étant admissible, on aurait (voir la section 4.3)

$$T \wedge T \geq S_1 \wedge S_2 = S_1 \wedge S_2 > 0.$$

En particulier, la réponse est “non” dans le cas des courants à potentiels continus, ce qui couvre les applications en dynamique des automorphismes polynomiaux et applications d’al-lure Hénon (rappelons –remarque 4.4.10– que les résultats de la section 4.4 s’appliquent à l’intersection des courants horizontaux). Ceci est à rapprocher de la notion de “courant fortement laminaire” de Cantat : un courant est fortement laminaire si les prolongements analytiques des disques subordonnés⁶ au courant sont compatibles. Nous venons de démontrer que les courants fortement approximables de potentiel continu sont fortement laminaires en ce sens. La réciproque est fautive comme le montre le courant fortement laminaire de l’exemple 2.3.10, qui n’est pas fortement approximable puisque de potentiel continu et d’auto intersection strictement positive.

Noter enfin que si $T \wedge T$ est une somme de masses de Dirac, situation apparaissant naturellement en dynamique des applications birationnelles, la réponse à la question est également “non”. En effet une somme de masse de Dirac ne peut être un produit d’intersection géométrique de courants uniformément laminaires diffus.

⁶Notre définition des disques subordonnés à T diffère légèrement de celle de Cantat, voir en particulier l’exemple 2.3.7.

5.3. Construction de laminations : la méthode de Su.

Il y a une ressemblance frappante entre la théorie des courants laminaires et la construction de Meiyu Su [Su] de “solénoïdes mesurés” associés à une fraction rationnelle. Il s’agit d’une méthode pour donner une structure de lamination à l’extension naturelle de la dynamique d’une fraction rationnelle dans \mathbb{P}^1 , une question préalablement étudiée par Lyubich et Minsky [LM2]. La construction de Su est de nature mesurable, et nous allons dans cette section justifier rigoureusement l’analogie avec la théorie des courants laminaires.

Nous présentons la construction de laminations associées à des courants horizontaux fortement approximables, même s’il est vraisemblablement possible d’adapter la présentation à un cadre légèrement plus général⁷. Nous suivons pas à pas la construction de Su.

Nous conservons le cadre adopté à la section précédente, autrement dit on fixe un courant T laminaire horizontal normalisé (diffus) et fortement approximable dans le bidisque. Dans ce cas il existe une suite de courbes (C_n) vérifiant les hypothèses de la définition 5.1.5, telle que $d_n^{-1}[C_n] \rightharpoonup T$. On considère comme à la section précédente trois suites de subdivisions admissibles formant une base de voisinages du plan, et si Q est un carré de l’une de ces subdivisions (nous dirons simplement “un carré” par la suite), on forme le courant $T_{Q,n}$ des bonnes composantes de C_n au dessus de Q . Par une extraction diagonale on assure que pour tout carré Q la suite $T_{Q,n}$ converge vers un courant uniformément laminaire T_Q . La famille de courants uniformément laminaires (T_Q) a alors la propriété importante de *compatibilité* suivante : si $x \in \text{Supp}(T_{Q_1}) \cap \text{Supp}(T_{Q_2})$, et $L_1(x)$ et $L_2(x)$ sont les disques respectifs de $\mathcal{L}(T_{Q_1})$ et $\mathcal{L}(T_{Q_2})$ passant par x , alors $L_1(x) = L_2(x)$ au voisinage de x . En effet si $L_1(x)$ et $L_2(x)$ se coupent en x , quitte à déplacer légèrement x , comme les courants sont diffus, on peut supposer l’intersection transverse (proposition 2.1.3), alors les bonnes composantes de C_n approchant respectivement L_1 et L_2 doivent se couper (transversalement) pour n assez grand ce qui par définition est impossible –remarquer que le point essentiel du raisonnement est que la même extraction est utilisée pour tous les carrés.

DÉFINITION 5.3.1 *Soit Q un carré tel que le courant T_Q soit de masse strictement positive. La boîte de flot (ou plus simplement “boîte”) B_Q est le support (fermé) du courant uniformément laminaire T_Q . Les disques subordonnés au courant T_Q seront appelées “plaques” de B_Q .*

On fixe pour chaque boîte B_Q une transversale τ_Q de sorte que $B_Q \stackrel{\varphi_Q}{\simeq} \tau_Q \times Q$. Pour des raisons de commodité, on prendra pour transversale τ_Q le disque vertical $\{c_Q\} \times \mathbb{D}$ où c_Q est le centre de Q . On définit l’ensemble régulier \mathcal{R} comme la réunion des boîtes de flot de T . Noter que l’ensemble régulier dépend de la famille (T_Q) .

⁷Pour la construction de la lamination proprement dite, le seul point vraiment essentiel est la propriété de *compatibilité* des courants uniformément laminaires formant T . Les résultats de la section précédente interviennent en revanche de façon essentielle dans la construction de la mesure transverse.

Pour définir la mesure transverse dans les boîtes de façon non ambiguë, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui est une légère amélioration du corollaire 5.2.13, mais qui a cependant un intérêt propre. On utilise la représentation de T comme intégrale de disques sous la forme

$$T = \int_{\mathcal{A}} p_{\alpha}[\Delta_{\alpha}]d\mu(\alpha),$$

où p_{α} est constante sur Δ_{α} par le corollaire 5.2.13.

