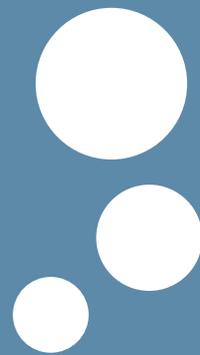


# Prix Neveu : Surfaces Browniennes



*par :* \_\_\_\_\_

*Armand RIERA<sup>1</sup> – Maître de conférences, LPSM*

---

## TABLE DES MATIÈRES

<b>1 Modèles discrets de géométrie aléatoire</b> .....	2	2.2 L'analogie continue des étiquettes .....	8
1.1 Cartes aléatoires .....	2	<b>3 Markov spatiale</b> .....	11
1.2 Bijection CVS .....	4	3.1 Le cas du disque brownien	11
<b>2 Géométrie brownienne</b> ..	7	3.2 Une construction unifiée .	13
2.1 Limite d'échelle de grands arbres aléatoires .....	7	3.3 Profil isopérimétrique ...	15
		<b>Références</b> .....	16

Nous présenterons ici quelques éléments de la théorie des surfaces browniennes. Ces dernières sont des modèles continus de surfaces aléatoires, émergeant comme limites de très grands graphes aléatoires dessinés sur la sphère. Ce phénomène fait écho au célèbre mouvement brownien, qui apparaît comme limite de grands chemins aléatoires. Les surfaces browniennes peuvent donc être interprétées comme une version métrique du mouvement brownien. De plus, cette géométrie aléatoire joue un rôle crucial dans les modèles de gravitation quantique en dimension 2. Nous commencerons par introduire le contexte général de cette théorie en partant de son analogue discret, et présenterons également la construction des surfaces browniennes. Nous expliquerons ensuite comment explorer métriquement ces surfaces et la manière dont les parties non-découvertes dépendent de la zone explorée. En particulier, nous verrons que ces surfaces bénéficient de propriétés d'indépendance. Nous présenterons enfin des applications concernant le profil isopérimétrique des surfaces browniennes.

---

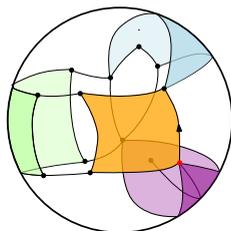
1. [riera@lpsm.paris](mailto:riera@lpsm.paris)

# 1 Modèles discrets de géométrie aléatoire

## 1.1 Cartes aléatoires

Les surfaces browniennes sont des modèles canoniques de surfaces continues aléatoires. Cependant, définir ces objets et justifier leur pertinence de manière intrinsèque est une tâche ardue et complexe. C'est pour cette raison que nous commencerons par considérer des modèles aléatoires discrets et que nous introduirons les surfaces browniennes comme limites d'échelle.

Les objets qui nous intéressent dans cette section sont les cartes planaires. De manière informelle, une carte planaire est un dessin sur la sphère de quelques points (appelés sommets) reliés par des routes (appelées arêtes) de manière à ce que deux arêtes ne puissent pas se croiser et qu'il soit possible d'aller de sommet en sommet en suivant une succession d'arêtes. Cela nous permet d'obtenir un planisphère où les faces/pays sont délimités par des arêtes/frontières. C'est cette interprétation en termes de planisphère qui donne son nom au concept de carte planaire.



**FIGURE 1** — *Un exemple de carte planaire munie d'une arête orientée distinguée. La face violette est obtenue en recollant ensemble deux arêtes du même polygone.*

Plus formellement, une carte planaire est un graphe fini et connexe plongé sur la sphère  $\mathbb{S}_2$ . Pour éviter des redondances, nous considérerons ici les cartes planaires à déformations continues de la sphère près. De manière équivalente, elles peuvent aussi être définies comme des recollements de polygones sous la contrainte d'obtenir topologiquement une sphère. Les cartes planaires apparaissent dans de nombreuses problématiques allant de la combinatoire à la physique théorique, en passant par les matrices aléatoires. Pour des raisons techniques – principalement pour briser des symétries – nous distinguerons toujours une arête orientée (ce qui fixe le sens d'une route). Le sommet duquel part cette arête orientée est appelé *sommet racine* de la carte, en rouge sur la Figure 1 ci-contre. Nous concevons la racine comme le point duquel observer la carte. Rap-

pelons également qu'une carte planaire est munie de la distance de graphe entre ses sommets, où la distance entre deux sommets est le nombre minimal d'arêtes à emprunter pour aller de l'un à l'autre. L'une des principales motivations pour étudier ces structures d'un point de vue probabiliste vient, d'une part, du fait que les cartes planaires peuvent être interprétées comme des espaces métriques compacts – lorsqu'on les considère équipées de leurs distances de graphes – et, d'autre part, du constat que l'espace de toutes les cartes planaires est un espace dénombrable.

**Géométrie aléatoire discrète.** Un modèle de cartes planaires est un sous-ensemble de cartes planaires vérifiant certaines contraintes combinatoires ou géométriques. On dira par exemple qu'une carte planaire est une  $p$ -angulation si toutes ses faces sont des  $p$ -gones. Pour  $p = 3$  et  $p = 4$ , on parlera respectivement de triangulations et de quadrangulations, voir Figure 1 pour un exemple de quadrangulation. Les cartes planaires sont donc des modèles discrets de géométrie planaire nous permettant de considérer des géométries aléatoires. Ces modèles jouent un rôle majeur en physique théorique, où ils sont considérés comme des modèles de gravitation quantique en dimension 2 et comme un moyen de donner sens à un analogue des intégrales de chemin de Feynman portant sur des surfaces (à la place de l'intégrale de chemin plus classique portant sur des trajectoires). Ils sont également utilisés comme briques élémentaires dans certaines tentatives d'unification de la relativité générale et de la mécanique quantique, car les physiciens ont besoin d'une notion canonique de « géométrie aléatoire continue planaire ». L'idée pour obtenir ces modèles continus est de considérer des limites d'échelles de modèles de cartes aléatoires.

