PC 4 : Vecteurs aléatoires à densité - lois conditionnelles

Exercice 1 (Couples de variables aléatoires, densité et indépendance)**.**

1. *Déterminer la constante c pour que la fonction* $f(x,y) = c(x^2+y^2)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ *soit une densité sur* $\mathbb{R}^2$*. Si* (X,Y) *est un couple qui suit cette densité, déterminer ses lois marginales, ainsi que la covariance de* X *et* Y*. Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
2. *Soit* (X,Y) *un couple de v.a.r. de loi uniforme sur le disque* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$*. Montrer que les v.a.r* X *et* Y *ont même loi, et calculer leur densité. Sont-elles indépendantes ?*
3. *Soit* (X,Y) *un vecteur aléatoire à densité. Montrer que* $\mathbb{P}(X=Y)=0$*. Si* X *est une v.a.r, le vecteur* (X,X) *a-t-il une densité ?*

Exercice 2. *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires réelles à densité sur* $\mathbb{R}^2$ *tel que :*

(i) X *suit une loi* $\Gamma(2,\lambda)$ *(de densité* $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$*),*

(ii) la loi conditionnelle de Y *sachant* X *est la loi uniforme sur le segment* $[0,X]$ *(ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de* Y *sachant que* $X=x$ *est* $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{\{0<y<x\}}$*).*

1. *Déterminer la densité de* (X,Y) *ainsi que la loi de* Y*.*
2. *Calculer la densité conditionnelle de* X *sachant* Y*.*
3. *Calculer les quantités suivantes :*
   (a) $\mathbb{E}[XY]$ *(on pourra utiliser le fait que* $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{6}{\lambda^2}$*),*
   (b) $\mathbb{E}[Y|X]$,
   (c) $\mathbb{E}[X|Y]$,
   (d) $\mathbb{E}[X+XY|Y]$,
   (e) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$.

Exercice 3. *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires réelles à densité sur* $\mathbb{R}^2$*. On suppose que* X *et* Y *sont indépendantes.*

1. *Montrer que*
$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X].$$
2. *Plus généralement, montrer que* $\mathbb{E}[h(X,Y)|X] = \Phi(X)$*, avec*
$$\Phi(x) = \mathbb{E}[h(x,Y)].$$

Exercice 4 (Lois uniformes)**.**

1. *Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires réelles. Montrer que* (X, Y) *suit la loi uniforme sur le carré* $[0, 1]^2$ *si et seulement si* X *et* Y *sont indépendantes et de loi uniforme sur* $[0, 1]$ *;*
2. *On coupe un bâton au hasard en trois morceaux en utilisant deux v.a. indépendantes et uniformes sur* $[0, 1]$ *pour déterminer les points de coupe. Vérifier que les longueurs des trois morceaux ainsi obtenus sont des v.a. de même loi. Sont-elles indépendantes ? Quelle est la probabilité de pouvoir fabriquer un triangle avec ces trois morceaux ?*
3. *Deux amis se donnent rendez vous entre 12h et 13h, et arrivent indépendamment uniformément entre ces deux horaires. Calculer le temps moyen d'attente du premier arrivé.*

Exercice 5. *Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure ou égale à* s *euros. On suppose que les offres* $(X_1, X_2, \ldots)$ *sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable aléatoire* X*.*

1. *Soit* $N \geq 1$ *le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison. Quelle est la loi de* N *?*
2. *Déterminer la loi du prix de vente* X_N *de la maison, et montrer que le prix de vente est indépendant de* N*.*

Exercice 6.