PROPOSITION 5.3.2 *Soit T un courant horizontal fortement approximable, et soit \mathcal{L} une lamination par graphes horizontaux dans $U \times \mathbb{D}$. Soit $T|_{\mathcal{L}}$ le courant défini par*

$$T|_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{A}(\mathcal{L})} p_{\alpha}[\Delta_{\alpha}]d\mu(\alpha),$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ est l'ensemble des disques de \mathcal{A} inclus dans une feuille de \mathcal{L} . Alors $T|_{\mathcal{L}}$ est uniformément laminaire.

En d'autres termes, la restriction de T à une lamination est un courant uniformément laminaire (l'exemple du courant de Demailly montre que l'hypothèse "fortement approximable" est bien nécessaire). Le courant $T|_{\mathcal{L}}$ a la propriété de *maximalité* suivante : si S est un courant (uniformément) laminaire subordonné à \mathcal{L} et $S \leq T$, alors $S \leq T|_{\mathcal{L}}$ –c'est évident par la proposition 2.3.6 et la définition de $T|_{\mathcal{L}}$.

PREUVE : on fixe une transversale verticale τ globale et on paramètre les graphes de \mathcal{L} par $t \in \tau$. On a alors une représentation

$$T|_{\mathcal{L}} = \int_{\tau} h_t[\Gamma_t]d\mu_{\tau}(t),$$

où h_t est une fonction localement constante hors d'un ensemble de mesure nulle sur Γ_t . On doit montrer que h_t est égale presque partout à une fonction constante sur presque tout graphe Γ_t . Il suffit pour cela de reprendre mot pour mot la preuve du corollaire 5.2.13. \square

Par abus de langage on ne fera pas de différence entre la lamination sous jacente à la boîte B_Q et B_Q elle même. Si B_Q est une boîte de flot, considérons le courant uniformément laminaire $T|_{B_Q}$ ($T|_{B_Q} \geq T_Q$), qui induit une mesure transverse dans la lamination sous jacente à B_Q , i.e. une mesure dans toutes les transversales, invariante par holonomie (voir [Sul]). La *masse transverse* d'une boîte est la masse totale d'une transversale globale pour la mesure transverse.

PROPOSITION 5.3.3 *On a les propriétés suivantes :*

- i. si $dft(x) < \varepsilon$ alors il existe une boîte B_Q , $Q \ni x$, de masse transverse supérieure à $1 - \varepsilon$;
- ii. l'ensemble régulier \mathcal{R} est recouvert par une quantité au plus dénombrable de boîtes ;
- iii. si $\{x\} \times \mathbb{D}$ est une fibre régulière, alors \mathcal{R} est de m^x -mesure totale dans $\{x\} \times \mathbb{D}$.

La proposition est évidente. On indexe les boîtes de flot, de façon que

$$\mathcal{R} = \bigcup_{m \geq 0} B_m \simeq \bigcup_{m \geq 0} \tau_m \times Q_m.$$

Nous allons à présent définir une nouvelle topologie dans les transversales τ_m . Rappelons que pour tout m , τ_m est un fermé d'une fibre verticale.

Soit A un sous ensemble mesurable de $\{z\} \times \mathbb{D}$. On rappelle que $w \in A$ est un *point de densité* de A , relativement à m^z , si et seulement si

$$\frac{m^z(A \cap B(w, r))}{m^z(B(w, r))} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1.$$

Le théorème de Lebesgue affirme que si $m^z(A) > 0$, presque tout point de A est de densité.

DÉFINITION 5.3.4 *Un sous ensemble A de $\{z\} \times \mathbb{D}$ est d-ouvert s'il est vide ou bien si A est mesurable, $m^z(A) > 0$, et si tout point de A est un point de densité pour la mesure m^z .*

On vérifie aisément que ceci définit bien une topologie sur $\{z\} \times \mathbb{D}$. Seul l'axiome d'intersection mérite justification : si A_1 et A_2 sont deux d-ouverts, et $w \in A_1 \cap A_2$, alors pour $r < r_\varepsilon$ et $i = 1$ ou 2 on a $m^z(A_i \cap B(w, r)) > (1 - \varepsilon)m^z(B(w, r))$, et donc $m^z(A_1 \cap A_2 \cap B(w, r)) > (1 - 2\varepsilon)m^z(B(w, r))$.

La d-topologie sur τ_m est par définition la topologie induite par restriction de la d-topologie sur la fibre. On considère également la topologie produit de la d-topologie par la topologie standard dans $B_m \simeq \tau_m \times Q_m$, que nous continuerons à appeler d-topologie.

Voici des propriétés évidentes de la d-topologie.

