Tabea Rebafka

Feuille d'exercice N° 3

Intervalles de confiance & tests

Exercice 1. *Loi exponentielle*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ ayant comme densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que $1/\bar{X}_n$ tend en probabilité vers λ.
2. Donner la loi limite de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda)$. Puis celle de $\sqrt{n}(1/\bar{X}_n - \lambda)$.
3. Donner un *intervalle de confiance asymptotique* $[\hat{a}_n, \hat{b}_n]$ pour λ de niveau $1-\alpha$, i.e. $\hat{a}_n$ et $\hat{b}_n$ vérifient
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda \in [\hat{a}_n, \hat{b}_n]\right) = 1 - \alpha \ .$$

Exercice 2. *Loi de Poisson*
Soit X_n une suite de variables i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais, consistant et asymptotiquement normal.
2. En partant de
$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \ ,$$
et en utilisant le lemme de Slutsky, montrer qu'on peut obtenir les convergences suivantes faisant disparaître le paramètre λ
   (i) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
   (ii) $\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ avec un choix approprié de la fonction g.
3. Déterminer les intervalles de confiances correspondants. Quel est le meilleur ?

Exercice 3. *Premier exemple de test*

1. On observe une réalisation x, de loi $U[0,1]$ sous H_0, ou $U[2,3]$ sous H_1. Proposer un test de l'hypothèse H_0 contre l'alternative H_1 et calculer ses risques de première et seconde espèce.
2. Supposons maintenant qu'on observe une réalisation x, de loi $U[0,1]$ sous H_0, ou $U[0.5,2]$ sous H_1. Considérons la région critique de test $R_c = \{x > c\}$ pour une constante $c \in [0,2]$. Calculer ses risques de première et seconde espèce.

Exercice 4. *Test sur la moyenne*
On suppose que l'on observe $X_1, \dots, X_n$, i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$. On veut tester $H_0 : \mu = 0$ contre $H_1 : \mu = m$ où m est un nombre réel négatif fixé.

1. Donner la région critique d'un test de niveau α pour tester H_0 contre H_1.
2. Calculer la puissance $m \in \mathbb{R}_- \mapsto \pi_n(m)$ de ce test et tracer son graphe. Etudier la convergence simple de π_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère l'alternative dépendant de n

$$H_1 : \mu = -Cn^{-\gamma} ,$$

avec $C > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. Etudier le comportement de la puissance du test sur H_1 en fonction de γ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. *Contrôle de qualité au supermarché*
Un client de supermarché a pesé 16 paquets de café de même marque de poids nominal 500g. Les résultats des mesures sont les suivants :

487.5,	500.1,	480.3,	519.8,	470.3,	500.2,	485.2,	499.4,
499.7,	503.1,	504.9,	480.7,	505.1,	494.7,	488.3,	473.3.

avec $\bar{X} = 493.29$, $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = 12.82$. On admet que les poids des paquets forment un échantillon d'une loi normale de moyenne $\mu > 0$ et d'écart-type σ.

1. Effectuer un test de contrôle de qualité sur la moyenne ($H_0 : \mu = 500; H_1 : \mu \neq 500$). Calculer le seuil critique (p-value) de ce test. Conclusion au niveau 5% ? (On donne $\mathbb{P}(Z \leq 2.03) \approx 0.97$, pour $Z \sim t_{15}$).
2. Le client qui a pesé les paquets fait son propre test dont les hypothèses sont $H_0 : \mu \geq 500$ et $H_1 : \mu < 500$. Calculer le seuil critique de ce test et donner la décision au niveau 5%. Comparer le résultat à celui de la question 1). (On donne $\mathbb{P}(Z \leq 0.994) \approx 0.83$, pour $Z \sim t_{15}$).