1. *On considère une fonction* $\tilde{g}$*, positive, et intégrable sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que l'algorithme*
   — *Tirer* X *suivant la densité* $a\tilde{g}$*, où* a *est une constante de renormalisation*
   — *Tirer* U *suivant une loi uniforme sur* $[0, \tilde{g}(X)]$
   permet de tirer (X, U) *suivant une loi uniforme sur l'ensemble*
   $$\mathcal{A} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ t.q. } 0 \leq u \leq \tilde{g}(x)\right\}.$$
2. *Réciproquement, si* (X, U) *suit une loi uniforme sur* $\mathcal{A}$ *quelle est la loi de* X *?*
3. *On considère maintenant deux densités* f *et* g *telles que* $f(x) \leq cg(x)$ *pour tout* x*.*
   Montrer que l'algorithme "Tirer uniformément (X, U) *sur* $\mathcal{A}$ *(avec* $\tilde{g} = cg$*) jusqu'à ce que la marginale* U *soit intérieure à* $f(X)$*" donne un vecteur* (X, U) *de loi uniforme sur*
   $$\mathcal{B} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ t.q. } 0 \leq u \leq f(x)\right\}.$$
   En déduire une interprétation graphique de l'algorithme du rejet.

Exercice 7 (Simulation de la loi Gamma)**.** *On rappelle que pour* $a, \lambda > 0$*, la densité de la loi Gamma* $\Gamma(a, \lambda)$ *est donnée par*

$$f_{\Gamma(a,\lambda)}(z) = \frac{\lambda^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{\{z>0\}}.$$

On suppose dans la suite que $a > 1$ *et on note*

$$g_a(z) = z^{a-1} e^{-z} \mathbf{1}_{\{z>0\}} \quad \textit{et} \quad \mathcal{D}_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq \sqrt{g_a\left(\frac{y}{x}\right)}\right\}.$$

1. *Calculer* $\sup_{z>0} g_a(z)$ *et* $\sup_{z>0} z^2 g_a(z)$. *En déduire que* $\mathcal{D}_a \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$, *où* $x_a = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ *et* $y_a = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.
2. *Soit* $(X, Y) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ *un couple uniformément distribué sur* $\mathcal{D}_a$, *i.e.* (X, Y) *possède la densité* $\frac{1}{|\mathcal{D}_a|} 1_{\{0 \leq y\}} 1_{\{0 \leq x \leq \sqrt{g_a(\frac{y}{x})}\}}$, *où* $|\mathcal{D}_a|$ *désigne la surface de* $\mathcal{D}_a$. *Quelle est la loi de* $W = \frac{Y}{X}$ *? En déduire que* $|\mathcal{D}_a| = \frac{\Gamma(a)}{2}$. *Conclure que* $Z = \frac{W}{\lambda} \sim \Gamma(a, \lambda)$.
3. *Comment simuler suivant les lois* $\mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ *et* $\Gamma(a, \lambda)$ *?*
4. *On vient de voir que pour simuler suivant la loi* $\Gamma(a, 1)$, *il n'y a pas besoin de connaître la constante* $\Gamma(a)$ *qui permet de normaliser* g_a *pour obtenir la densité* $f_{\Gamma(a,1)}$. *Est-ce que remplacer* g_a *par* cg_a *où* $c > 0$ *dans la méthode ci-dessus change son efficacité ?*

Exercice 8. Borne de Letac pour la méthode du rejet
Soit p *une densité de probabilité sur l'intervalle* $[0, 1]$ *suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite* $((U_i, X_i))_{i \geq 1}$ *de vecteurs aléatoires i.i.d. où les* U_i *sont uniformément réparties sur* $[0, 1]$. *Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation* $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathbb{P}((U_1, X_1) \in \mathcal{A}) > 0$ *et que la loi conditionnelle de* U_1 *sachant* $(U_1, X_1) \in \mathcal{A}$ *possède la densité* p. *On note* $N = \min\{i \geq 1 : (U_i, X_i) \in \mathcal{A}\}$ *et* B *un sous-ensemble borélien de* $[0, 1]$.

1. *Quelle est la loi de* N *? Et celle de* U_N *?*
2. *Montrer que pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U_n \in B, N \geq n) = \mathbb{P}(U_n \in B)\mathbb{P}(N \geq n)$.
3. *En déduire que* $\mathbb{P}(U_N \in B) \leq \mathbb{P}(U_1 \in B)\mathbb{E}(N)$.
4. *Conclure que* $\mathbb{E}(N) \geq \sup\{\rho \geq 0 : \int_0^1 1_{\{p(u) \geq \rho\}} du > 0\}$.