PROPOSITION 5.3.5 *Soit la d-topologie associée à m^z dans $\{z\} \times \mathbb{D}$.*

- *Les ensembles de mesure nulle sont des d-fermés de d-intérieur vide. En particulier le fait de retirer des ensembles de mesure nulle n'affecte pas le caractère d-ouvert.*
- *Les ouverts de mesure positive sont d-ouverts. En particulier la d-topologie est plus fine que la topologie usuelle sur $\text{Supp}(m^z)$.*

L'ensemble régulier \mathcal{R} est réunion dénombrable de boîtes de flot compatibles, $\mathcal{R} = \cup_{m \geq 0} B_m$. La d-topologie dans la boîte B_m ne dépend pas de la transversale choisie, car l'holonomie dans B_m est continue pour la topologie standard et préserve la famille de mesures transverses (m^z). On en déduit que les d-topologies des boîtes B_m sont compatibles. L'ensemble régulier \mathcal{R} peut être donc muni de la d-topologie.

Deux points seront dits être dans la même feuille s'il existe un chemin continu γ liant ces deux points, et une chaîne ordonnée finie de boîtes B_{m_1}, \dots, B_{m_q} (éventuellement avec répétition) tel que $\gamma|_{B_{m_j}}$ soit inclus dans une plaque de B_{m_j} (la restriction signifie ici restriction à l'intervalle correspondant de paramétrage). On définit les *feuilles* de \mathcal{R} comme étant les classes d'équivalence de cette relation, la définition étant bien sûr identique à celle des feuilles des feuilletages et des laminations. Noter que seule la topologie usuelle sera utilisée le long des feuilles.

PROPOSITION 5.3.6 *Les feuilles sont σ -compactes et coupent chaque fibre $\{z\} \times \mathbb{D}$ en un ensemble au plus dénombrable.*

PREUVE : le deuxième point est conséquence du premier puisque l'ensemble des points d'intersection d'une feuille et d'une fibre verticale est discret dans la topologie de la feuille. Pour le premier point, supposons que les Q_m soient numérotés par taille décroissante. Chaque feuille admet donc une exhaustion dénombrable comme réunion de familles de plaques de taille décroissante. Pour une suite finie de carrés fixée, on voit qu'à une plaque dans le carré

initial correspond un choix fini de suites de plaques adjacentes successives. □

Étant donnée une boîte de flot B_m , son d-intérieur sera noté $d - \text{int}(B_m) = d - \text{int}(\tau_m) \times Q_m$. Pour chaque boîte B_{m_0} , on retire de $d - \text{int}(B_{m_0})$ toutes les plaques situées dans la même feuille qu'une plaque de

$$\bigcup_{m \geq 0} B_m \setminus (d - \text{int}(B_m))$$

(m_0 compris puisque une feuille peut rencontrer B_{m_0} plusieurs fois). D'après la proposition précédente, l'ensemble de plaques retiré est de mesure transverse nulle et donc la réunion des plaques restantes est un d-ouvert.

On réitère la même opération dans chaque boîte et on obtient ainsi un sous ensemble $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, d-ouvert et de mesure transverse totale dans chaque boîte, qui est de plus saturé dans \mathcal{R} pour la relation d'appartenance à la même feuille. Soit $B'_m = B_m \cap \mathcal{R}'$. Nous vérifions que \mathcal{R}' a une structure de lamination pour la d-topologie.

Premièrement si $x \in \mathcal{R}'$, alors $x \in B'_m$ pour un certain m , et B'_m définit un d-voisinage feuilleté de x : il suffit pour cela de vérifier que l'holonomie est d-continue dans B'_m , i.e. préserve les d-ouverts. L'holonomie préserve les ensembles de mesure transverse strictement positive car la mesure transverse est invariante, et préserve les points de densité car elle est continue pour la topologie usuelle. D'autre part les cartes feuilletées sont compatibles par construction.

EXEMPLE 5.3.7 Nous avons vu à l'exemple 2.2.2 comment construire des laminations à plis qui ne sont pas des laminations. Voici comment agit le raffinement de la topologie sur un tel exemple. Rappelons que la lamination à plis a la forme suivante :

$$\mathcal{L} := \left(\bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathcal{C}(z_0, w_n, \varepsilon_n) \right) \cup \left(\bigcup_{w \in \partial D(0, 1/2)} \mathbb{D} \times \{w\} \right) = \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_1,$$

où les courbes $\mathcal{C}(z_0, w_n, \varepsilon_n)$ sont des revêtement ramifiés de degré 2 sur l'horizontale, et s'accablent sur \mathcal{U}_1 , de sorte que si $x \in \mathcal{U}_1$, \mathcal{L} n'est pas une lamination au voisinage de x . Supposons donnée une mesure transverse chargeant \mathcal{U}_1 et chacun des

$$\bigcup_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathcal{C}(z_0, w_n, \varepsilon_n).$$

Si $w_0 \in \partial D(0, 1/2)$ dans la fibre $z_0 \times \mathbb{D}$, le cercle $\partial D(0, 1/2)$ qui est de mesure positive est donc un d-voisinage de w_0 dans la fibre. Autrement dit (z_0, w_0) admet un d-voisinage ne rencontrant pas \mathcal{U}_2 , ce qui est le resultat escompté.

