Aléatoire – MAP 361
Ecole Polytechnique
Lundi 3 juin 2019

Groupes 12 & 25
Salle PC 41
Tabea Rebafka

PC 7 – Convergence en loi & Théorème de la limite centrale

Exercice 1. On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ pour des v.a. (X_n) à valeurs réelles et $c \in \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \min(x, 1)$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\epsilon)]$ quand $n \to \infty$?
2. En déduire que $X_n \to c$ en probabilité quand $n \to \infty$.

Exercice 2. On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ pour des v.a. à valeurs réelles. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.
[**Remarque :** On fait généralement référence à ce résultat sous le nom de *théorème de continuité*. Comme pour les convergences p.s. et en probabilité, il suffit en fait que f soit continue en tout point de D tel que $\mathbb{P}(X \in D) = 1$.]

Exercice 3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose dans cette question que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. (**Lemme de Slutsky**) On suppose que $Y = a$ est constante. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, a)$ en loi.

   Indications. On pourra utiliser le fait $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ *et écrire*

   $$|\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X, a)| \leq |\mathbb{E}[f(X_n, a)] - \mathbb{E}[f(X, a)| + \mathbb{E}[|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a|\geq\epsilon\}}] + \mathbb{E}[|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a|<\epsilon\}}].$$

   On admettra également que si Z_n est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, alors Z_n converge en loi vers Z si et seulement si pour toute fonction lipschitzienne bornée $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[f(Z_n)] \to \mathbb{E}[f(Z)]$.
3. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?

Exercice 4. Soit X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = 0) = p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - p_n$.

1. Donner une CNS sur (p_n) pour que, quelle que soit la fonction f continue à support compact, $\mathbb{E}[f(X_n)]$ converge dans $\mathbb{R}$ quand $n \to \infty$.
2. Donner une CNS sur (p_n) pour que X_n converge en loi et donner sa limite.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes telles que $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ et $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$. On suppose que $\mu_n \to \mu$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, montrer que X_n converge en loi et déterminer la limite.

Exercice 6. Soient $(X_n)_n$ des v.a. i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_{X_1} et en déduire la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
2. En utilisant le théorème limite central déterminer la limite de la suite

$$u_n = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 7. Soit $\{X_i\}_{i \geq 0}$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre θ.

1. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$, où $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.
2. Montrer que $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \to \theta(1-\theta)$ en probabilité.
3. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)^2 \to 0$ en probabilité.
4. Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - \theta(1-\theta)\right)$.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. En notant $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, montrer que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n (X_k - m)$.

1. Rappeler la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que la suite $(Z_{2n} - Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.
   Indication. On pourra écrire $Z_{2n} - Z_n = aZ_n + bZ_n'$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ choisis de sorte Z_n et Z_n' soient indépendantes et de même loi.
3. En déduire que si $\sigma^2 > 0$ alors la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.