Tabea Rebafka


# Correction de la Feuille N° 3

**Exercice 1.** *Loi exponentielle*

1. On vérifie pour $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ que

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda} < \infty\ .$$

On obtient donc par la loi forte des grands nombres que $\bar{X}_n \longrightarrow \mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ *p.s.* La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 1/\lambda$. On introduit la fonction $g(x) = 1/x$ qui est continue sur $(0,\infty)$. Or, $\bar{X}_n > 0$ *p.s.* et $\lambda > 0$. Alors, par le théorème de continuité, $1/\bar{X}_n = g(\bar{X}_n) \xrightarrow{P} g(1/\lambda) = \lambda$.

**Rappel :** La fonction Gamma $\Gamma$ est définie pour tout $t > 0$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\ .$$

Elle vérifie $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. En plus, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour tout $t > 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On vérifie pour $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ que

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty u^2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2} = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} < \infty\ .$$

Le théorème central limite implique

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) = \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbf{Var}(X)) = \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right)\ .$$

La fonction $g(x) = 1/x$ est continûment dérivable sur $(0,\infty)$ avec $g'(x) = -1/x^2$ et en particulier $g'(1/\lambda) = -\lambda^2 \neq 0$. On obtient par la delta-méthode :

$$\sqrt{n}(1/\bar{X}_n - \lambda) = \sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(1/\lambda)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(1/\lambda))^2\mathbf{Var}(X)) = \mathcal{N}\left(0, \lambda^2\right)\ .$$

3. De la question précédente, on déduit que

$$\sqrt{n}\lambda(\bar{X}_n - 1/\lambda) = \sqrt{n}(\lambda\bar{X}_n - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, 1\right)\ .$$

Notons par $q_\gamma^{\mathrm{N}}$ le quantile d'ordre $\gamma$ de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, i.e. $\mathbb{P}(Z \le q_\gamma^{\mathrm{N}}) = \gamma$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $\gamma_1 < \gamma_2$, on a par la convergence en loi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(\lambda\bar{X}_n - 1) \in [q_{\gamma_1}^{\mathrm{N}}, q_{\gamma_2}^{\mathrm{N}}]\right) = \mathbb{P}(Z \in [q_{\gamma_1}^{\mathrm{N}}, q_{\gamma_2}^{\mathrm{N}}]) = \gamma_2 - \gamma_1\ .$$

De plus, on a

$$\left\{\sqrt{n}(\lambda\bar{X}_n - 1) \in [q_{\gamma_1}^{\mathrm{N}}, q_{\gamma_2}^{\mathrm{N}}]\right\} = \left\{\lambda \in \left[\frac{q_{\gamma_1}^{\mathrm{N}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}\bar{X}_n}, \frac{q_{\gamma_2}^{\mathrm{N}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}\bar{X}_n}\right]\right\}\ .$$

Donc, pour tout $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ tels que $\gamma_2 - \gamma_1 = 1-\alpha$, l'intervalle $\left[\frac{q^{\mathrm{N}}_{\gamma_1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}\bar{X}_n}, \frac{q^{\mathrm{N}}_{\gamma_2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}\bar{X}_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour $\lambda$ de niveau $1-\alpha$.
En général, on cherche des intervalles courts. Il est donc optimal de choisir les quantiles $q^{\mathrm{N}}_{\gamma_1}$ et $q^{\mathrm{N}}_{\gamma_2}$ tels que la différence $q^{\mathrm{N}}_{\gamma_2} - q^{\mathrm{N}}_{\gamma_1}$ soit minimale (sous la contrainte $\gamma_2 - \gamma_1 = 1-\alpha$). Comme la loi normale standard est centrée et unimodale, ce minimum est atteint pour $\gamma_1 = \alpha/2$ et $\gamma_2 = 1-\alpha/2$.