**Limites d'échelle.** La procédure est la suivante. Nous commençons par fixer un modèle  $\mathcal{M}$  de cartes puis, pour tout entier  $n \geq 1$ , nous définissons une carte uniforme  $m_n$  dans l'ensemble des cartes à  $n$  faces dans  $\mathcal{M}$  (pourvu que cet ensemble soit non vide). Nous étudions ensuite le comportement limite de  $m_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . L'un des intérêts majeurs des cartes aléatoires est que, pour certains modèles, des surfaces aléatoires continues apparaissent à la limite. C'est notamment le cas lorsque les polygones recollés ont un petit périmètre : les limites d'échelle alors obtenues sont connues sous le nom de *surfaces browniennes*. Cependant, prouver des théorèmes de convergence pour des modèles de cartes est délicat car il faut contrôler la convergence d'espaces métriques. L'on doit à Jean-François Le Gall et à Grégory Miermont les premiers résultats de limites d'échelle de cartes aléatoires.<sup>2</sup> Par souci de concision et pour davantage de

---

2. Ces résultats ont été obtenus de manière indépendante.

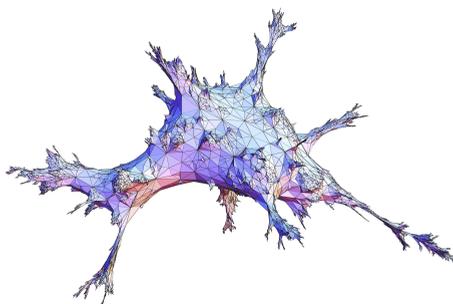
commodité, nous nous restreindrons ici au modèle des quadrangulations i.e. aux cartes obtenues par recollement de polygones à quatre arêtes et munies d'une arête orientée distinguée – comme sur la Figure 1.

## 1.2 Bijection CVS

Notons  $\mathcal{Q}_n$  l'ensemble des quadrangulations à  $n$  faces. L'ensemble  $\mathcal{Q}_n$  est fini et nous pouvons donc considérer  $Q_n$  une quadrangulation uniforme dans  $\mathcal{Q}_n$ . Notre objectif est maintenant de présenter le comportement de  $Q_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Le premier pas dans cette direction est d'explicitier quantitativement la loi de  $Q_n$  ou, de manière équivalente, de comprendre la probabilité que  $Q_n$  prenne une valeur en particulier. La variable  $Q_n$  étant uniforme, cela revient à déterminer le cardinal de  $\mathcal{Q}_n$ . Pour ce faire, nous nous reposons sur un autre fait combinatoire fondamental des cartes planaires : nous pouvons les compter très précisément. Dans le cas des quadrangulations, cela se traduit par la formule close suivante :

$$\#\mathcal{Q}_n = \frac{2}{n+2} 3^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (1)$$

Ce type de formule est le point de départ pour étudier le comportement à grande échelle de  $Q_n$  i.e. lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Examinons par exemple le diamètre  $\text{diam}(Q_n)$  de  $Q_n$ , c'est-à-dire la distance maximale entre deux sommets de  $Q_n$ . Par définition,  $\text{diam}(Q_n)$  est une quantité aléatoire fluctuant avec la taille  $n$ . Dans [6], Philippe Chassaing et Gilles Schaeffer établissent que  $\text{diam}(Q_n)$  est d'ordre  $n^{\frac{1}{4}}$  avec une erreur évanescence lorsque  $n \rightarrow \infty$ .



**FIGURE 2** – *Recollement de triangulations au hasard. Simulation due à Nicolas Curien.*

Soulignons que l'exposant  $1/4$  est très différent de ce que nous pourrions attendre d'autres géométries planaires plus régulières ou euclidiennes. Par exemple,

pour un quadrillage ou pavage régulier, nous devrions obtenir l'exposant  $1/2$ . En réalité, l'exposant  $1/4$  indique que le comportement à grande échelle de  $Q_n$  est rugueux et froissé, voire fractal. La carte  $Q_n$  est loin d'être une surface lisse et s'apparenterait plutôt à une montagne extrêmement irrégulière. Les géodésiques<sup>3</sup> de  $Q_n$  viennent renforcer et préciser cette analogie : contrairement à la géométrie euclidienne classique, les géodésiques de  $Q_n$  passent par un nombre restreint de sentiers ou vallées.

Le·a lecteur·rice pourrait se demander par quelles méthodes appréhender ces objets, nous amenant à introduire la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer – ou bijection CVS. Cette dernière relie les quadrangulations aux arbres étiquetés. Le but est double : d'une part concrétiser le concept de carte et expliquer comment obtenir des formules comme (1), mais aussi préparer la présentation des surfaces browniennes. Commençons par introduire les arbres étiquetés. Un arbre étiqueté est un arbre planaire, c'est-à-dire une carte planaire à une seule face, enrichi avec des étiquettes. Plus précisément, un étiquetage d'un arbre planaire  $\mathcal{T}$  est une fonction  $\ell$  assignant à chaque sommet un entier relatif vérifiant les propriétés suivantes :

- L'étiquette de la racine est 0;
- Pour tout  $u, v \in \mathcal{T}$  voisins, on a  $\ell(u) - \ell(v) \in \{-1, 0, 1\}$ .