THÉORÈME 5.3.8 *Soit T un courant horizontal fortement approximable. Il existe une lamination \mathcal{L} munie d'une injection continue et lisse le long des feuilles, $i : \mathcal{L} \hookrightarrow \text{Supp}(T)$, préservant la structure laminaire. La lamination \mathcal{L} est munie d'une mesure transverse invariante telle que si \tilde{T} désigne le cycle feuilleté associé, on ait naturellement $i_* \tilde{T} = T$.*

En particulier $i(\mathcal{L})$ est de $\|T\|$ -mesure totale ; la construction montre que $i(\mathcal{L})$ est de mesure $1 - \text{dft}(x)$ dans chaque fibre $\{x\} \times \mathbb{D}$. On a en fait donné une structure naturelle de

lamination au borelien \mathcal{R}' qui est de $\|T\|$ -mesure totale.

PREUVE : la structure de lamination ayant été décrite, il reste à vérifier les assertions concernant la mesure transverse. Chaque boîte B_m est munie d'une mesure transverse naturelle μ_m induite par le courant uniformément laminaire $T|_{B_m}$. Pour que ceci définisse une mesure transverse invariante, il faut (et il suffit) que les mesures μ_m coïncident sur les transversales situées à l'intersection des cartes (voir [Gh] §3).

Supposons que B'_{m_1} et B'_{m_2} soient deux boîtes de \mathcal{R}' d'intersection non vide. Paramétrons B'_{m_1} et B'_{m_2} à partir d'une fibre commune $\{z\} \times \mathbb{D}$, i.e.

$$B'_{m_i} = \bigcup_{t \in T_i} \Gamma_t \cap B'_{m_i}$$

où T_i est un d-ouvert de $\{z\} \times \mathbb{D}$, relativement à la mesure m^z , et Γ_t est le graphe issu de $t \in T$. Alors $m^z(T_1 \cap T_2) > 0$ car $T_1 \cap T_2$ est d-ouvert. Il faut montrer que μ_{m_1} et μ_{m_2} (plus précisément la réalisation de ces mesures transverses dans la transversale $\{z\} \times \mathbb{D}$) coïncident dans $T_1 \cap T_2$. C'est une conséquence de la propriété forte de prolongement analytique.

En effet si ce n'était pas le cas, il existerait un borélien $A \subset T_1 \cap T_2$ tel que (par exemple) $\mu_{m_1}(A) > \mu_{m_2}(A)$. Soit alors le courant uniformément laminaire S dans $B'_{m_1} \cap B'_{m_2}$,

$$S = \int_A [\Gamma_t \cap B'_{m_1} \cap B'_{m_2}] d\mu_{m_1}(t),$$

subordonné à T dans $B'_{m_1} \cap B'_{m_2}$. Par la propriété forte de prolongement analytique (théorème 5.2.12), on a dans B'_{m_2}

$$S' := \int_A [\Gamma_t \cap B'_{m_2}] d\mu_{m_1}(t) \leq T,$$

donc par la propriété de maximalité de $T|_{B'_{m_2}}$,

$$S' \leq T|_{B'_{m_2}} = \int_A [\Gamma_t \cap B'_{m_2}] d\mu_{m_2}(t).$$

Cette relation contredit le fait que $\mu_{m_1}(A) > \mu_{m_2}(A)$.

Considérons maintenant une forme test ϕ dans \mathbb{B} . La forme $i^*\phi$ est une forme différentielle sur la lamination \mathcal{L} , et par définition de la mesure transverse (et du cycle feuilleté \tilde{T}) dans les boîtes, on a

$$\langle \tilde{T}, \mathbf{1}_{B_m} i^*\phi \rangle = \int_{\tau_m} \left(\int_{\Gamma_t} \phi \right) d\mu_m(t) = \langle T, \mathbf{1}_{B_m} \phi \rangle.$$

Ensuite il suffit de recouvrir le support de ϕ , à un ensemble de d-intérieur vide près (donc de mesure nulle pour le cycle feuilleté) par une réunion disjointe de d-ouverts inclus dans des boîtes de flot. \square

REMARQUES :

- On se limite aux formes test de la forme $i^*\phi$ puisqu'on a très peu d'informations sur la topologie transverse et sa locale compacité. En particulier si la d-topologie n'était pas localement compacte, les formes transversalement continues ne seraient pas nécessairement localement intégrables.

- Les feuilles de la lamination n’ont pas de tangences verticales par construction ; en considérant deux projections on peut remédier à ce problème.

Une application possible de cette étude pourrait être d’étudier l’extrémalité des courants horizontaux fortement approximables via l’ergodicité de la mesure transverse de \mathcal{L} . Si la mesure transverse est ergodique, T ne peut pas s’écrire comme somme non triviale de courants fortement approximables. En revanche *a priori* T pourrait être tout de même somme de deux courants positifs fermés. Il serait intéressant d’explorer plus avant cette question.

Le lecteur a pu s’étonner de l’attention particulière apportée à la famille de courants uniformément laminaires T_Q . Pourquoi ne peut on pas définir une boîte de flot comme étant le support d’un courant uniformément laminaire quelconque subordonné à T ? La raison est que nous ne savons pas (cf. la fin de la section précédente) si des disques subordonnés à T peuvent se couper. Si c’était le cas, les boîtes de flot correspondantes ne seraient alors pas compatibles (contrairement à celles associées à la famille T_Q qui le sont par construction).

