Aléatoire – MAP 361 **Groupes 12 & 25**
Ecole Polytechnique **Salle PC 41**
Lundi 27 mai 2019 **Tabea Rebafka**

PC 6 – Convergences & Loi des grands nombres

Exercice 1 (Convergences)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.r. de loi Bernoulli $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n \to 0$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et même que $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} 0$;
2. Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ si $\sum_n p_n < \infty$;
3. Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, montrer que $\mathbb{P}(X_n \not\to 0) = 1$ si $\sum_n p_n = \infty$;
4. Montrer enfin que si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont dépendantes, alors on peut avoir $\mathbb{P}(X_n \to 0) = 1$ et $\sum_n p_n = \infty$. Indication : trouver un contre exemple du type $X_n = f_n(U)$ avec U uniforme.

Exercice 2 (Convergence p.s)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires avec, pour tout $n \geq 1$, X_n de loi exponentielle de paramètre n. Montrer que $X_n \to 0$ presque sûrement.

Exercice 3 (LGN)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\bar{x}_n)\, dx_1 \cdots dx_n$ avec $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 4 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{R}$)**.** On modélise la position d'une particule sur $\mathbb{R}$ à l'instant n par $X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1}$ où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. indépendantes de X_0, et de moyenne m. Montrer que $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ presque sûrement si $m \neq 0$.

Exercice 5 (Biais par la taille)**.** On considère une population comportant un grand nombre n de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de v.a. i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ sur $\mathbb{N}^*$, de moyenne $m := \mathbb{E}(X_1) = \sum_{k\geq 1} kp_k < \infty$ où $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$. Soit T la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que $\mathbb{P}(T = k) \approx \frac{k}{m}p_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{a; b\}$ avec $0 < a < 1 < b$ et telles que $\mathbb{E}[X_1] = 1$. On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Montrer que $Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$. La convergence a-t-elle lieu en moyenne ? La variable $Y = \sup_{n\geq 1} Y_n$ est-elle intégrable ?

Exercice 7 (Une preuve de la LFGN)**.** Dans cet exercice, on présente une preuve rapide de la loi forte des grands nombres sous une hypothèse de moment d'ordre 4 fini. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[|X_1|^4] < \infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$.

1. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$
$$\mathbb{E}[(S_n - nm)^4] \leq Kn^2.$$
2. En déduire que $\frac{S_n}{n} \to m$ presque sûrement.

Exercice 8 (Lemme de Scheffé)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives intégrables convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire X intégrable et telle que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} X$.

Exercice 9 (Modes de convergence)**.**

1. Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si et seulement si $M_n = \sup_{k\geq n} |X_k - X|$ converge vers 0 en probabilité.
2. Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 10. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, et Z et Z' deux variables aléatoires réelles.

1. On suppose que :
$$X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} Z \quad \text{et} \quad X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} Z'.$$
Montrez que $Z = Z'$ p.s.

2. On suppose que $Z = Z'$ p.s. montrez que
$$X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{p.s.}} Z \iff X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{p.s.}} Z'.$$

3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. Montrez que :
$$X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} Z \implies X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{p.s.}} Z.$$

4. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. et on pose
$$m := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) < 1\},$$
avec F_X la fonction de répartition de X_1. On suppose que $m < +\infty$. On pose pour tout $n \geq 1$,
$$M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$
Montrez que
$$M_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{p.s.}} m.$$