Fixons  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \ell)$  un arbre étiqueté à  $n$  sommets ainsi qu'un entier  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ , et construisons une carte planaire  $\text{CVS}(\mathcal{T}, \epsilon)$ . Commençons par introduire un nouveau sommet  $v_*$  ne touchant pas  $\mathcal{T}$  et appelons *coin* de  $\mathcal{T}$  n'importe quel secteur angulaire entre deux arêtes adjacentes. Ensuite, pour chaque coin  $c$  avec étiquette  $i$ , dessinons une arête reliant ce coin avec le premier coin d'étiquette  $i - 1$  rencontré en suivant le contour de  $\mathcal{T}$  (dans le sens des aiguilles d'une montre). S'il n'existe pas de tel coin, relierons  $c$  avec  $v_*$ . Ces nouvelles arêtes peuvent être dessinées sans croisement. Distinguons maintenant l'arête tracée à partir du coin gauche de l'arête racine de  $\mathcal{T}$ , et orientons la vers la racine de  $\mathcal{T}$  si  $\epsilon = 1$  ou dans le sens inverse si  $\epsilon = -1$ . Effacer les arêtes de l'arbre  $\mathcal{T}$  nous permet alors d'obtenir une quadrangulation à  $n + 1$  sommets, avec un point marqué  $v_*$ . De plus, les étiquettes sur les sommets encodent les distances vers  $v_*$  dans la quadrangulation  $\text{CVS}(\mathcal{T}, \epsilon)$ . Plus précisément, on a :

$$d_{\text{gr}}(v, v_*) = \ell(v) - \min \ell + 1, \quad (2)$$

pour tout sommet  $v$  de  $\mathcal{T}$ .

---

3. Les géodésiques sont les chemins les plus courts pour aller d'un point à un autre.

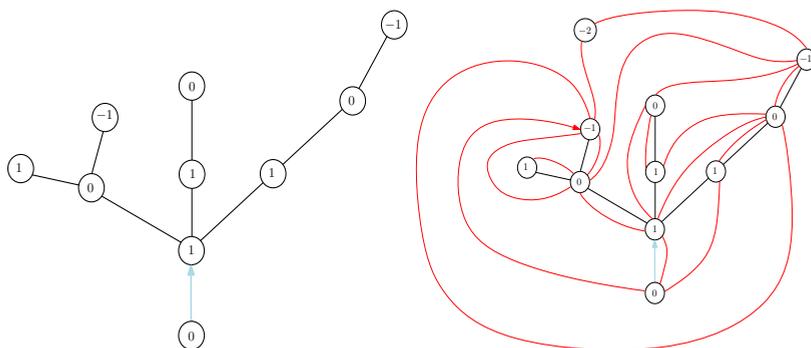


FIGURE 3 — Illustration de la bijection CVS avec  $\epsilon = 1$ .

L'application CVS définit une bijection entre les paires – consistant en un arbre planaire étiqueté et en un entier dans  $\{-1, 1\}$  – et les quadrangulations avec un point marqué.

**Simulation de  $Q_n$ .** Montrons comment obtenir  $Q_n$  en utilisant des arbres étiquetés. Commençons par considérer une variable uniforme  $\epsilon$  dans  $\{-1, 1\}$ , un arbre planaire uniforme à  $n+1$  sommets, puis tirons une variable uniforme dans l'ensemble  $\{-1, 0, 1\}$  sur chaque arête de l'arbre de telle manière que toutes ces variables aléatoires soient indépendantes entre elles. L'étiquette d'un sommet est alors la somme des étiquettes des arêtes sur la branche allant de la racine au sommet en question. Une application de la bijection CVS nous permet ensuite d'obtenir une quadrangulation aléatoire uniforme à  $n+2$  sommets. Finalement, il est aisé de voir qu'une quadrangulation possède  $n+2$  sommets si et seulement si elle est composée de  $n$  faces, en utilisant par exemple la formule d'Euler. Le lecteur averti peut alors retrouver la formule (1) en mobilisant le fait que le nombre d'arbres planaires à  $n+1$  sommets est donné par le  $n$ -ième nombre de Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Cette construction permet également de comprendre l'exposant  $1/4$ , relié au diamètre de  $Q_n$ . De fait, un arbre aléatoire choisi uniformément parmi les arbres à  $n+1$  sommets a typiquement des branches de longueur d'ordre  $\sqrt{n}$ . De plus, le long de chacune de ses branches, les étiquettes ont des incréments aléatoires dans  $\{-1, 0, 1\}$  et, en prenant la variance, nous observons qu'elles atteignent des valeurs d'ordre  $\sqrt{\sqrt{n}} = n^{1/4}$ .

**Autres bijections.** Depuis les travaux de Robert Cori, Bernard Vauquelin et Gilles Schaeffer, d'autres bijections entre des modèles de cartes et des modèles d'arbres étiquetés ont été découvertes. Chacune de ces bijections a ses propres

vertus. Par souci de brièveté, nous ne pouvons malheureusement pas faire ici un bilan de ces bijections; nous nous contentons donc de donner quelques références pour le·a lecteur·rice intéressé·e [4, 16, 5]. Nous renvoyons aussi à [7] pour un autre article de divulgation sur les cartes aléatoires.