Ceci montre que dans l’absence d’une réponse positive à cette question, on ne peut pas identifier les feuilles de \mathcal{L} et les sous variétés subordonnées au courant : si le disque Δ est subordonné à T , alors presque sûrement il y a une feuille de \mathcal{L} de mesure totale dans Δ , mais le disque Δ n’est pas lui même nécessairement une feuille (puisque sinon des feuilles de \mathcal{L} pourraient se couper).

En revanche, dans le cas où le courant fortement approximable T est de potentiel continu (ou plus généralement si $T \wedge T$ est admissible et nul), ce qui est le cas pour les courants stable et instable associés aux applications d’allure Hénon, où le phénomène d’intersection des disques est impossible, la théorie est plus satisfaisante. En particulier on peut prendre comme boîtes de flot les supports de tous les courants uniformément laminaires subordonnés à T , et si Δ est un disque inclus dans \mathcal{R}' (i.e. dans une feuille de la lamination) admettant un prolongement $\tilde{\Delta}$, le prolongement est aussi inclus dans une feuille. Autrement dit on a dans ce cas donné une structure de lamination à “l’ensemble des disques subordonnés à T ”. Cette structure ne dépend alors que de T , et ne dépend pas en particulier des quadrillages choisis ni de l’approximation de T .

5.4. Courants fortement approximables : cas général.

Pour des raisons de compréhension, l'accent a été mis, dans ce chapitre, sur l'étude des courants horizontaux du bidisque. Les résultats de structure présentés sont cependant valables dans un cadre plus général, incluant les courants fortement approximables de \mathbb{P}^2 . Nous expliquons dans ce dernier paragraphe comment adapter les preuves, en proposant un cadre abstrait dans lequel la fonction de défaut, qui en est l'instrument essentiel, est bien définie.

Par souci de généralité, nous ne nous limitons pas au cas de \mathbb{P}^2 , dans le but de permettre l'utilisation de projections le long de pincesaux de courbes sur une surface projective (dans le style de [Ca]).

Soient une surface complexe M et un ouvert \mathcal{U} de M , biholomorphe à $\mathbb{D} \times F$ où F –la fibre– est une surface de Riemann (ouverte ou compacte). Nous identifierons par abus de notation \mathcal{U} et $\mathbb{D} \times F$ par la suite. Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ de $\mathbb{D} \times F$ et $\pi : \mathbb{D} \times F \rightarrow \mathbb{D}$ la projection naturelle. On notera $F_z = \pi^{-1}(z)$ la fibre au dessus de z . On fixe un voisinage \mathcal{N} de $\overline{\mathbb{D} \times F}$ dans M .

DÉFINITION 5.4.1 *Soit T un courant positif fermé de $\mathbb{D} \times F$. Nous dirons que le courant T est normalisé et fortement approximable relativement à la projection π dans $\mathbb{D} \times F$ s'il existe une suite (C_n) de sous variétés (éventuellement à bord) de \mathcal{N} telles que $\lim d_n^{-1}[C_n] \rightarrow T$ et une constante C telles que les propriétés suivantes soient vérifiées*

- i. la courbe C_n est à support vertical compact pour tout n , i.e. pour tout n il existe un compact K de F (dépendant de n) tel que $C_n \subset (\mathbb{D} \times K)$;
- ii. pour tout $Q \subset \mathbb{D}$ l'ensemble $\mathcal{G}(Q, n)$ des bonnes composantes au dessus de Q est une famille normale d'applications holomorphes $Q \rightarrow F$, et pour toute subdivision admissible \mathcal{Q} de \mathbb{D} , si $T_{\mathcal{Q}, n}$ désigne le courant

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{d_n} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(Q, n)} [\Gamma]$$

formé des bonnes composantes au dessus de \mathcal{Q} on a

$$\langle d_n^{-1}[C_n] - T_{\mathcal{Q}, n}, \pi^*(idz \wedge d\bar{z}) \rangle \leq CAire(Q); \quad (5.4)$$

- iii. l'ensemble des points x tels que le $(1,1)$ vecteur $t(x)$ issu de la décomposition polaire $T = t \|T\|$ de T soit simple et tangent à la direction de projection π est de $\|T\|$ mesure nulle;
- iv. la section $\langle T, \pi, z \rangle$ est de masse 1 presque partout, i.e. si φ est une fonction test de \mathbb{D} ,

$$\mathbf{M} \left(T \wedge \pi^* \left(\frac{i}{2\pi} dz \wedge d\bar{z} \right) \right) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) d\lambda(z),$$

où λ est la mesure de Lebesgue normalisée de \mathbb{D} .

