Tabea Rebafka

Feuille d'exercice N° 1

Statistique descriptive & Estimation ponctuelle

Exercice 1. *Représentation graphique*

Les graphiques de la Figure 1 représentent quatre échantillons i.i.d. de taille 100. Pour chaque graphique

(i) déduire des caractéristiques de la loi de l'échantillon,

(ii) proposer une loi (ou famille de lois) qui est susceptible d'avoir généré les données.

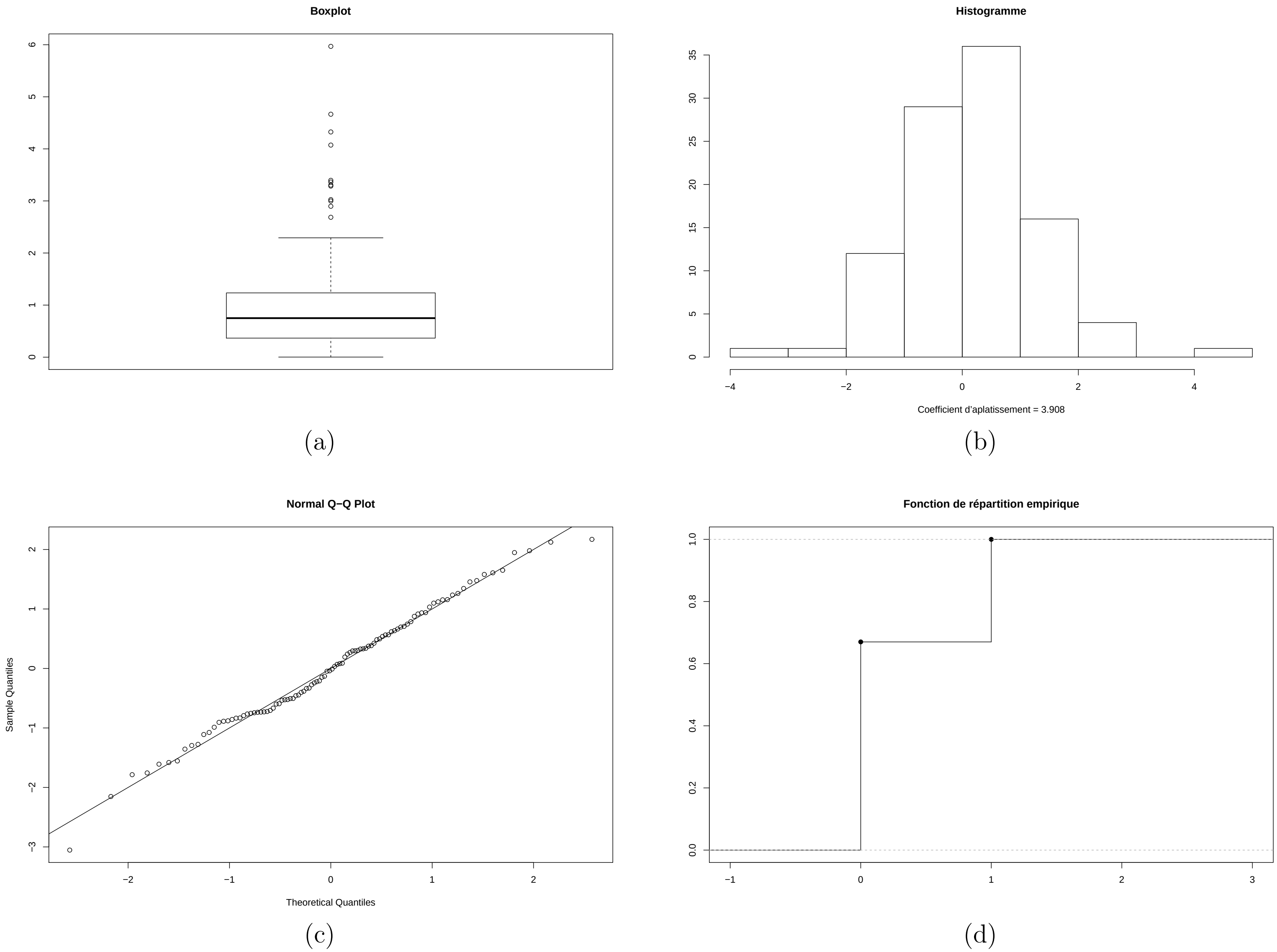
Exercice 2. *EMM et EMV*
On observe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que l'on considère comme la réalisation du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, où les X_i sont des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}_{\theta_0}$. Calculer l'estimateur par la méthode des moments et l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_0 (s'ils existent) pour les modèles statistiques $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ suivants.

1. $\mathbb{P}_\theta$ est la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.
2. $\mathbb{P}_\theta$ est la loi géométrique $\text{Geo}(\theta)$ de paramètre $0 < \theta < 1$ avec des probabilités

$$\mathbb{P}_\theta(X = \ell) = \theta(1-\theta)^\ell \ , \qquad \text{pour } \ell = 0, 1, \dots .$$

   On utilisera que $\sum_{k=0}^\infty k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ pour $0 < a < 1$.

3. $\mathbb{P}_\theta$ est la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ et $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
4. $\mathbb{P}_\theta$ est la loi de densité $f_\theta(x) = \mathrm{e}^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$ de paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 1 – Représentations graphiques de quatre jeux de données.

Exercice 3. *Loi de Bernoulli*
Supposons que les observations $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X de loi Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ inconnu.

1. (a) Estimer p par la méthode des moments et du maximum de vraisemblance.
   (b) Calculer le risque quadratique de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_n$ de p. Montrer que $\hat{p}_n$ est consistant et déterminer sa loi asymptotique.
2. (a) Notons $v = p(1-p)$ la variance de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. La statistique $\hat{v}_n = \bar{x}_n(1-\bar{x}_n)$ est un estimateur de v. Par quelle méthode a-t-on obtenu cet estimateur ? Montrer que $\hat{v}_n$ est consistant pour v.
   (b) À partir de $\hat{v}_n$, proposer un estimateur sans biais $\tilde{v}_n$ de v.
   (c) Déterminer la loi asymptotique de $\tilde{v}_n$.

Exercice 4. *Loi double exponentielle*

1. Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un échantillon i.i.d. de *loi double exponentielle* ou *loi de Laplace*, dont la densité est donnée par
$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}} , \quad x \in \mathbb{R} ,$$
avec $\theta \in \Theta =]0, +\infty[$.
   (a) Tracer la densité f_θ pour différentes valeurs de θ.
   (b) Calculer l'EMV de θ. Est-il unique et presque sûrement bien défini ? Est-il consistant et asymptotiquement normal ?
2. On considère maintenant un échantillon i.i.d. $\mathbf{x}$ d'une loi double exponentielle avec un paramètre de position μ. Plus précisément, la densité s'écrit
$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-|x-\mu|} , \quad x \in \mathbb{R} ,$$
où $\mu \in \mathbb{R} = \Theta$.
   2.1 Tracer la densité f_μ pour différentes valeurs de μ.
   2.2 Calculer l'EMV de θ. Est-il unique et presque sûrement bien défini ? Que dire de la consistance et de la loi limite de l'estimateur ?