## 2 Géométrie brownienne

Dans cette section, nous introduirons de manière heuristique la construction de la surface brownienne la plus célèbre : la sphère brownienne. Rappelons que cette dernière apparaît comme limite d'échelle de grandes quadrangulations aléatoires. Plus formellement, d'après [14, 17] nous avons la convergence suivante :

$$(Q_n, n^{-1/4} \cdot d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\mathcal{S}, \Delta), \quad (3)$$

où  $(\mathcal{S}, \Delta)$  est l'espace aléatoire appelé sphère brownienne, et  $n^{-1/4} \cdot d_{\text{gr}}$  désigne la distance de graphe sur  $Q_n$  réduite d'un facteur  $n^{-1/4}$ .<sup>4</sup> La précédente convergence a lieu en distribution pour la topologie de Gromov-Hausdorff. Définir ces termes sort malheureusement du cadre de cet article – de manière informelle (3) encapsule le fait qu'il est impossible de différencier les espaces métriques  $(Q_n, n^{-1/4} \cdot d_{\text{gr}})$  de  $(\mathcal{S}, \Delta)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . L'objectif de cette section sera de mimer la bijection CVS dans le continu  $n \rightarrow \infty$  afin d'aboutir à une construction de la sphère brownienne  $(\mathcal{S}, \Delta)$ .

### 2.1 Limite d'échelle de grands arbres aléatoires

Les arbres (planaires) constituent le modèle de cartes le plus simple à étudier. En effet, l'absence de cycle induit qu'il est suffisant de connaître toutes les géodésiques à un point pour reconstruire complètement l'arbre sous-jacent. Les arbres sont des objets combinatoires émergeant naturellement dans plusieurs domaines; l'étude des propriétés des grands arbres aléatoires joue d'ailleurs un rôle fondamental dans certaines branches de l'informatique et de la physique. Au début des années 1990, David Aldous introduisit un arbre continu fractal aléatoire encodant le comportement de grands arbres aléatoires : c'est leur limite d'échelle. Cet objet fut baptisé *arbre d'Aldous*. Plus précisément, nous considérons  $T_n$  une variable aléatoire uniforme dans l'ensemble des arbres planaires à  $n$  sommets et notons  $d_{T_n}$  sa distance de graphe. David Aldous montra que l'espace compact aléatoire  $(T_n, n^{-\frac{1}{2}} \cdot d_{T_n})$  converge en distribution vers l'arbre d'Aldous,

4. Le facteur  $n^{-1/4}$  fait écho à la taille du diamètre de  $Q_n$ .

que nous notons  $\mathcal{T}$  et dont voici une approximation imagée :

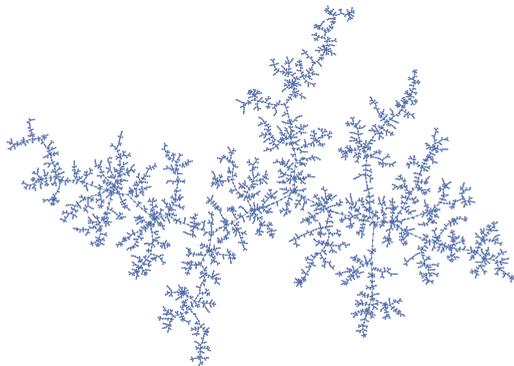


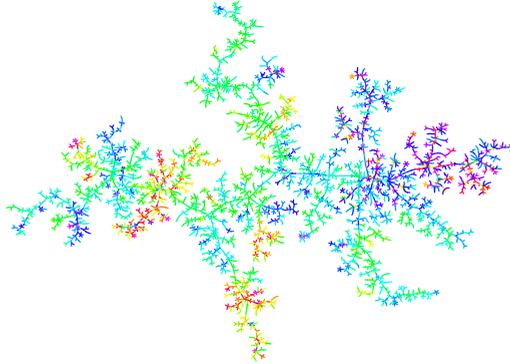
FIGURE 4 — Simulation de l'arbre d'Aldous.

## 2.2 L'analogie continu des étiquettes

Passons maintenant aux étiquettes et commençons par rappeler que pour obtenir une quadrangulation uniforme, nous devons considérer une variable uniforme dans l'ensemble  $\{-1, 0, 1\}$  sur chaque arête de l'arbre. L'étiquette d'un sommet est alors la somme des étiquettes le long du chemin le connectant à la racine. Le long de chaque branche de l'arbre, nous obtenons un mouvement qui évolue en suivant des incréments dans  $\{-1, 0, 1\}$ , et ce, de manière indépendante. Un tel processus est nommé *marche aléatoire* : il modélise le mouvement d'un marcheur sans mémoire ou ivre le long d'un axe. De plus, lorsque plusieurs directions sont possibles, notre marche aléatoire se scinde en plusieurs marches indépendantes. Afin de comprendre ce qu'il se passe lorsque la taille de l'arbre augmente, nous utilisons le fait que les marches aléatoires convergent elles-aussi vers un équivalent continu. Cet équivalent est le célèbre *mouvement brownien*, qui modélise à son tour un mouvement continu complètement aléatoire et sans mémoire.

