Aléatoire – MAP 361 **Groupes 12 & 25**
Ecole Polytechnique **Amphi Monge**
Lundi 24 juin 2019 **Tabea Rebafka**

PC 9 – Intervalles de confiance

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. d'une loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$f(x;\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi\theta}} \exp(-x^2/\theta) \mathbb{1}_{\{x>0\}},$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On observe une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$. On désigne par α un réel donné dans $[0, 1]$ et on note $\hat{m}_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ le moment empirique d'ordre 2.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
2. Déterminer la loi de la variable $X_1/\sqrt{\theta}$. Déduire de ce résultat que la loi de la statistique $\hat{\theta}/\theta$ ne dépend pas de θ, puis donner la loi de $n\hat{\theta}/\theta$.
3. Trouver des réels a et b tels que $[\hat{\theta}/a, \hat{\theta}/b]$ soit un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour θ.

Exercice 2 (Modèle de Poisson)**.** Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. Notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

1. Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ, qu'il est consistant et asymptotiquement normal.
2. Montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais de λ et qu'il est consistant.
3. En utilisant le lemme de Slutsky, montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est asymptotiquement normal. (On utilisera, sans le démontrer, que $\mathbb{E}_\lambda[(X_1 - \lambda)^4] = \lambda + 3\lambda^2$).
4. Quel estimateur de λ est à privilégier, $\bar{X}_n$ ou $\hat{\sigma}_n^2$?
5. En partant de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$, montrer qu'on peut obtenir les résultats de convergence suivants
   (i) $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$
   (ii) $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}_n - \lambda}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$
   (iii) $\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ pour un choix approprié de la fonction g à préciser.
6. Déterminer les intervalles de confiances de niveau asymptotique $1 - \alpha$ correspondants. Lequel est le meilleur ?

Exercice 3. Soit la variable aléatoire

$$Y = \mathbb{1}\{\theta > \xi\},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et ξ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On dispose d'un échantillon $Y_1, \ldots, Y_n$ des réalisations i.i.d. de Y.

1. Soit Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\hat{\theta}_n = \Phi^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i)$ est l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ. Cet estimateur est-il consistant ?
2. Chercher la loi limite de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ quand $n \to \infty$.
3. Soit $0 < \alpha < 1$. Proposer un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$.

Exercice 4. (Loi normale) On observe $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe $\theta > 0$ tel que cette loi admet la densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right).$$

Indication : $F^{-1}_{\chi^2_{10}}(0.025) \simeq 3.25$, $F^{-1}_{\chi^2_{10}}(0.975) \simeq 20.48$, $F^{-1}_{\chi^2_{10}}(0.95) \simeq 18.31$, $F_{\chi^2_{10}}(40/3) \simeq 0.79$ et $\Phi^{-1}(0.975) \simeq 2$.

1. On veut estimer $\tau = \theta^2$. Proposer un estimateur $\hat{\tau}$ de τ et étudier sa loi.
2. Construire un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ de la forme $[S_1, S_2]$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau < S_1) = \mathbb{P}(\tau > S_2) = \alpha/2.$$

3. Donner la loi asymptotique de $\hat{\tau}$ et en dàĺduire un intervalle de confiance asymptotique.
4. Lorsque $n = 10$, $\hat{\tau} = 2$ et $\alpha = 0.05$, comparer l'intervalle de confiance obtenu à la question 2 (non asymptotique) avec celui obtenu à la question 3 (asymptotique).