Aléatoire – MAP 361 | **Groupes 12 & 25**
Ecole Polytechnique | **Salle PC 41**
Lundi 20 mai 2019 | **Tabea Rebafka**

PC 5 – Calcul de lois & Vecteurs gaussiens

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites.

1. Déterminer la loi de $\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$.
2. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 2. (Pale 2013) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\alpha + 1/2, \lambda)$, avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On pose $(V, W) = (\sqrt{XY}, \sqrt{Y})$. Déterminer la loi de (V, W).

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}, \qquad \text{avec} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z} dz.$$

Exercice 3.

1. Soit (X, Y) un couple de variables indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$. Déterminer la loi jointe du vecteur aléatoire (U, V) où $U = X/Y$ et $V = X+Y$.
2. Soient Z et S des variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0, 1)$ et χ^2_n. On appelle *loi de Student* à n degrés de liberté la loi de la variable $T = \frac{Z}{\sqrt{S/n}}$. Montrer que la densité de T est donnée sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Exercice 4. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
2. Quelle est la loi de (X_1, X_2) ?
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(X_2, X_2 + aX_1)$ est un vecteur gaussien.
4. En choisissant a de sorte que X_2 et $X_2 + aX_1$ soient indépendants, calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$.

Exercice 5. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la variable aléatoire $(X - Y)^2 + (X - Z)^2 + (Y - Z)^2$ est indépendante de la variable aléatoire $X + Y + Z$.

Exercice 6 (Théorème de Cochran)**.** Soit Z un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ d'espérance nulle et de matrice de covariance I_n où I_n est la matrice identité de dimension n. Supposons que $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme la somme directe de J sous-espaces vectoriels orthogonaux $V_1, \cdots, V_J$ de dimensions respectives $p_1, \cdots, p_J$. On désigne par Π_{V_j} la matrice de projection orthogonale sur V_j.

1. Montrer que $\Pi_{V_1} Z, \cdots, \Pi_{V_k} Z$ sont des vecteurs aléatoires indépendants. Déterminer leurs lois.
2. Montrer que $\|\Pi_{V_j} Z\|^2$ suit la loi $\chi^2(p_j)$ pour tout $1 \leq j \leq J$.
3. Application. Soient $X_i, i = 1, \ldots, n$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On pose $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$. Déterminer la loi jointe du vecteur aléatoire $(\bar{X}_n, S_n^2)$.

Exercice 7 (Tomber dans le cercle)**.** Soit X, Y, Z trois vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi gaussienne standard. Montrer que la probabilité que Z tombe dans le cercle de diamètre $Y - X$ qui passe par X et Y vaut $1/4$.