**Exercice 2.** *Loi de Poisson*

1. On rappelle, pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda\ ,$$

et

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda\mathbb{E}[X] + \lambda = \lambda^2+\lambda\ .$$

Donc, $\mathbf{Var}(X) = \lambda > 0$. On constate que l'estimateur $\bar{X}_n$ est sans biais, car $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \lambda$. Il est consistant en vertu de la LFGN : $\bar{X}_n \longrightarrow \mathbb{E}[X_1] = \lambda$ *p.s.*. Enfin, $\bar{X}_n$ est asymptotiquement normal par le TCL :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbf{Var}(X_1)) = \mathcal{N}(0,\lambda)\ .$$

2. (i) En utilisant la question 1 et le lemme de Slutsky, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n-\lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}}\right) = \underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}_{\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)} \underbrace{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\bar{X}_n}}}_{\xrightarrow{P}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mathbb{E}[X_1]}}=1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)\ .$$

   (ii) D'après la delta méthode, pour toute fonction $g$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\lambda))^2\mathbf{Var}(X))\ .$$

   Nous cherchons donc une fonction $g$ telle que la variance limite vaut 1. Ce qui veut dire

$$(g'(\lambda))^2\mathbf{Var}(X) = 1 \Leftrightarrow (g'(\lambda))^2 = \frac{1}{\lambda}\ .$$

   On peut alors choisir $g(u) = 2\sqrt{u}$ avec dérivée $g'(u) = 1/\sqrt{u}$ et on obtient

$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\bar{X}_n} - 2\sqrt{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\lambda\right) = \mathcal{N}(0,1)\ .$$

3. Notons par $\zeta$ une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Notons par $q^N_\gamma$ le quantile d'ordre $\gamma \in [0,1]$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant le résultat de la question e) (i), on obtient

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}(\zeta \in [q^N_{\alpha/2}, q^N_{1-\alpha/2}]) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n-\lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}}\right) \in [q^N_{\alpha/2}, q^N_{1-\alpha/2}]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{1-\alpha/2}, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{\alpha/2}\right]\right)\ .
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{I}_1 = \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{1-\alpha/2}, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{\alpha/2}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour $\lambda$ de niveau $1-\alpha$. Pour les cas (ii) on obtient

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}(\zeta \in [q^N_{\alpha/2}, q^N_{1-\alpha/2}]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\sqrt{n}\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}\right) \in [q^N_{\alpha/2}, q^N_{1-\alpha/2}]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{\lambda} \in \left[\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{1-\alpha/2}, \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{\alpha/2}\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{1-\alpha/2}\right)^2, \left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{\alpha/2}\right)^2\right]\right) .
\end{aligned}$$

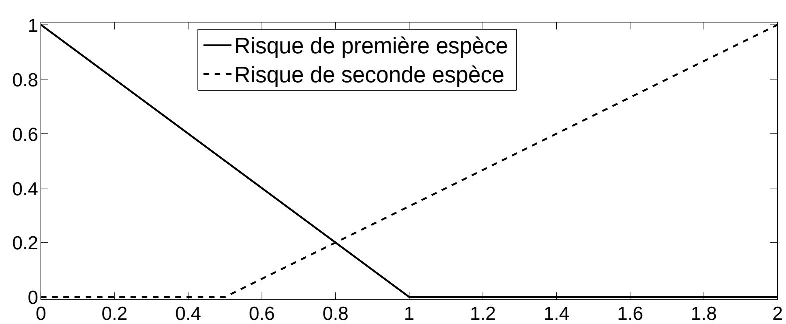
Donc, $\mathcal{I}_2 = \left[\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{1-\alpha/2}\right)^2, \left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{\alpha/2}\right)^2\right]$ est un troisième intervalle de confiance asymptotique.
Pour comparer ces intervalles de confiance asymptotiques, on compare les longueurs d'intervalles. En utilisant $q_{\alpha/2} = -q_{1-\alpha/2}$, on obtient les longueurs suivantes

$$\begin{aligned}
\ell(\mathcal{I}_1) &= \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{\alpha/2} - \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{1-\alpha/2} = 2\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{1-\alpha/2} \\
\ell(\mathcal{I}_2) &= \left(\sqrt{\bar{X}_n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{1-\alpha/2}\right)^2 - \left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}q^N_{1-\alpha/2}\right)^2 \\
&= 2\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}q^N_{1-\alpha/2}
\end{aligned}$$

Les intervalles $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ ont la même longueur. On ne sait alors pas quel intervalles est à privilégier.