L'analogie continu des étiquettes dans la bijection CVS serait alors de considérer des mouvements browniens le long des branches de l'arbre d'Aldous  $\mathcal{T}$ . Le processus ainsi obtenu est connu sous le nom de mouvement brownien indexé par  $\mathcal{T}$  ou *serpent brownien*. Cet objet joue un rôle fondamental en théorie des probabilités et fut introduit par Jean-François Le Gall. Il apparaît notamment

dans la théorie des superprocessus, ou encore dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

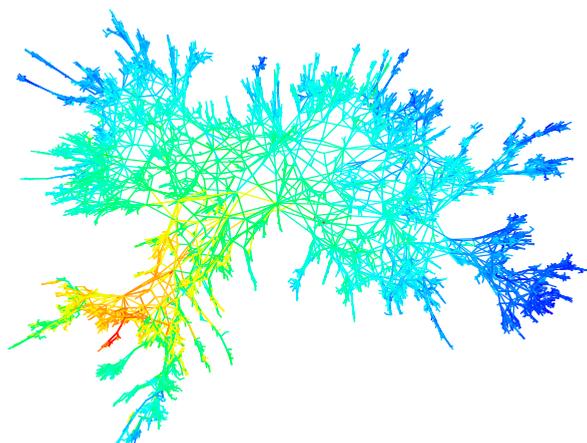


**FIGURE 5** — Approximation de l'arbre d'Aldous muni d'étiquettes browniennes. Les couleurs représentent les étiquettes : les couleurs jaunes et vertes correspondent à des étiquettes négatives alors que les couleurs bleues et violettes correspondent à des étiquettes positives. La couleur rouge traduit les valeurs extrêmes.

Le serpent brownien est l'analogue continu des arbres étiquetés et il est possible de mimer la bijection de CVS sur ce dernier pour construire un espace métrique aléatoire. L'espace ainsi obtenu est la *sphère brownienne*. Malheureusement, la définition formelle de cette construction est complexe et dépasse le cadre de cet article. Par conséquent, nous renvoyons le lecteur·rice intéressé·e aux travaux [11, 14, 17, 10] pour plus d'informations. Mentionnons uniquement que le résultat de convergence (3) peut-être compris comme un résultat de continuité de la bijection CVS. De plus, cette construction à l'aide du serpent brownien permet d'étudier la sphère brownienne directement à l'aide de la théorie plus classique des processus stochastiques, et ce, de manière intrinsèque i.e. sans faire référence aux modèles discrets. Nous nous attacherons dans les sections suivantes à expliciter certains résultats allant dans cette direction.

**Autres modèles continus.** Ces dernières années ont vu apparaître plusieurs variantes de la sphère brownienne comme limite d'échelle de modèles discrets, les principales variantes étant le *disque brownien*, le *plan brownien*, le *demi-plan brownien* et le *disque brownien de volume infini*. Cette famille de modèles continus est connue sous le nom de surfaces browniennes et le nom de chaque modèle

spécifie sa topologie.<sup>5</sup> Ces surfaces peuvent être décrites à l'aide d'arbres continus étiquetés de manière analogue à la sphère brownienne, voir [2] ou notre travail [15]. En général, ces étiquettes sont des modifications de mouvements browniens. Relevons que, parallèlement à la rédaction de cet article, Jérémie Bettinelli et Grégory Miermont ont élargi la famille des surfaces browniennes à des topologies de genre arbitraire dans [3].<sup>6</sup>



**FIGURE 6** — Approximation de la sphère brownienne. Les couleurs représentent les distances à un point uniforme, ici colorié en rouge.

**Mesure volume.** Mentionnons aussi que chaque surface brownienne est munie d'une mesure volume. Cette dernière offre un moyen naturel de mesurer la taille des sous-ensembles des surfaces browniennes. De manière intuitive, la mesure volume peut être vue comme une mesure de Lebesgue sur chacune de ces surfaces, et elle généralise la mesure de comptage des sommets sur les cartes planaires.

**Gravité quantique.** Soulignons enfin que les surfaces browniennes peuvent être étudiées directement à l'aide de la gravité quantique de Liouville, voir par exemple [9, 18]. Cette approche conçoit les surfaces browniennes comme des objets conformes.

---

5. Le disque brownien de volume infini a la topologie du plan complexe après avoir enlevé le disque unité ouvert.

6. Ces nouvelles surfaces sont elles aussi encodées à l'aide d'arbres étiquetés.

### 3 Markov spatiale

Nous aborderons dans cette section des questions d'indépendance et d'exploration au sein des surfaces browniennes. Commençons par une analogie avec le mouvement brownien. Rappelons que ce dernier est une fonction continue purement aléatoire et notons le  $(B_t : t \geq 0)$ . L'une des caractéristiques fondamentales du mouvement brownien est qu'il bénéficie de la propriété de Markov suivante. Imaginons que nous laissons évoluer le mouvement brownien jusqu'à un instant  $r$  ou, de manière équivalente, que nous avons exploré ce mouvement jusqu'au temps  $r$ . L'avenir ou zone à explorer de ce mouvement  $(B_t : t \geq r)$  ne dépend alors de son passé  $(B_t : t \in [0, r])$  qu'à travers sa position à l'instant  $r$ . En termes plus mathématiques, nous disons que conditionnellement à  $B_r$ , le processus  $(B_t : t \geq r)$  est indépendant de  $(B_t : t \in [0, r])$  et de manière plus concise, que  $B$  est Markovien. Notons parallèlement que  $(B_t : t \geq r)$  est lui aussi un mouvement brownien. Il est alors raisonnable de se demander si des phénomènes semblables surviennent en géométrie brownienne. Relevons cependant que les surfaces browniennes sont des espaces métriques aléatoires et qu'il faut par conséquent une bonne notion d'exploration et d'interface entre la zone explorée et les zones à explorer. Ce sont ces questions auxquelles nous nous intéresserons dans cette section. Plus précisément, nous aborderons le comportement des surfaces browniennes lorsqu'on les explore de manière métrique en découvrant des boules de plus en plus grandes.