Un certain nombre de commentaires sont ici nécessaires. La première remarque est que contrairement aux définitions similaires déjà rencontrées (définitions 4.4.1 et 5.1.5) la projection est ici fixée dans la définition, la raison en est que nous n'avons pas d'informations sur la variété ambiante M . La condition *iii.*, auparavant vérifiée pour une projection générique, apparaît donc maintenant dans la définition. Celle ci assure que la famille croissante des courants T_Q tend vers T ; en particulier T est laminaire. Par ailleurs, si la fibre F est compacte, la première partie de *i.* ainsi que *iv.* sont automatiquement vérifiés. Cette dernière condition est dans le cas où F est ouverte une condition assurant que la masse "ne s'échappe pas à l'infini". Une précision est également de rigueur concernant la notion de "bonne composante". Il est possible –et c'est ce que nous avons fait à la proposition 3.2.4– de ne considérer qu'un sous ensemble de l'ensemble de toutes les bonnes composantes au dessus de Q , de façon que $\mathcal{G}(Q, n)$ soit une famille normale et l'estimation (5.4) soit satisfaite. Le terme "normalisé" renvoie bien entendu au "1" de la condition *iv.*, ainsi qu'au " $1 \cdot d_n$ " de la condition *i.*

Nous indiquons maintenant comment adapter les arguments de la section 5.2. Le point essentiel est de définir la fonction de défaut. Fixons pour cela une subdivision \mathcal{Q} , un carré $Q \in \mathcal{Q}$, et $z_0 \in Q$. L'ensemble des graphes de $T_{Q,n}$ rencontrant un certain compact de F_{z_0} (et donc en particulier le support d'une forme test) est une famille équicontinue de fonctions holomorphes d'après *ii.*, et donc d'après la proposition 3.2.4 (très légèrement adaptée), les valeurs d'adhérence de $T_{Q,n}$ sont des courants uniformément laminaires dans $Q \times F$.

On considère une extraction telle que pour tout Q , $T_{Q,n} \rightarrow T_Q$. D'après *ii.* et *iii.*, la somme des T_Q est arbitrairement proche de T si la subdivision admissible \mathcal{Q} est assez fine. De plus par *iii.* les disques du courant uniformément laminaire T_Q sont transverses aux fibres donc pour tout z , le produit extérieur $T_Q \wedge [F_z]$ est localement admissible et géométrique (voir la remarque 4.3.4) : il s'agit de l'image dans la transversale F_z de la mesure transverse inhérente à T_Q . En particulier la masse totale de cette mesure est indépendante de $z \in Q$. La masse de cette mesure sera notée $\text{m.s.}(T_Q)$. On a de plus $\text{m.s.}(T_Q) \leq 1$ car $T_Q \leq T$ et les sections de T sont de masse 1 quand elles existent (condition *iv.*). Ceci permet de définir $\text{dft}(T_Q) := 1 - \text{m.s.}(T_Q)$.

Pour interpréter la fonction de défaut en termes de proportion asymptotique des bonnes composantes il nous faut justifier que

$$\text{m.s.}(T_Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\mathcal{G}(Q, n)}{d_n}.$$

En effet il est clair que

$$\text{m.s.}(T_Q) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\mathcal{G}(Q, n)}{d_n}. \quad (5.5)$$

Par ailleurs on a dans $Q \times F$, $d_n^{-1}[C_n] = T_{Q,n} + R_{Q,n}$, et la suite de courants $R_{Q,n}$ est de masse localement bornée (puisque dominée par $d_n^{-1}[C_n]$ qui converge), on peut donc en extraire des valeurs d'adhérence. Si l'inégalité (5.5) était stricte, on contredirait alors la condition *iv.* .

Ceci permet de reproduire les sections 5.2 et 5.3. En effet, on considère une famille de subdivisions admissibles, \mathcal{Q}_k^j , et l'estimation (5.4) permet de contrôler la somme des défauts des carrés d'un quadrillage; le lien élémentaire entre somme des défauts et prolongement analytique –proposition 5.2.6– est également vrai dans notre nouveau cadre. On peut alors reprendre le théorème 5.2.12 en retirant le mot "horizontal".

THÉORÈME 5.4.2 *Soit T un courant fortement approximable de $\mathbb{D} \times F$ relativement à la projection $\pi : \mathbb{D} \times F \rightarrow \mathbb{D}$. Soit S un courant uniformément laminaire par graphes dans $\pi^{-1}(U)$, où U est un ouvert connexe de \mathbb{D} . On suppose qu'il existe un ouvert $U_1 \subset U$ tel que $S \leq T$ dans $\pi^{-1}(U_1)$. Alors $S \leq T$ dans $\pi^{-1}(U)$.*

On peut également énoncer un analogue du corollaire 5.2.14. La preuve nécessite une petite adaptation car on ne peut pas *a priori* perturber la projection. Néanmoins dans \mathbb{P}^2 , un courant fortement approximable est fortement approximable relativement à une projection générique, donc il n'y a pas dans ce cas besoin de modifier la preuve. L'adaptation dans le cadre général de la définition 5.4.1 sera laissée au lecteur.