**Exercice 3.** *Premier exemple de test*

1. Vu que les intervalles $[0,1]$ et $[2,3]$ sont disjoints, le test le plus naturel consiste à accepter $H_0$ si la valeur observée $X$ appartient à $[0,1]$ et accepter $H_1$ dans le cas contraire.
   L'erreur de première espèce est alors la probabilité de rejeter $H_0$ alors qu'elle était vraie :
   $$\mathbb{P}_{U[0,1]}(X \notin [0,1]) = 0 .$$
   De la même façon, on vérifie que l'erreur de second espèce est également nulle. C'est donc un test idéal, car la probabilité de commettre une erreur est nulle.
2. Maintenant les intervalles de support des deux lois en question ne sont plus disjoints. On obtient pour le risque de première espèce
   $$\mathbb{P}_{U[0,1]}(R) = \mathbb{P}_{U[0,1]}(X > c) = \begin{cases} 1-c & , \text{ si } c \in [0,1] \\ 0 & , \text{ si } c > 1 , \end{cases}$$
   et pour le risque de second espèce
   $$\mathbb{P}_{U[0.5,2]}(R^c) = \mathbb{P}_{U[0.5,2]}(X \le c) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } c \in [0, 0.5] \\ \frac{2}{3}\left(c - \frac{1}{2}\right) & , \text{ si } c \in [0.5, 2] . \end{cases}$$
   A l'opposé de la question précédente, ce test n'est pas idéal quelque soit la valeur de $c$, car on n'arrive pas à minimiser les deux risque simultanément.



**Exercice 4.** *Test sur la moyenne*

1. On veut tester des hypothèses portant sur la moyenne $\mu$ de la loi normale. On sait qu'un bon estimateur de $\mu$ est donné par la moyenne empirique $\bar{X}$. Or, puisque $m < 0$, il est naturel de rejeter $H_0$ lorsque cet estimateur de $\mu$ prend des valeurs suffisamment petit. Autrement dit, il est naturel de considérer la région de critique
$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : \bar{x} \le c\} ,$$
pour une constante $c$ (que l'on choisit en sorte que le test soit de niveau $\alpha$).

2. La puissance de ce test est définie par
$$\pi_n(m) = \mathbb{P}_m(R_c) = \mathbb{P}_m(\bar{X} \le n^{-1/2} q_\alpha^N) .$$
Sous $H_1$ on a $\bar{X} \sim \mathcal{N}(m, \frac{1}{n})$, et donc $\sqrt{n}(\bar{X} - m) \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc
$$\pi_n(m) = \mathbb{P}_m\left(\bar{X} \le n^{-1/2} q_\alpha^N\right) = \mathbb{P}_m\left(\sqrt{n}(\bar{X} - m) \le q_\alpha^N - \sqrt{n} m\right) = \Phi(q_\alpha^N - \sqrt{n} m) .$$
On remarque que la fonction de puissance $m \mapsto \pi_n(m)$ est décroissante en $m$ (puisque $\Phi$ est croissante). Le test est alors plus puissant, quand $m$ est loin de 0 (la moyenne de l'hypothèse nulle). Autrement dit, plus les moyennes qu'on compare sont séparées, plus le test est puissant.
On a évidemment pour tout $m < 0$
$$\lim_{n \to \infty} \pi_n(m) = \lim_{n \to \infty} \Phi(q_\alpha^N - \sqrt{n} m) = \lim_{t \to \infty} \Phi(t) = 1 .$$
On en déduit que le test est consistant pour tout $m < 0$.
De plus, on a $\pi_n(0) = \alpha$ pour tout $n$. On voit alors que $(\pi_n)_n$ converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{]-\infty,0[} + \alpha\delta_0$. (La fonction limite n'étant pas continue alors que les $\pi_n$ le sont, on en déduit que la convergence n'est pas uniforme (théorème de Dini).)

