PC 3 : Variables aléatoires réelles - Vecteurs aléatoires

1 Espérance,Variance et loi d'une variable aléatoire réelle

Exercice 1. *Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Déterminer la loi de* $\sin(V)$.

Exercice 2 (Loi de Cauchy)**.** *Soit X une variable aléatoire de Cauchy, de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$. Reconnaître la loi de $1/X$ en utilisant la méthode de la fonction muette.*

Exercice 3 (Loi uniforme)**.** *Soit X une v.a. uniforme sur $[0,1]$. On définit $Y = \min(X, 1-X)$ et $Z = \max(X, 1-X)$. Trouver les lois de Y et Z. Calculer $\mathbb{E}[YZ]$.*

Exercice 4. *Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \dfrac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{(\ln 2)(1+x)}$. Montrer que $Y := \dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$ a même loi que X, où $[x]$ désigne la partie entière de x.*

Exercice 5. *Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.*

1. *On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.*
2. *On suppose que X et Y ont la même loi.*
   (a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.*
   (b) *Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.*

2 Inégalités

Exercice 6.
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}(X) = 0$) et $a > 0$.

1. *Montrer que $a \leq \mathbb{E}\left((a-X)\mathbf{1}_{\{X<a\}}\right) \leq \sqrt{\mathbb{P}(X<a)} \times \sqrt{\mathrm{Var}(X) + a^2}$.*
2. *En déduire que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)+a^2}$ et comparer avec la majoration obtenue par l'inégalité de Bienaymé Chebychev.*

Exercice 7. *(Inégalité de Paley-Zygmund) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.*

1. *Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\mathbb{E}[X] + X\mathbf{1}_{\{X>\lambda\mathbb{E}[X]\}}$.*
2. *On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a*

$$\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}[X]) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

3 Loi jointe-loi marginale-vecteurs aléatoires

Exercice 8 (Lois jointes, lois marginales et lois conditionnelles)**.** *Soit* (X, Y) *et* (X', Y') *des couples de variables aléatoires de densités*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x, y) \quad et \quad f_{(X',Y')}(x', y') = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x', y').$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien de densités.*
2. *Montrer que* (X, Y) *et* (X', Y') *ne suivent pas la même loi.*
3. *Montrer que* (X, Y) *et* (X', Y') *ont les mêmes lois marginales, c'est-à-dire que* X *et* X' *sont de même loi, et que* Y *et* Y' *sont de même loi (en fait* X, X', Y, Y' *sont de même loi !).*

Exercice 9. *Soit* (X_1, X_2, X_3) *un vecteur aléatoire centré de matrice de variance covariance*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1. *Calculer la variance de* $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$ *pour* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2. *En déduire que* X_3 *est combinaison linéaire de* X_1 *et* X_2 *p.s.*
3. *Plus généralement, pour un vecteur aléatoire* Y *de matrice de variance covariance* Γ, *donner une condition nécessaire et suffisante sur* Γ *pour que l'une des composantes de* Y *soit fonction affine des autres composantes de* Y *p.s.*
4. *Soit maintenant* Z *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. *Supposons que* Z *a une densité* f *par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$. *Soit* $x \in \mathbb{R}^d$ *un vecteur non-nul. Montrer qu'alors la v.a.* $U = x^t Z$ *a une densité sur* $\mathbb{R}$.
5. *Si* Y *est un vecteur aléatoire de matrice de variance covariance non-inversible, peut-il avoir une densité ? Le vecteur* (X_1, X_2, X_3) *a-t-il une densité ?*

Exercice 10. *Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *dont la loi a pour densité*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbf{1}_{x,y \geq 0}.$$

1. *Vérifier que* $f_{(X,Y)}$ *est bien une densité.*
2. *Déterminer les lois de* X *et de* Y.

Exercice 11. *On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.*

1. *Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?*
2. *Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ?*