Il reste à faire le lien avec la construction des courants laminaires dans \mathbb{P}^2 . Soit T un courant laminaire fortement approximable dans \mathbb{P}^2 (définition 4.4.1), homologue à une droite (i.e. de masse 1 pour la métrique de Fubini-Study). Pour une projection générique, les conditions *i.* et *iii.* sont vérifiées. La définition des bonnes composantes comme graphes de volume de Fubini-Study contrôlé à la proposition 3.2.4 permet d'obtenir *ii.* . Pour des raisons homologiques, la masse de la section de T par une droite, si elle existe, est 1. Donc si la condition *iv.* est violée, il y a un ensemble de mesure strictement positive de droites passant par p pour lesquelles la section correspondante de T présente une masse de Dirac en p . D'après le théorème de stabilité des nombres de Lelong par slicing de Siu (voir [De1]), c'est alors le cas pour presque toute section et de plus le nombre de Lelong de T en p est strictement positif. Il suffit donc de choisir p hors de $\{p, \nu(T, p) > 0\}$, qui est un sous ensemble analytique, pour que la condition *iv.* soit satisfaite.

Bibliographie

- [BJ] Bedford, Eric; Jonsson, Mattias. *Dynamics of regular polynomial endomorphisms of \mathbb{C}^k* . Amer. J. Math. 122 (2000), 153-212.
- [BLS] Bedford, Eric; Lyubich, Mikhail; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV : The measure of maximal entropy and laminar currents*. Invent. Math. 112 (1993), 77-125.
- [BLS2] Bedford, Eric; Lyubich, Mikhail; Smillie, John. *Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2* . Invent. Math. 114 (1993), 277-288.
- [BS1] Bedford, Eric; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . Currents, equilibrium measure and hyperbolicity* Invent. Math. 103 (1991), 69-99.
- [BS2] Bedford, Eric; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . II : Stable manifolds and recurrence*. J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 657-679.
- [BS3] Bedford, Eric; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure*. Math. Ann. 294 (1992), 395-420.
- [BS5] Bedford, Eric; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . V : Critical points and Lyapunov exponents*. J. Geom. Anal. 8 (1998), 349-383.
- [BS8] Bedford, Eric; Smillie, John. *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VIII : Quasi-expansion*. Amer. J. Math. 124 (2002), 221-271.
- [BT1] Bedford, Eric; Taylor, B. A. *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*. Invent. Math. 37 (1976), 1-44.
- [BT2] Bedford, Eric; Taylor, B. A. *A new capacity for plurisubharmonic functions*. Acta Math. 149 (1982), 1-40.
- [Be] Bergweiler, Walter. *The role of the Ahlfors Five Islands Theorem in complex dynamics*. Conform. Geom. Dyn. 4 (2000), 22-34 (electronic).
- [BeS] Berndtsson, Bo; Sibony, Nessim. *The $\bar{\partial}$ equation on a positive current*. Invent. Math. 147 (2002), 371-428.
- [Bi] Bishop, Errett. *Conditions for the analyticity of certain sets*. Michigan Math. J. 11 (1964) 289-304.
- [BoTu] Bott, Raoul; Tu, Loring W. *Differential forms in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Ca] Cantat, Serge. *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes*. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1999. Acta Math. 187 (2001).
- [CLS] Camacho, Cesar; Lins Neto, Alcides; Sad, Paulo. *Minimal sets of foliations on complex projective spaces*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 68, (1988), 187-203 (1989).
- [Ch] Chirka, Evgeni M. *Complex analytic sets*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989
- [Co] Cogswell, Kurt. *Entropy and volume growth*. Ergodic Theory Dynam. Systems 20 (2000), 77-84.
- [De1] Demailly, Jean-Pierre. *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*. Complex analysis and geometry, 115-193, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993.
- [De2] Demailly, Jean-Pierre. *Courants positifs extrêmes et conjecture de Hodge*. Invent. Math. 69 (1982), 347-374.
- [dR] De Rham, Georges *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*. Actualités Scientifiques et Industrielles. Hermann, Paris, 1973.
- [Di] Diller, Jeffrey. *Invariant measure and Lyapunov exponents for birational maps of \mathbb{P}^2* . Comment. Math. Helv. 76 (2001), 754-780.