3. Posons $\tilde{\pi}_n(\gamma) = \pi_n(-Cn^{-\gamma})$. En substituant $m$ par $-Cn^{-\gamma}$ dans l'expression de la puissance de la question précédente, on obtient
$$\tilde{\pi}_n(\gamma) = \Phi(q_\alpha^N + Cn^{1/2-\gamma}) .$$
Si $\gamma = 1/2$, on a $\tilde{\pi}_n(\gamma) = \Phi(q_\alpha^N + C)$ pour tout $n$. Si $\gamma > 1/2$, alors $n^{1/2-\gamma} \to 0$ et donc $\tilde{\pi}_n(\gamma) \to \Phi(q_\alpha^N) = \alpha$. Si $\gamma < 1/2$, alors $n^{1/2-\gamma} \to +\infty$ et donc $\tilde{\pi}_n(\gamma) \to \Phi(q_\alpha^N + \infty) = 1$. En conclusion,
$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{\pi}_n(\gamma) = \begin{cases} \alpha & , \text{ si } \gamma > 1/2 \\ \Phi(q_\alpha^N + C) & , \text{ si } \gamma = 1/2 \\ 1 & , \text{ si } \gamma < 1/2 . \end{cases}$$
On voit que pour $\gamma \ge 1/2$ ce test n'est pas consistant ($\tilde{\pi}_n \nrightarrow 1$). Ceci implique qu'on ne peut pas distinguer l'alternative de l'hypothèse si elles sont "trop proches".

**Exercice 5.** *Contrôle de qualité au supermarché*

(1) On a déjà vu que dans le cas d'un échantillon de loi normale, $\bar{X}$ est un bon estimateur de la moyenne $\mu$. Comme $\bar{X}$ est proche de $\mu$ (pour $n$ suffisamment grand), on décide de rejeter l'hypothèse $H_0 : \mu = 500$ si la moyenne empirique $\bar{X}$ est significativement différente de 500. Cela nous conduit à la région de rejet
$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : |\bar{x} - 500| > c\} .$$
Afin d'évaluer le risque de première espèce de ce test, il faut considérer la loi de la statistique $|\bar{X} - 500|$. En effet, $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$. Le souci est que le paramètre $\sigma^2$ est inconnue. On veut alors le remplacer par un estimateur de la variance, notamment par $s^2$. Or, dans le cas gaussien, on sait que
$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1) , \quad V = \frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{et} \quad \bar{X} \perp\!\!\!\perp s^2 .$$

Il en résulte que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{s} \sim t_{n-1} \; , \tag{1}$$

où $t_{n-1}$ désigne la loi de Student à $n-1=15$ degrés de liberté.
On obtient alors

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sup_{\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu=500,\sigma}(R) = \sup_{\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu=500,\sigma}\left(|\bar{X}_n - 500| > c\right) && (2)\\
&= \sup_{\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu=500,\sigma}\left(\left|\frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}_n-500)}{s}\right| > \frac{\sqrt{n-1}c}{s}\right) && (3)\\
&= \sup_{\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu=500,\sigma}\left(|T| > \frac{\sqrt{n-1}c}{s}\right) \qquad \text{où } T \sim t_{n-1} && (4)\\
&= \sup_{\sigma>0} 2\mathbb{P}_{\mu=500,\sigma}\left(T > \frac{\sqrt{n-1}c}{s}\right) \qquad \text{par symétrie de la loi } t_{n-1} && (5)\\
&= \sup_{\sigma>0}\left[1 - 2F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}c}{s}\right)\right] && (6)\\
&= 1 - 2F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}c}{s}\right) \; . && (7)
\end{aligned}$$

Notons $q_{1-\alpha/2}(t_{n-1})$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté. On en déduit la constante $c$ d'un test de taille $\alpha$ :

$$\alpha = 1 - 2F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}c}{s}\right) \Leftrightarrow q_{1-\alpha/2}(t_{n-1}) = \frac{\sqrt{n-1}c}{s} \Leftrightarrow c = \frac{s q_{1-\alpha/2}(t_{n-1})}{\sqrt{n-1}} \; .$$

