Ecole Polytechnique - MAP 361 **Lundi 15 avril 2019**

PC 1 – Probabilités discrètes

Exercice 1 [Evénements indépendants] Soit $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On définit les événements $A := \{\omega_1, \omega_2\}$, $B := \{\omega_1, \omega_3\}$ et $C := \{\omega_2, \omega_3\}$. Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux. Comparer $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Exercice 2 [Conditionnement] L'exercice suivant est très classique et a de nombreuses variantes. Il illustre l'utilité d'une formulation mathématique rigoureuse pour éviter des pièges et des paradoxes dus à des raisonnements spécieux.
Une famille a deux enfants. On suppose les 4 configurations (ω_1, ω_2), avec ω_i = sexe du $i$ème enfant, équiprobables.

1. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que le plus jeune enfant est une fille ?
2. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'enfant le plus âgé est une fille ?
3. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'un des enfants est une fille ?

Exercice 3 [Cartes électroniques défectueuses] On considère une usine fabriquant des cartes électroniques. Lors de la production on sait qu'une carte sur 100 000 est défectueuse. En fin de production, on effectue un test pour savoir si la carte est défectueuse ou non. Lorsque le test donne un résultat positif, ce test déclare la pièce comme défectueuse. Pour les pièces effectivement défectueuses, le test est positif dans 95 % des cas, pour les pièces correctes, le test est positif (donc déclare la pièce comme déféctueuse [1]) dans 1% des cas.

Quelle est la probabilité que la pièce soit effectivement défectueuse lorsque le test est positif ?

Exercice 4 [Limite supérieure d'ensembles] Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de Ω.

1. Si $\Omega = \mathbb{R}$, donner $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les trois cas suivants :
   (a) $A_n = [-1/n, 3 + 1/n]$;
   (b) $A_n = [-2 - (-1)^n, 2 + (-1)^n[$;
   (c) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite ordonnée des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n.
2. Comparer $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$ et $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$ avec $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} B_n$.

1. On parle alors de "faux-positifs".

Exercice 5 [Décimation] Le nombre d'individus dans une colonie de bactéries est modélisé par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En présence d'un antibiotique, chaque individu de la population a une probabilité $p \in]0,1[$ de survivre (indépendamment des autres).

1. Déterminer la loi du nombre N_1 de bactéries survivantes. On adoptera la modélisation suivante :
$$N_1 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i,$$
où $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p qu'on supposera indépendante de N.
2. On expose de manière répétée la colonie de bactéries à ce traitement antibiotique et on note N_k, $k \geq 1$, le nombre de bactéries survivantes après la $k$ième exposition. Montrer que presque sûrement la colonie finit par s'éteindre.

Exercice 6 [Loi géométrique] On modélise le jeu de pile ou face par une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, en codant 1 pour succès (pile) et 0 pour échec (face) : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p$.

1. On pose $T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Que représente la variable aléatoire T_1, quelle est sa loi, sa moyenne, sa variance ?
2. Soit $k \geq 2$; on s'intéresse à la variable T_k définie par $T_k = \inf\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} X_i = k\}$ représentant l'instant où le joueur réalise son $k$ème succès. Déterminer la loi de T_k.
3. Posons $T_0 = 0$ et $\Delta_k = T_k - T_{k-1}$ pour $k \geq 1$. Montrer que les variables aléatoires Δ_k sont indépendantes et de même loi.

Exercice 7 [Absence de mémoire]

1. Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) X suit une loi géométrique ;
   (ii) La loi de $X - n$ sachant $\{X > n\}$ est identique à la loi de X pour tout entier $n \geq 0$.
2. Utiliser cette propriété pour calculer la variance de la loi géométrique.

Exercice 8 [Loi de Poisson] Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.

1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer $\mathbb{E}(z^{X_1} | X_1 + X_2)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2)$.

Exercice 9 [Fonction génératrice] Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k soient tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geq 0$, par $p_n = k(\frac{a}{a+1})^n$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.