- [DF] Diller, Jeffrey ; Favre, Charles. *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*. Amer. J. Math. 123 (2001), 1135-1169.
- [DiS] Dinh, Tien Cuong ; Sibony, Nessim. *Dynamique des endomorphismes holomorphes*. Preprint (2002).
- [Do] Douady, Adrien. *Prolongements de mouvements holomorphes (d'après Slodkowski et autres)*. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque No. 227 (1995), 7-20.
- [DH] Douady, Adrien ; Hubbard, John H. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 287-343.
- [Du1] Dujardin, Romain. *Dynamics of polynomial Hamiltonian vector fields in \mathbb{C}^{2k}* Michigan Math. J. 49 (2001), 419-434.
- [Du2] Dujardin, Romain. *Laminar currents in \mathbb{P}^2* . à paraître dans Math. Ann.
- [Du3] Dujardin, Romain. *Hénon-like mappings in \mathbb{C}^2* . Preprint.
- [DS] Duval, Julien ; Sibony, Nessim. *Polynomial convexity, rational convexity, and currents*. Duke Math J. 79 (1995) 487-513.
- [Fe] Federer, Herbert. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag, New York 1969.
- [Fi] Fischer, Gerd *Complex analytic geometry*. Lecture Notes in Math., vol. 538. Springer Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [Fo] Fornæss, John Erik. *Dynamics in several complex variables*. CBMS, vol. 87., Amer. Math. Soc., Providence RI, 1996.
- [FS1] Fornæss, John Erik ; Sibony, Nessim. *Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou-Bieberbach domains*. Duke Math. J. 65 (1992), 345-380.
- [FS2] Fornæss, John Erik ; Sibony, Nessim. *Oka's inequality for currents and applications*. Math. Ann. 301 (1995), 399-419.
- [Fr] Friedland, Shmuel. *Entropy of algebraic maps*. J. Fourier Anal. Appl., Kahane special issue, 1995
- [FL] Fulton, William ; Lazarsfeld, Robert. *Connectivity and its applications in algebraic geometry. Algebraic geometry* (Chicago, Ill., 1980), pp. 26-92, Lecture Notes in Math., 862, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [Gh] Ghys, Etienne. *Laminations par surfaces de Riemann*. Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), Panoramas et Synthèses, 8, 1999.
- [Gre] Greenberg, Marvin J. *Lectures on algebraic topology*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1967.
- [GH] Griffiths, Phillip ; Harris, Joseph. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [Gro] Gromov, Mikhail. *Entropy, homology and semialgebraic geometry*. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86. Astérisque No. 145-146, (1987), 225-240.
- [Gu1] Guedj, Vincent. *Dynamics of polynomial mappings of \mathbb{C}^2* . Amer. J. Math. 124 (2002), 75-106.
- [Gu2] Guedj, Vincent. *Dynamics of quadratic polynomial mappings of \mathbb{C}^2* . Preprint (2002).
- [Hö] Hörmander, Lars. *Notions of convexity*. Progress in Math 127. Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
- [Hu] Hubbard, John H.. *The Hénon mapping in the complex domain*. Chaotic dynamics and fractals (Atlanta, 1985), 101-111. Academic Press, 1986.
- [HO] Hubbard, John H. ; Oberste-Vorth, Ralph W. *Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials*. Real and complex dynamical systems, 89-132, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 464, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [HM] Hurder, Steven ; Mitsumatsu, Yoshihiko. *The intersection product of transverse invariant measures*. Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 1169-1183.
- [K] Katok, Anatole. *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 51, (1980), 137-173.
- [KS] Katok, Anatole ; Strelcyn, Jean-Marie ; Ledrappier, Francois ; Przytycki, Feliks. *Invariant manifolds, entropy and billiards ; smooth maps with singularities*. Lecture Notes in Math., 1222. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

- [KH] Katok, Anatole ; Hasselblatt, Boris. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [KL] Kaimanovitch, Vadim ; Lyubich, Mikhail. *Conformal and harmonic measures on laminations associated with rational maps*. Preprint (2001).
- [LG] Lelong, Pierre ; Gruman, Lawrence. *Entire functions of several complex variables*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 282. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [LM1] Lyubich, Mikhail ; Milnor, John. *The Fibonnaci unimodal map*. J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 425-457.
- [LM2] Lyubich, Mikhail ; Minsky, Yair. *Laminations in holomorphic dynamics*. J. Differential Geom. 47 (1997), 17-94.
- [MSS] Mañé, Ricardo ; Sad, Paulo ; Sullivan, Dennis *On the dynamics of rational maps*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 193-217.
- [N1] Newhouse, Sheldon. *Entropy and volume*. Ergodic Theory Dynam. Systems 8* (1988), Charles Conley Memorial Issue, 283-299.
- [N2] Newhouse, Sheldon. *Continuity properties of entropy*. Ann. of Math. (2) 129 (1989), 215-235.
- [Ra] Raby, Gilles. *Tranchage des courants positifs fermés et équation de Lelong-Poincaré*. J. Math. Pures Appl. (9) 75 (1996), 189-209.
- [Ro] Robinson, Clark. *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [RS1] Ruelle, David ; Sullivan, Dennis. *Currents, flows and diffeomorphisms*. Topology 14 (1975), 319-327.
- [RS2] Russakovskii, Alexander ; Shiffman, Bernard. *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*. Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 897-932.
- [Si1] Sibony, Nessim. *Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k* . Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), Panoramas et Synthèses, 8, 1999.
- [Si2] Sibony, Nessim *Quelques problèmes de prolongements de courants en analyse complexe*. Duke Math. J. 52 (1985), 157-197.
- [Si3] Sibony, Nessim. *Notes de séminaire, non publiées (1996)*.
- [Sim] Simon, Leon. *Lectures on geometric measure theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 3. Canberra, 1983.
- [Sl] Slodkowski, Zbigniew. *Uniqueness property for positive closed currents in \mathbb{C}^2* . Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), 635-652.
- [Sm] Smillie, John. *The entropy of polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2* . Ergodic Theory Dynam. Systems 10 (1990), 823-827.
- [Su] Su, Meiyu. *Measured solenoidal Riemann surfaces and holomorphic dynamics*. J. Differential Geom. 47 (1997), 170-195.
- [Sul] Sullivan, Dennis. *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*. Invent. Math. 36 (1976), 225-255.
- [T] Tsuji, M. *Potential theory in modern function theory*. Maruzen Co., Ltd., Tokyo 1959.
- [Y] Yomdin, Yuri. *Volume growth and entropy*. Israel J. Math. 57 (1987), 285-300.