#### 3.1 Le cas du disque brownien

Afin de répondre à cette problématique, nous considérons dans cette section le cas du disque brownien, qui est le modèle canonique aléatoire possédant la topologie du disque unité fermé du plan complexe. Le disque brownien possède un bord – les points n'ayant pas de voisinage homéomorphe au disque ouvert – et est muni d'une distance ainsi que d'une mesure volume. La loi du disque brownien dépend de deux paramètres réels positifs : la longueur de son bord – ou périmètre – et son volume. Pour des raisons techniques, nous considérons ici une variante du disque brownien à volume aléatoire, nommée *version libre*. Nous cherchons à comprendre les phénomènes entrant en jeu lorsque l'on découpe un disque brownien libre en fonction des distances à son bord. Plus précisément, si nous notons  $\mathbb{D}_z$  le disque brownien libre de périmètre  $z$  et  $B_r(\mathbb{D}_z)$  l'ensemble des points à distance inférieure à  $r$  du bord, alors l'ensemble  $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$  est constitué de plusieurs composantes connexes possédant chacune la topologie du disque unité fermé, voir Figures 6 et 7. Mais comment  $B_r(\mathbb{D}_z)$  et les composantes

connexes de  $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$  dépendent-elles les unes des autres? Pour répondre à cette question, nous présenterons ici les réponses apportées dans l'article [13], co-écrit avec Jean-François Le Gall.

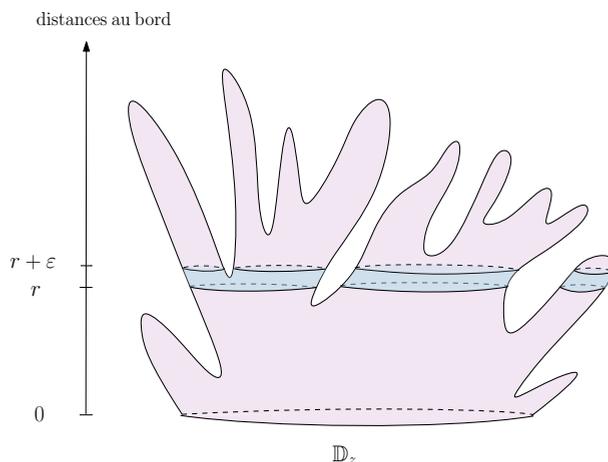


FIGURE 7 — L'axe vertical représente les distances au bord.

Le premier pas pour répondre à cette question est de donner sens à la longueur du bord de ces composantes connexes, simultanément pour tout niveau  $r$ . Les bords sont des courbes fractales; nous ne pouvons donc pas calculer leurs longueurs directement avec la métrique du disque brownien. Afin de contourner cette difficulté, pour chaque composante connexe de  $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$ , nous considérons le volume d'une petite couronne autour de son bord. Il est alors possible de montrer que cette quantité peut être proprement changée d'échelle afin d'obtenir une limite non dégénérée lorsque l'on prend des couronnes de plus en plus fines, voir Figure 7. La quantité ainsi obtenue est la longueur du bord. Nous établissons ensuite que les composantes connexes de  $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$ , conditionnellement aux longueurs de leurs frontières, sont des disques browniens libres, indépendants et de périmètres les longueurs des bords associés. Ceci montre que le disque brownien satisfait une propriété de Markov similaire à celle du mouvement brownien. Du fait de sa nature purement géométrique, nous parlerons de *propriété de Markov spatiale*.

**Processus des longueurs.** Pour que cette propriété soit utile il est essentiel de comprendre l'évolution de la collection des longueurs des bords lorsque  $r$  croît. Pour ce faire, nous établissons que ce processus est bien identifié et ex-

placite.<sup>7</sup> Les preuves des résultats exposés précédemment utilisent de manière fondamentale le lien entre les surfaces browniennes et le serpent brownien, ce qui permet d'identifier certains processus et d'effectuer des calculs précis. En effet, ces preuves reposent, entre autres, sur la théorie des excursions du serpent brownien développée dans [1].

### 3.2 Une construction unifiée

La sphère brownienne peut être perçue comme un disque brownien de périmètre 0, ce qui permet d'étendre la propriété de Markov spatiale à ce modèle. Pour transférer ensuite cette propriété aux autres surfaces browniennes, il est nécessaire d'établir des liens et des connexions entre ces différents modèles. C'est pour cette raison que nous avons développé avec Jean-François Le Gall dans [15] une construction unifiée des trois modèles principaux de surfaces browniennes non-compactes, à savoir le plan brownien, le demi-plan brownien et le disque brownien de volume infini. L'idée fondamentale est d'adapter la construction de la sphère brownienne en termes d'arbres aléatoires étiquetés, de manière à ce que les étiquettes aient une bonne interprétation géométrique. Décrivons heuristiquement cette construction. Les arbres que nous employons sont des arbres non-compactes formés d'une épine dorsale infinie décorée d'étiquettes positives, sur laquelle sont recollés des serpents browniens tronqués lorsqu'ils touchent l'étiquette 0. Plus précisément, commençons avec l'arbre d'Aldous infini  $\mathcal{T}_\infty$ <sup>8</sup> qui est constitué d'une lignée infinie / d'une épine dorsale isométrique à  $[0, \infty[$  sur laquelle se branchent « à gauche et à droite » des arbres d'Aldous de manière indépendante – en termes mathématiques, nous utilisons deux nuages poissonniens d'arbres d'Aldous. Mentionnons que  $\mathcal{T}_\infty$  a un seul bout topologique : les arbres greffés sur l'épine sont tous compacts et l'unique manière d'aller à l'infini est de suivre l'épine dorsale. Munissons l'arbre  $\mathcal{T}_\infty$  d'étiquettes de la manière suivante :

- Les étiquettes le long de l'épine  $[0, \infty[$  suivent un mouvement brownien partant de 0 et conditionné à rester positif ;
- Les étiquettes le long d'un arbre recollé sur l'épine sont browniennes et commencent à l'étiquette du point de l'épine sur lequel l'arbre est greffé.

