# PC 2 : Tribus et espaces de probabilité - Variables aléatoires réelles - Densités de probabilité

## 1 Tribus et espaces mesurés

**Exercice 1** (Boréliens et mesure de Lebesgue). *On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélien et de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que $N^c$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

**Exercice 2** (Tribu engendrée par une fonction). *On considère une fonction $X : \Omega \to E$. Si $\mathcal{E}$ est une tribu sur $E$, montrer que*

$$\mathcal{A} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$$

*est une tribu sur $\Omega$.*

**Exercice 3** (Tribu engendrée par une classe de parties).

1. *Montrer que si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de tribus sur un espace $\Omega$, alors $\mathcal{A} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur $\Omega$.*
2. *Soit $\mathcal{C}$ une famille de sous-ensembles d'un espace $\Omega$. Montrer en utilisant la question précédente qu'il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Cette tribu est appelée 'tribu engendrée par $\mathcal{C}$' et est notée $\sigma(C)$.*
3. *Soit $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partition d'un espace $\Omega$. Montrer que*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\cup_{i \in I} A_i : I \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

**Exercice 4** (Un ensemble non mesurable). *On considère la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

*On note $= (\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation où $I$ est un ensemble d'indexes fixé par la relation $\sim$. Ainsi, si $x \in \mathcal{C}_i$ alors $\mathcal{C}_i = x + \mathbb{Q}$.*

1. *Justifier que pour chaque classe d'équivalence $\mathcal{C}_i$ on a $\mathcal{C}_i \cap [0, 1] \neq \emptyset$.*
2. *Grâce à* l'axiome du choix*, on construit une famille $(v_i)_{i \in I}$ telle que $v_i \in \mathcal{C}_i \cap [0, 1]$, pour tout $i \in I$. L'ensemble $V = \{v_i : i \in I\}$ est appelé* ensemble de Vitali. *Nous allons montrer dans les questions suivantes que $V$ n'est pas un ensemble borélien.* Pour cela nous allons raisonner par l'absurde et supposer que $V$ est un ensemble borélien. *Dans ce qui suit, nous noterons $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*
   (a) *On pose $A = \cup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} V + r$. Montrer que si $V$ est borélien alors $A$ l'est aussi.*
   (b) *Montrer que $\lambda(A) \leq 3$ et en déduire que $\lambda(V) = 0$ puis que $\lambda(A) = 0$.*
   (c) *Montrer que $[0, 1] \subset A$ et conclure.*

## 2 Variables aléatoires réelles

**Exercice 5.** *Calculer l'espérance et la variance des lois uniforme, exponentielle et gaussienne.*

**Exercice 6** (Variables exponentielles)**.** *Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs réelles distribuée selon une loi exponentielle de paramètre 1.*

1. *Montrer que $U = \frac{1}{\lambda} X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.*
2. *Donner la loi de la variable aléatoire $V := 1 + E(X)$, où $E(\,\cdot\,)$ désigne la partie entière.*
3. *Donner la loi de $W = \sqrt{X}$.*
4. *Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y := \min(X, a)$, où $a > 0$. La variable $Y$ a-t-elle une densité ?*

**Exercice 7** (Loi uniforme)**.** *Soit $U$ une v.a. uniforme sur $[0, 1]$. On définit $X = \min(U, 1-U)$ et $Y = \max(U, 1-U)$. Trouver les lois de $X$ et $Y$. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.*

**Exercice 8** (Lois de Cauchy)**.** *Soit $X$ une variable aléatoire de Cauchy, de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$.*

1. *Calculer et reconnaître la loi de $1/X$ ;*
2. *Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?*

**Exercice 9** (Simulation par la méthode d'inversion)**.** *Comment créer des réalisations d'une loi de probabilité donnée à l'aide d'un ordinateur ? Il existe de nombreuses méthodes différentes en fonction de la loi que l'on souhaite simuler. L'ingrédient de base de toutes ces méthodes est un générateur de (pseudo-)variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. En effet, tout bon langage de programmation est équipé d'un tel générateur. Certaines méthodes de simulation consistent à tirer une réalisation de la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$ et à appliquer une transformation telle que le résultat suit la loi souhaitée. D'autres méthodes plus complexes nécessitent plusieurs réalisations de la loi uniforme, qui sont combinées de sorte qu'on obtienne une réalisation de la loi souhaitée.*

*Pour la méthode de simulation dite d'inversion on considère une fonction de répartition $F$ sur $\mathbb{R}$ et on introduit son inverse généralisée définie par*

$$p \in [0, 1] \mapsto F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x;\ F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. *Montrer que $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ si et seulement si $p \leq F(x)$.*
2. *En déduire que si $U$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, la variable aléatoire $X := F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition $F$.*
3. *Déduire de la question précédente une méthode générale de simulation de variables aléatoires réelles et l'appliquer au cas d'une variable exponentielle.*
4. *Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$. Qu'elle est la loi de $F_X(X)$ ?*

**Exercice 10** (Calculs de moments)**.**

1. *Montrer que si $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors $\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$ ;*
2. *Montrer que si $X$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbb{E}(X^{2n}) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.*

**Exercice 11** (Caractérisation par les moments)**.** *Montrer que si deux variables aléatoires* bornées $X$ *et* $Y$ *ont les mêmes moments, c'est-à-dire que* $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $X$ *et* $Y$ *ont même loi.*

**Exercice 12** (Contre exemple de Heyde pour la loi log-normale)**.** *Soit* $f_0$ *la densité de* $X_0 := e^Z$ *où* $Z$ *suit la loi* $\mathcal{N}(0,1)$*, c'est à dire* $f_0(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\log(x)^2/2}$ *pour* $x > 0$*. Pour tout réel* $-1 < a < 1$ *fixé, on définit la fonction* $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ *par* $f_a(x) := f_0(x)(1 + a\sin(2\pi\log(x)))$*. Montrer que* $f_a$ *est une densité possédant les mêmes moments que* $f_0$*, et en déduire que la loi log-normale n'est pas caractérisée par ses moments.*