Pour notre échantillon on a $n=16$, $\bar{X}=493.29$ et $s=12.82$. Le seuil critique $\alpha^*$ est la plus petite valeur de $\alpha$ telle qu'on rejette $H_0$, plus précisément,

$$\begin{aligned}
(x_1,\dots,x_n) \in R \iff |\bar{x}-500| > \frac{s q_{1-\alpha/2}(t_{n-1})}{\sqrt{n-1}} &\iff \frac{\sqrt{n-1}|\bar{x}-500|}{s} > q_{1-\alpha/2} && (8)\\
&\iff F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}|\bar{x}-500|}{s}\right) > 1-\alpha/2 && (9)\\
&\iff \alpha > 2\left(1 - F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}|\bar{x}-500|}{s}\right)\right) \; . && (10)
\end{aligned}$$

On en déduit le seuil critique

$$\alpha^* = 2\left(1 - F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}|\bar{x}-500|}{s}\right)\right) = 2(1 - F_{t_{15}}(2.03)) \approx 0.06 \; .$$

En conclusion, si l'on s'autorise un risque d'erreur de première espèce égal à 5%, la différence constatée entre $\bar{X}=493.29$ et $\mu_0=500$ ne permet pas d'affirmer que l'hypothèse $\mu=\mu_0$ est fausse. On conserve alors l'hypothèse $H_0$ (de justesse).

(2) La région de rejet pour ce test est

$$R = \{(x_1,\dots,x_n) : \bar{x} < c\} \; .$$

On cherche $c$ tel que

$$\alpha = \sup_{\mu\geq 500,\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu,\sigma}(R) = \sup_{\mu\geq 500,\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu,\sigma}\left(\bar{X} < c\right) = \sup_{\mu\geq 500,\sigma>0} \mathbb{P}_{\mu,\sigma}\left(T < \frac{\sqrt{n-1}(c-\mu)}{s}\right) \; ,$$

où $T \sim t_{n-1}$ en vertu de (1). On obtient alors

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sup_{\mu \geq 500, \sigma > 0} F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}(c-\mu)}{s}\right) \\
&= \sup_{\mu \geq 500} F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}(c-\mu)}{s}\right) \qquad \text{ne dépend pas de } \sigma \\
&= F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}(c-500)}{s}\right) \qquad \text{sup atteint en } \mu = 500 \text{ car décroissant en } \mu \; .
\end{aligned}$$

La constante $c$ vérifie alors

$$\frac{\sqrt{n-1}(c-500)}{s} = q_\alpha(t_{n-1}) \Leftrightarrow c = 500 + \frac{q_\alpha(t_{n-1})s}{\sqrt{n-1}} \; .$$

Le seuil critique $\alpha^*$ est la plus petite valeur de $\alpha$ telle que

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n) \in R &\Longleftrightarrow \bar{x} < 500 + \frac{q_\alpha(t_{n-1})s}{\sqrt{n-1}} \\
&\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n-1}(\bar{x}-500)}{s} < q_\alpha(t_{n-1}) \\
&\Longleftrightarrow F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}(\bar{x}-500)}{s}\right) < \alpha \; .
\end{aligned}$$

On en déduit le seuil critique

$$\alpha^* = F_{t_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n-1}(\bar{x}-500)}{s}\right) = F_{t_{15}}\left(-2.02\right) \approx 0.03 \; ,$$

quand $n = 16$, $\bar{x} = 493.29$ et $s = 12.82$. Le seuil critique $\alpha^*$ étant inférieur au niveau de 5%, on rejette l'hypothèse $H_0$.
La conclusion du test de la Question 1) était de conserver $H_0 : \mu = 500$, et celui-ci conclut $\mu < 500$. Souvenons-nous que conserver une hypothèse nulle signifie juste que nous ne n'avons pas pu la rejeter (au vu des données).