Élaguons toute branche de  $\mathcal{T}_\infty$  à partir de l'étiquette 0, donnant ainsi naissance à un nouvel arbre infini noté  $\mathcal{T}_\infty^*$ .

7. Il s'agit d'un processus de croissance-fragmentation.

8. Il peut être défini comme la limite de l'arbre d'Aldous conditionné à avoir un volume infini.



**FIGURE 8** — Illustration de l'arbre élagué  $\mathcal{T}_\infty^*$ . La hauteur représente les distances à 0 des étiquettes. L'épine est coloriée en jaune et les points d'étiquette nulle sont coloriés en rouge.

Présentons rapidement comment construire les surfaces browniennes non-compactes à l'aide de  $\mathcal{T}_\infty^*$ . L'ensemble des points de  $\mathcal{T}_\infty^*$  d'étiquette 0 – en rouge sur la Figure 9 – est un ensemble de Cantor, mais il est malgré cela possible de définir une variable aléatoire  $Z$  rendant compte de sa taille. Nous pouvons dès lors adapter la construction de la sphère brownienne à l'arbre  $\mathcal{T}_\infty^*$  pour obtenir :

- Le plan brownien sous le conditionnement  $Z = 0$ ;
- Le disque brownien de volume infini et de périmètre  $z > 0$  sous le conditionnement  $Z = z$ ;
- Le demi-plan brownien sous le conditionnement  $Z = \infty$ .

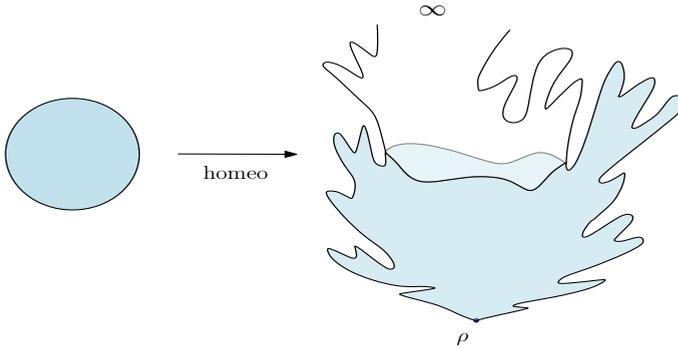
Dans ces constructions, les étiquettes ont une interprétation géométrique. Elles correspondent aux distances au bord,<sup>9</sup> ce dernier étant encodé à son tour par les points d'étiquette 0. La variable  $Z$  représente la longueur fractale du bord. Ces constructions permettent aussi d'avoir accès de manière simple aux géodésiques vers le bord. Il faut néanmoins adapter la construction de la sphère brownienne avec soin pour éviter des problèmes de recollement – l'écriture du plan brownien obtenue correspond à celle introduite dans [8]. Soulignons aussi que la variable aléatoire  $Z$  est presque sûrement infinie, ce qui rend le conditionnement pour le demi-plan brownien superflu et les conditionnements du plan brownien et du disque brownien de volume infini dégénérés. La plupart du travail technique dans [15] est dédié à donner un sens précis à ces conditionnements dégénérés. Les méthodes employées dans [15] peuvent ainsi être comprises comme un en-

9. Dans le cas du plan brownien, le bord est réduit à un unique point, appelé *point racine*.

semble de recettes permettant d'établir des modèles de géométrie brownienne sous différents conditionnements.

### 3.3 Profil isopérimétrique

Concluons cet article en donnant un exemple de propriété purement géométrique des surfaces browniennes pouvant être étudiée en tirant avantage de la propriété de Markov spatiale. Intéressons-nous au profil isopérimétrique du plan brownien. Rappelons que le plan brownien possède la topologie du plan complexe et qu'il est équipé d'une distance  $\Delta_\infty$  et d'une mesure volume  $V_\infty$ . Considérons aussi un point uniforme  $\rho$  sur le plan Brownien. Nous étudions ici les domaines de Jordan – ensembles homéomorphes au disque unité fermé – contenant  $\rho$  dans leurs intérieurs et nous notons  $\mathcal{K}$  l'ensemble de ces domaines. Pour tout  $A \in \mathcal{K}$ , nous comparons son volume  $V_\infty(A)$  et la longueur métrique de son bord  $\Delta_\infty(\partial A)$ .<sup>10</sup> Soulignons que nous utilisons ici la longueur de  $\partial A$  par rapport à la métrique  $\Delta_\infty$ , contrairement au cas des courbes fractales où l'on prend le volume de petits voisinages.



**FIGURE 9** – L'axe vertical représente les distances à  $\rho$ . En bleu, nous dessinons un exemple d'ensemble dans  $\mathcal{K}$ .

Dans [19] nous démontrons que, pour toute fonction croissante  $f : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$ , nous avons :

$$\inf_{A \in \mathcal{K}} \frac{\Delta_\infty(\partial A)}{V_\infty(A)^{\frac{1}{4}}} f(|\log(V_\infty(A))|) > 0 \text{ p.s.} \iff \sum_{m \in \mathbb{N}} f(m)^{-2} < \infty. \quad (4)$$

10. La mesure  $V_\infty$  est borélienne, ce qui implique que le volume  $V_\infty(A)$  est bien défini. La longueur  $\Delta_\infty(\partial A)$  est définie comme étant la longueur de n'importe quelle paramétrisation de  $\partial A$ . Une simple vérification montre que cette quantité ne dépend pas de la paramétrisation en question.

Cette équivalence détermine jusqu'à quel point la longueur du bord  $\Delta_\infty(\partial A)$  peut être petite par rapport au volume  $V_\infty(A)$ . En géométrie euclidienne, nous devrions comparer la longueur du bord et la racine carrée de l'air. Cependant les surfaces browniennes sont des objets fractals et l'exposant  $\frac{1}{4}$  encapsule leur caractère irrégulier.<sup>11</sup> L'équivalence (4) donne un critère simple pour compenser le rapport  $\Delta_\infty(\partial A)/V_\infty(A)^{\frac{1}{4}}$  afin d'obtenir des inégalités isopérimétriques qui ne soient pas dégénérées. En particulier, elle caractérise de manière optimale le profil isopérimétrique du plan brownien et précise quel devrait être celui des modèles discrets dans son bassin d'attraction, voir [12] pour des résultats directs dans le discret. Évoquons enfin que ce résultat peut aisément s'étendre au disque brownien de volume infini ainsi qu'à la sphère brownienne : il est par exemple possible d'utiliser la construction unifiée présentée dans la section précédente.

## Références

- [1] Céline ABRAHAM et Jean-François LE GALL. "Excursion theory for Brownian motion indexed by the Brownian tree". In : *J. Eur. Math. Soc.* 20.12 (2018), p. 2951-3016.
- [2] Erich BAUR, Grégory MIERMONT et Gourab RAY. "Classification of scaling limits of uniform quadrangulations with a boundary". In : *Ann. Probab.* 47 (2019), p. 3397-3477.
- [3] Jérémie BETTINELLI et Grégory MIERMONT. "Compact Brownian surfaces II. Orientable surfaces". In : <https://arxiv.org/abs/2212.12511> (2022).
- [4] Jérémie BOUTTIER, Philippe DI FRANCESCO et Emmanuel GUITTER. "Planar maps as labeled mobiles". In : *Electron. J. Combin.* 11.1 (2004), Research Paper 69, 27 pp.
- [5] Guillaume CHAPUY, Michel MARCUS et Gilles SCHAEFFER. "A bijection for rooted maps on orientable surfaces". In : *SIAM J. Discrete Math.* 23.3 (2009), p. 1587-1611.
- [6] Philippe CHASSAING et Gilles SCHAEFFER. "Random planar lattices and integrated superBrownian excursion". In : *Probab. Theory Related Fields* 128.2 (2004), p. 161-212.
- [7] Nicolas CURIEN. "À quoi ressemble un planisphère vraiment aléatoire?" In : *Images des maths* (2012).

---

11. Cet exposant est relié à celui des diamètres de grandes quadrangulations aléatoires.

- [8] Nicolas CURIEN et Jean-François LE GALL. “The Brownian plane”. In : *J. Theoret. Probab.* 27.4 (2014), p. 1249-1291.
- [9] François DAVID et al. “Liouville quantum gravity on the Riemann sphere”. In : *Communications in Mathematical Physics* 342(3) (2016), p. 869-907.
- [10] Jean-François GALL et Grégory MIERMONT. “Scaling limits of random trees and planar maps”. In : *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions* 15 (2012), p. 155-211.
- [11] Jean-François Le GALL. “Brownian geometry : Takagi lectures”. In : *Japan. J. Math.* 14 (2019), p. 135-174.
- [12] Jean-François Le GALL et Thomas LEHÉRICY. “Separating cycles and isoperimetric inequalities in the uniform infinite planar quadrangulation”. In : *Ann. Probab.* 47 (2019), p. 1498-1540.
- [13] Jean-François Le GALL et Armand RIERA. “Growth-fragmentation processes in Brownian motion indexed by the Brownian tree”. In : *Ann. Probab.* 48 (2020), p. 1742-1784.
- [14] Jean-François LE GALL. “Uniqueness and universality of the Brownian Map”. In : *Ann. Probab.* 41 (2013), p. 2880-2960.
- [15] Jean-François LE GALL et Armand RIERA. “Spine representation for non-compact models of random geometry”. In : *Probab. Theory Related Fields* 181 (2021), p. 571-645.
- [16] Grégory MIERMONT. “Tessellations of random maps of arbitrary genus”. In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 42.5 (2009), p. 725-781.
- [17] Grégory MIERMONT. “The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations”. In : *Acta Math.* 210.2 (2013), p. 319-401.
- [18] Jason MILLER et Scott SHEFFIELD. “Liouville quantum gravity and the Brownian map I : The QLE  $(8/3, 0)$  metric”. In : *Invent. Math.* 219.1 (2020), p. 75-152.
- [19] Armand RIERA. “Isoperimetric inequalities in the Brownian map and the Brownian plane”. In : *Ann. Probab.* 50 (2022), p. 2013-2055.

**Armand RIERA**

Armand Riera a effectué sa thèse sous la direction de Jean-François Le Gall à l'université Paris Saclay. Il est maintenant maître de conférences à Sorbonne Université. Ses travaux portent sur l'étude des limites d'échelle de grands graphes aléatoires dessinés sur des surfaces.

**Email :** [riera@lpsm.paris](mailto:riera@lpsm.paris)

**Site web :** [www.lpsm.paris/users/riera/](http://www.lpsm.paris/users/riera/)